

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Угол между прямыми.



*ФГКОУ НСВУ МВД России
Вабищевич С.Н.*

Цели урока:

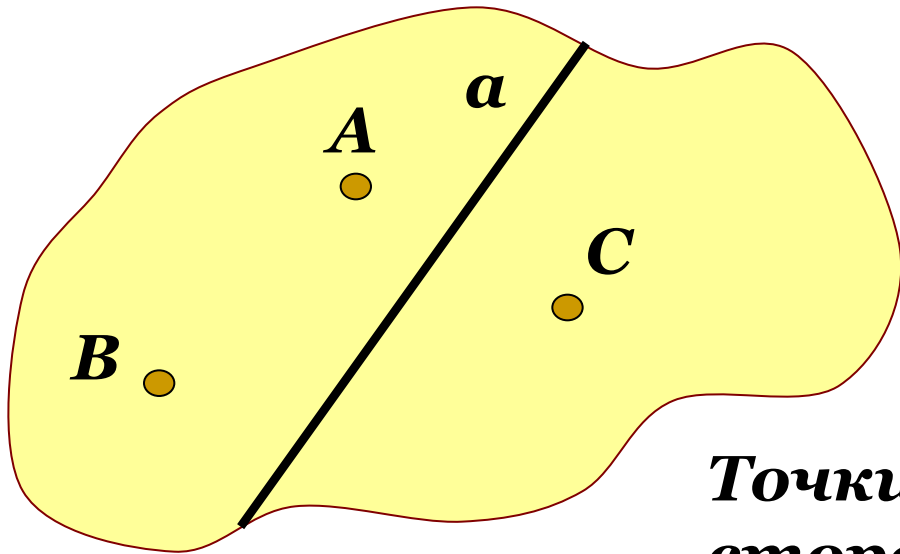
- *Ввести формулировку и доказательство теоремы о равенстве углов с сонаправленными сторонами.*
- *Научиться находить угол между прямыми в пространстве.*



Повторение.

- Верно ли утверждение: **если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?** **Нет**
- Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые **а) пересекаться?** **Да**
б) быть скрещивающимися? **Да**
- Могут ли скрещивающиеся прямые **a** и **b** быть параллельными прямыми? **Нет**
- Даны две скрещивающиеся прямые **a** и **b**. Точки **A** и **A₁** лежат на прямой **a**, точки **B** и **B₁** лежат на прямой **b**. Как бы расположились отрезки **AB** и **A₁B₁**? **AB скрещивается с A₁B₁**
- Прямая **a** скрещивается с прямой **b**, а прямая **b** скрещивается с прямой **c**. Следовательно, что прямые **a** и **c** - скрещивающиеся? **Нет**

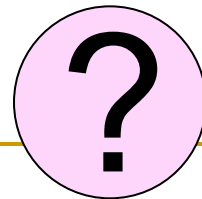
Любая прямая **a** , лежащая в плоскости,
разделяет плоскость на две части,
называемые **полуплоскостями**.



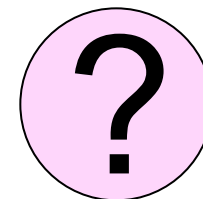
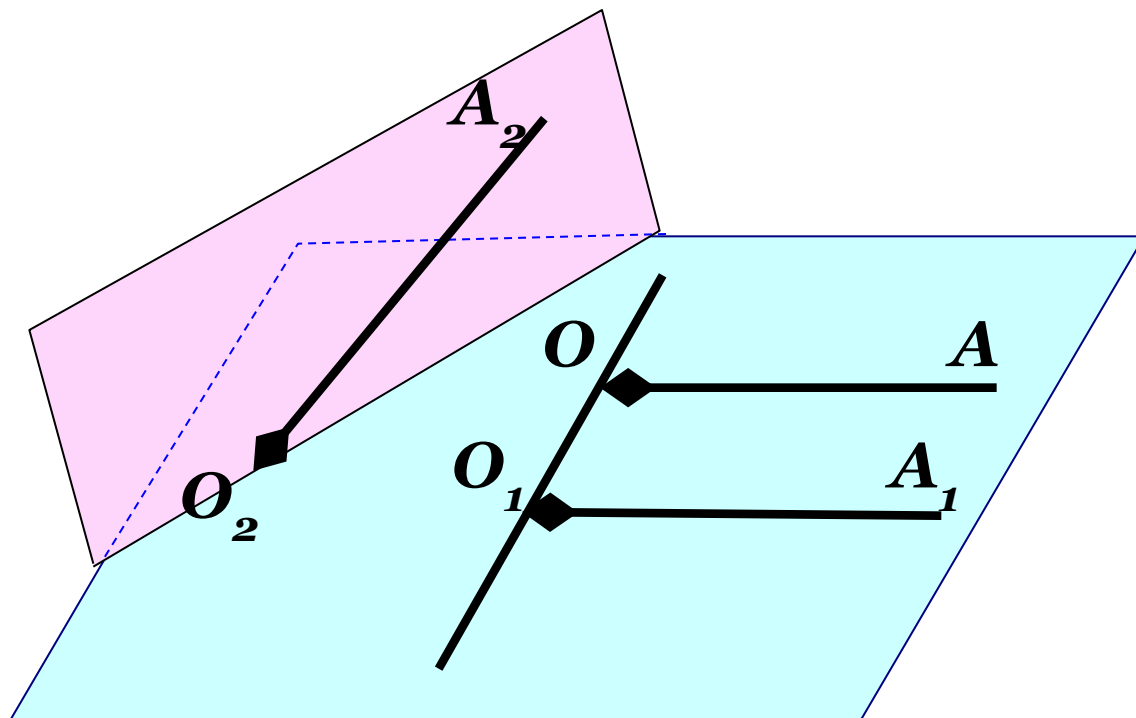
a – граница
полуплоскостей.

Точки **A** и **B** лежат по одну
сторону от прямой **a** .

Точки **A** и **C** лежат по разные
стороны от прямой **a** .



Углы с сонаправленными сторонами.



Лучи OA и O_1A_1 не лежат на одной прямой, параллельны, лежат в одной полуплоскости с границей $OO_1 \rightarrow$

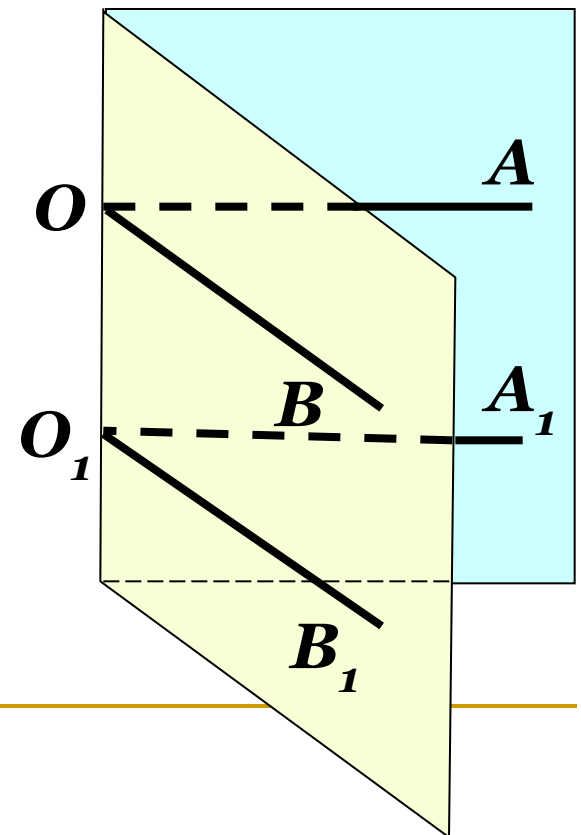
сонаправленные

Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

*Дано: угол O и угол O_1
с сонаправленными
сторонами.*

Доказать: $\angle O = \angle O_1$



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Доказательство:

Отметим точки A, B, A_1 и B_1 , такие что $OA = O_1A_1$ и $OB = O_1B_1$.

1. Рассмотрим OAA_1O_1 :

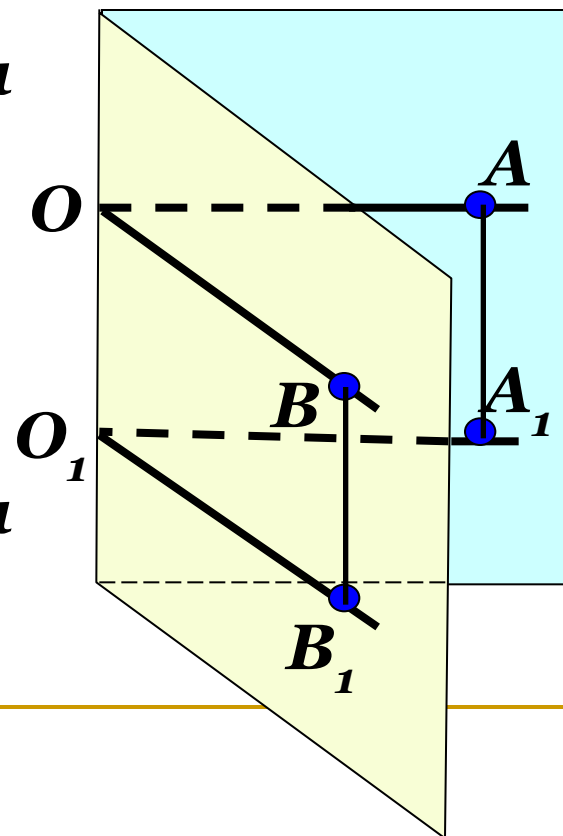
$OA \parallel O_1A_1 \mid \xrightarrow{\hspace{1cm}}$
 $OA = O_1A_1 \mid OAA_1O_1$ – параллелограмм
(по признаку).

Значит, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$.

2. Рассмотрим OBV_1O_1 :

$OB \parallel O_1B_1 \mid \xrightarrow{\hspace{1cm}}$
 $OB = O_1B_1 \mid OBB_1O_1$ – параллелограмм
(по признаку).

Значит, $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$.



Теорема об углах с сонаправленными сторонами

Вывод:

$$AA_1 \parallel OO_1 \text{ и } BB_1 \parallel OO_1, \implies AA_1 \parallel BB_1$$

$$AA_1 = OO_1 \text{ и } BB_1 = OO_1, \implies AA_1 = BB_1$$

Следовательно,
четырехугольник AA_1B_1B –
параллелограмм (по признаку).

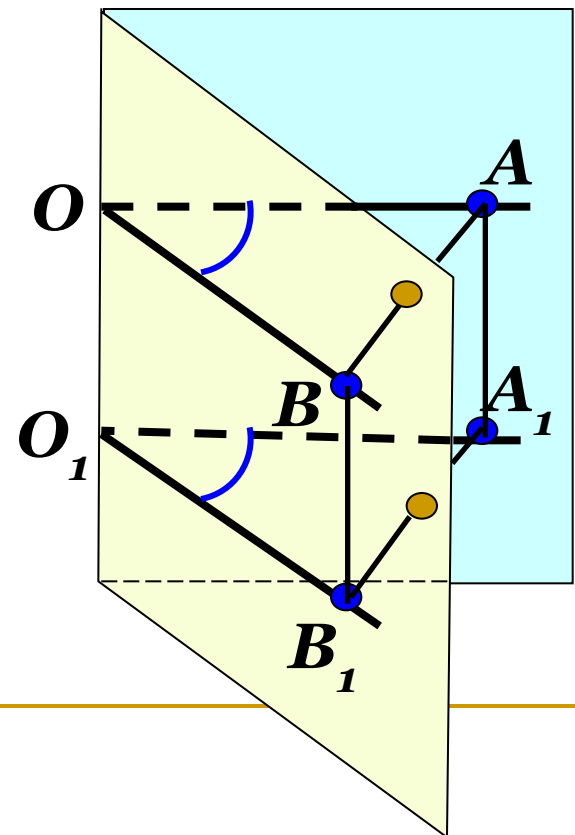
$$AB = A_1B_1$$

3. Рассмотрим $\triangle ABO$ и $\triangle A_1B_1O_1$.

$$\triangle ABO = \triangle A_1B_1O_1$$

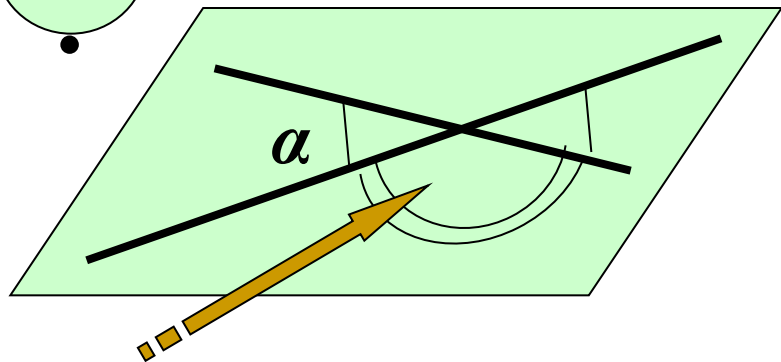
(по трем сторонам)

Вывод: $\angle O = \angle O_1$

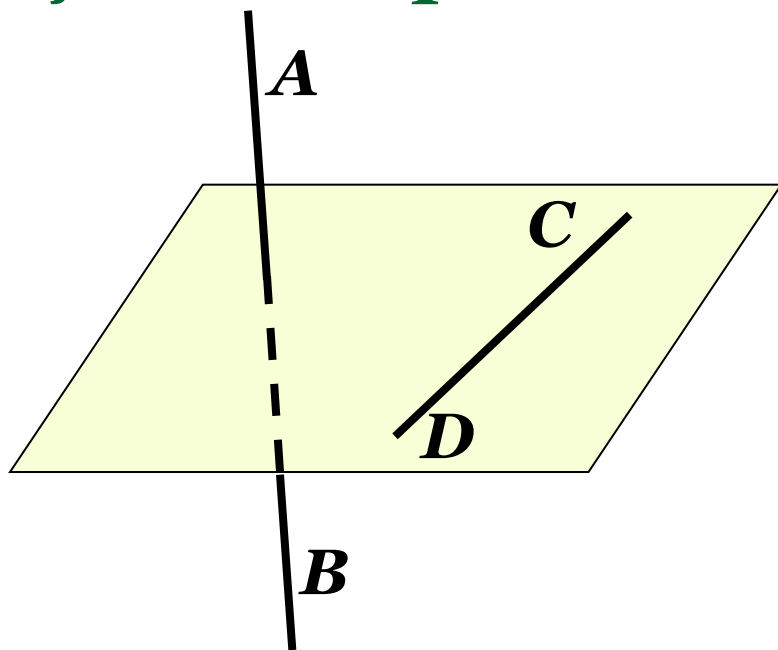


Угол между скрещивающимися прямыми.

1

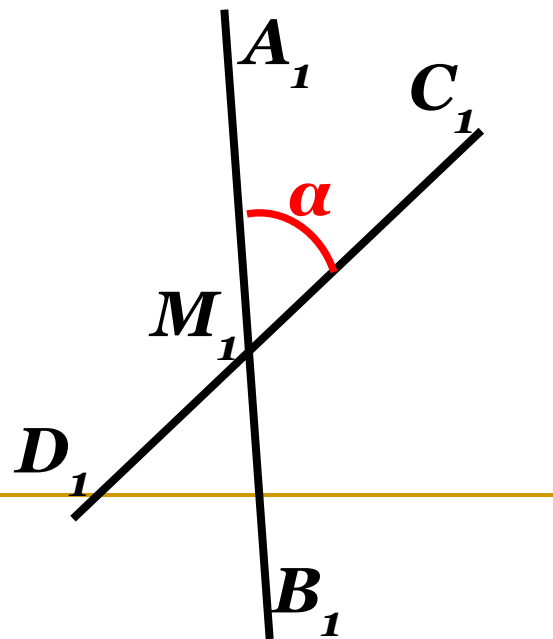


$$180^\circ - \alpha \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$



2

Угол между скрещивающимися прямыми AB и CD определяется как угол между пересекающимися прямыми A_1B_1 и C_1D_1 , при этом $A_1B_1 \parallel AB$ и $C_1D_1 \parallel CD$.



3

Практическое задание.

- Выбрать любую точку M_2 .
- Построить $A_2B_2 \parallel AB$ и $C_2D_2 \parallel CD$.
- Ответить на вопросы:

1. Почему $A_2B_2 \parallel A_1B_1$ и $C_2D_2 \parallel C_1D_1$?

2. Являются ли углы $A_1M_1D_1$ и $A_2M_2D_2$ углами с соответственно параллельными сторонами?

Вывод:

1. $\angle A_1M_1D_1 = \angle A_2M_2D_2$

2. Величина угла между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки.



Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.
Найдите угол между прямыми:

1. BC и CC_1

90°

2. AC и BC

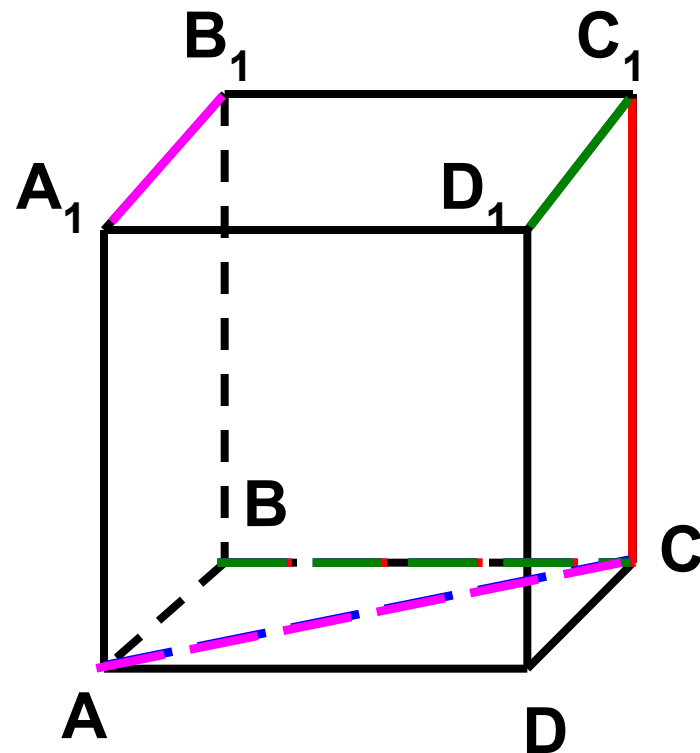
45°

3. $D_1 C_1$ и BC

90°

4. $A_1 B_1$ и AC

45°





Задача №44.

Дано: $OB \parallel CD$,
 OA и CD – скрещивающиеся.
Найти угол между OA и CD , если:

а) $\angle AOB = 40^\circ$

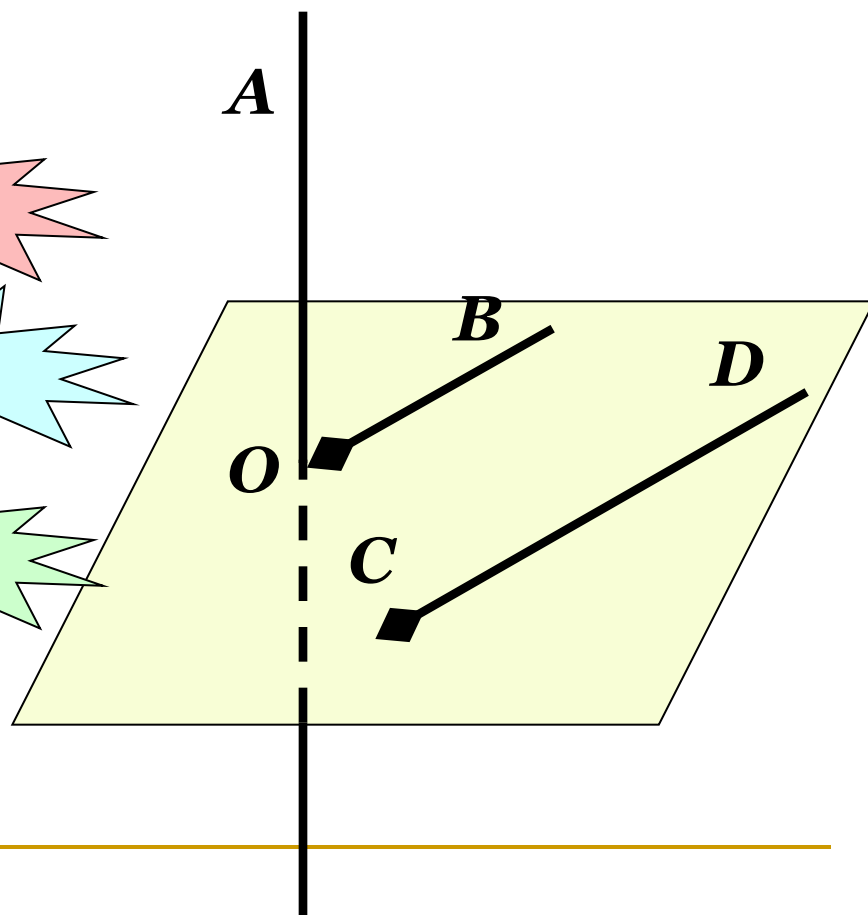
40°

б) $\angle AOB = 135^\circ$

45°

в) $\angle AOB = 90^\circ$

90°





Дополнительная задача.

Треугольники ABC и ADC лежат в разных плоскостях. PK – средняя линия $\triangle ADC$ с основанием AC .

Определить взаимное расположение прямых PK и AB , найти угол между ними, если $\angle C = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$

