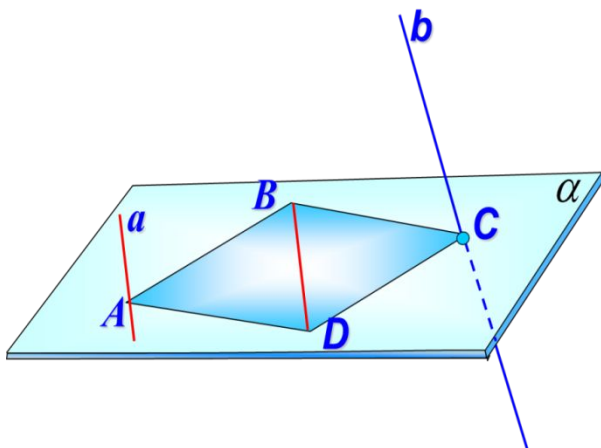


Взаимное расположение прямых в пространстве.

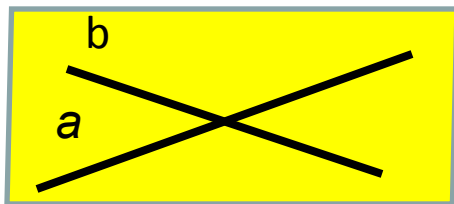
Угол между скрещивающимися прямыми.



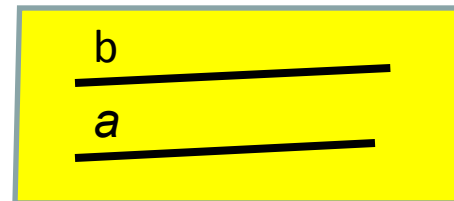
Преподаватель:
Косян Анаит Георгиевна

Лежат в одной плоскости

пересекаются

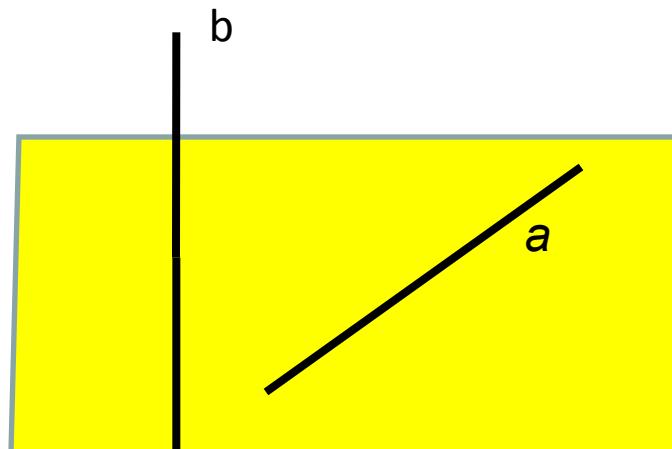


параллельны

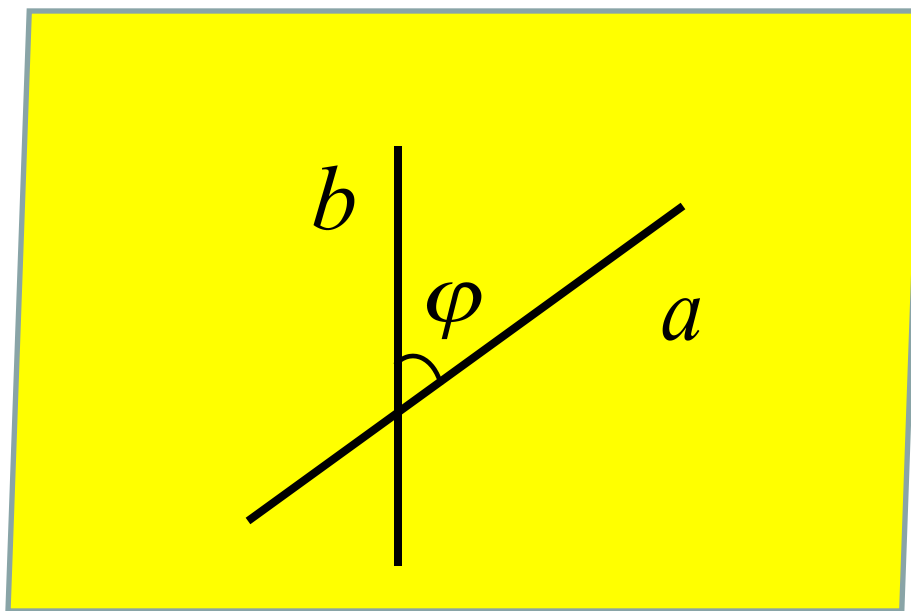


Не лежат в одной плоскости

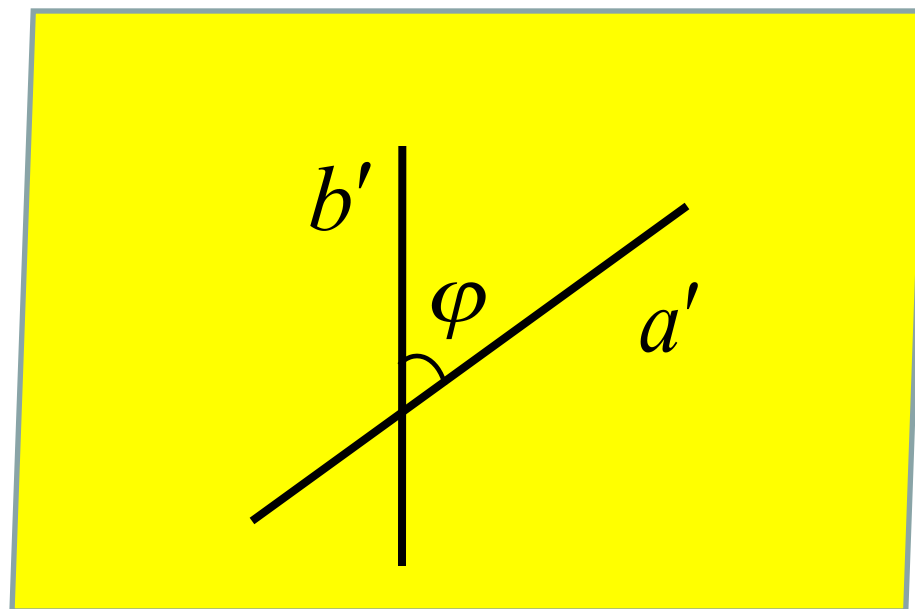
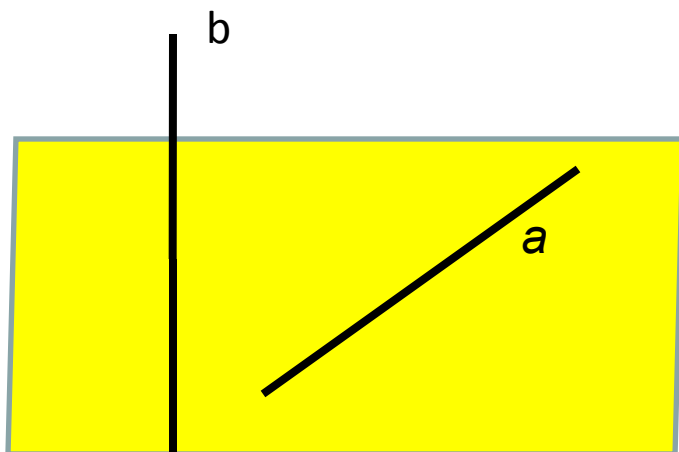
скрещиваются



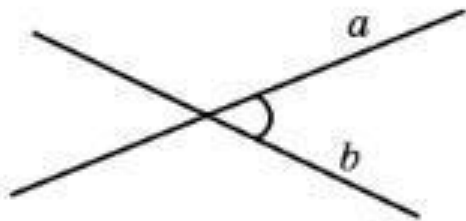
Угол между пересекающимися прямыми



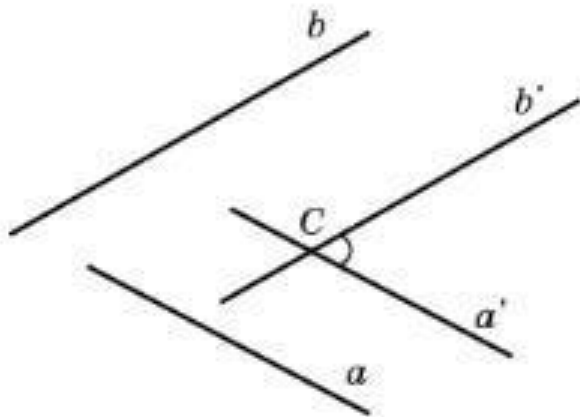
Угол между скрещивающимися прямыми



УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

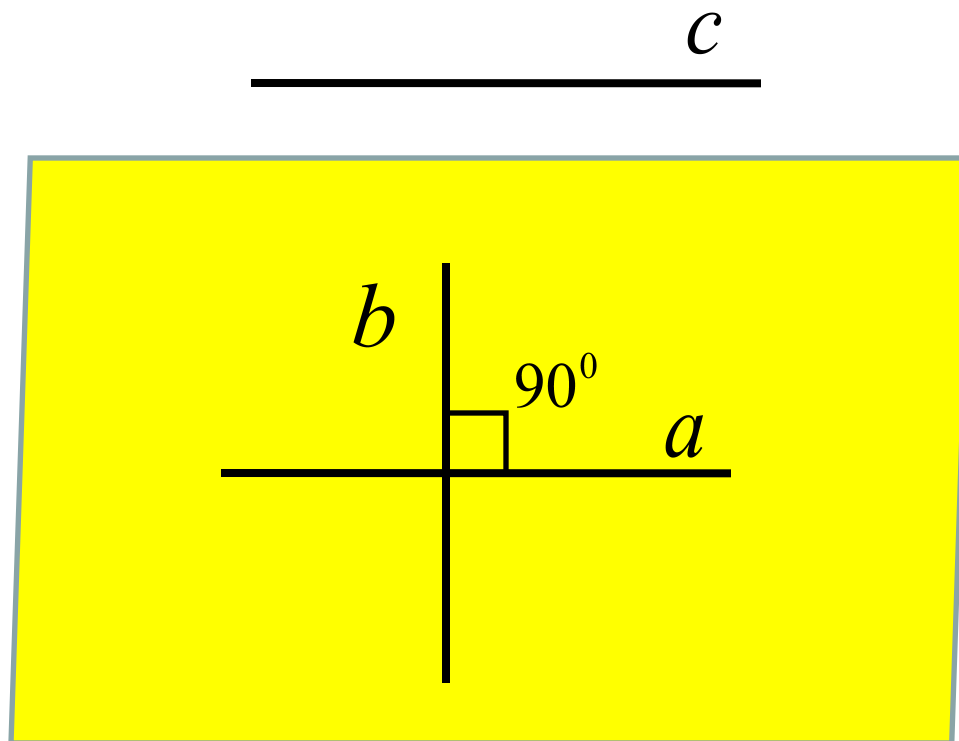


Углом между двумя пересекающимися прямыми в пространстве называется наименьший из углов, образованных лучами этих прямых с вершиной в точке их пересечения.



Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным.

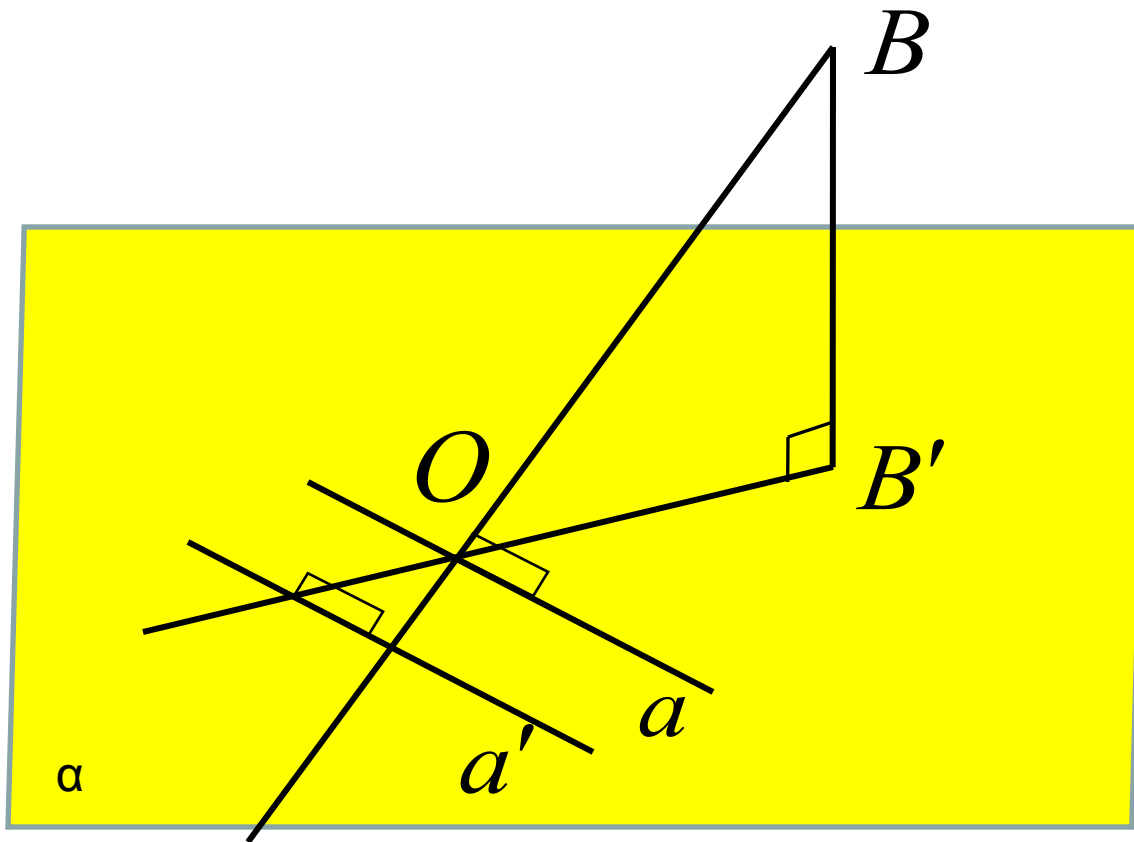
Перпендикулярные прямые в пространстве



$$a \perp b$$

$$c \perp b$$

Теорема о трех перпендикулярах



$$BO \cap \alpha$$

$$BB' \perp \alpha$$

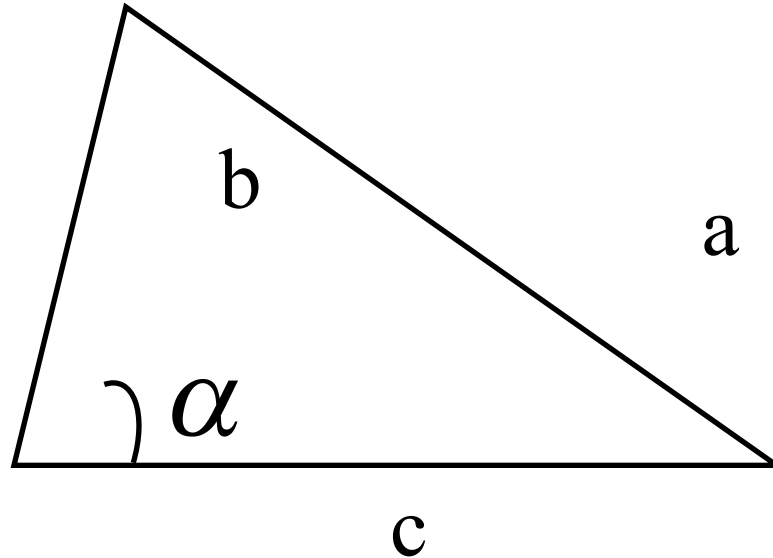
$$a' \subset \alpha$$

$$a' \perp OB'$$

$$a' \perp BO$$

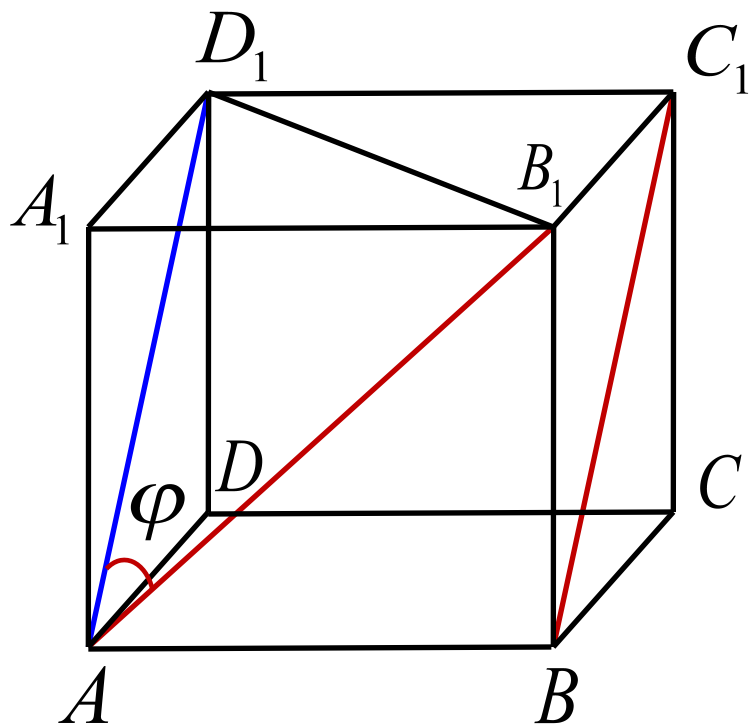
Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.

Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Задача 1 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми AB_1 и BC_1



Решение.

$$AD_1 \parallel BC_1$$

$$\angle B_1AD_1 = \varphi$$

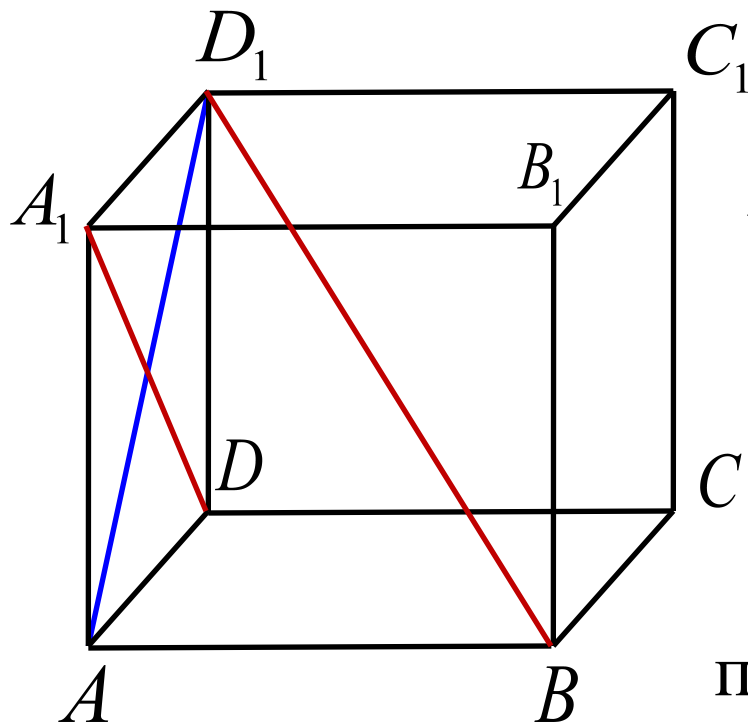
$\triangle B_1AD_1$ - равносторонний треугольник

$$\angle B_1AD_1 = 60^0$$

Ответ : 60^0

Задача 2 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и BD_1

Решение.



AD_1 - проекция BD_1 на
плоскость ADD_1

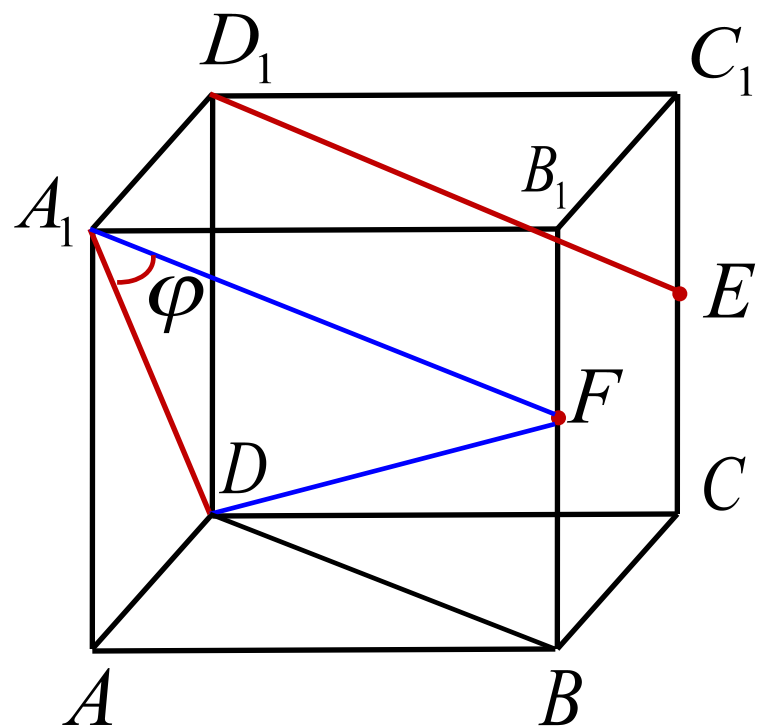
$$DA_1 \perp AD_1$$

Из теоремы о трех
перпендикулярах следует, что

$$DA_1 \perp BD_1$$

Ответ : 90^0

Задача 3 В единичном кубе $A...D_1$ найдите угол между прямыми DA_1 и D_1E , где E – середина ребра CC_1



Решение.

F – середина BB_1

$A_1F \parallel D_1E$ $\angle DA_1F = \varphi$

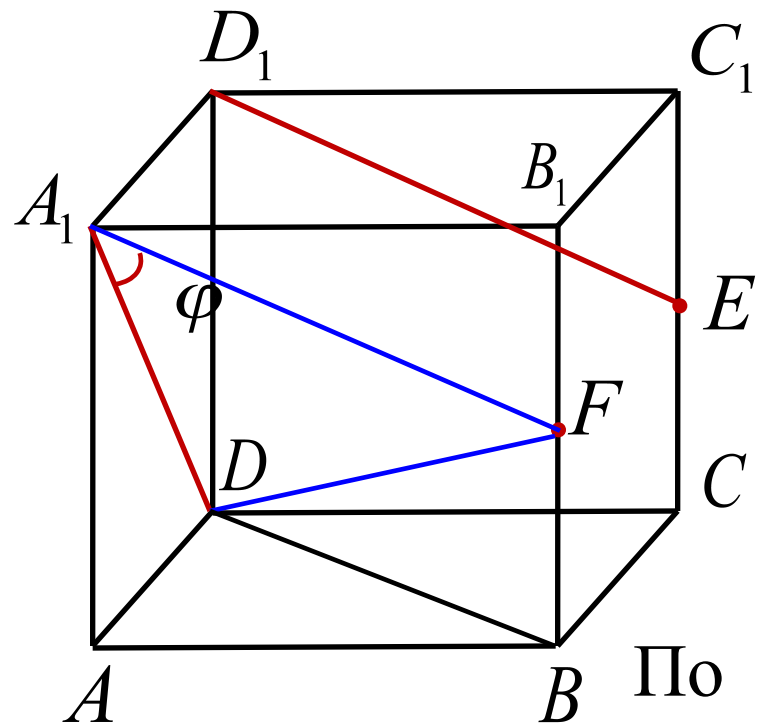
$\triangle A_1AD$ - прямоугольный

$$A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2 = 1 + 1 = 2$$

$$A_1D = \sqrt{2}$$

$\triangle DBF$ - прямоугольный

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \qquad DF = \frac{3}{2}$$



$\triangle A_1B_1F$ - прямоугольный

$$A_1F^2 = A_1B_1^2 + B_1F^2$$

$$A_1F^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad A_1F = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle DA_1F$

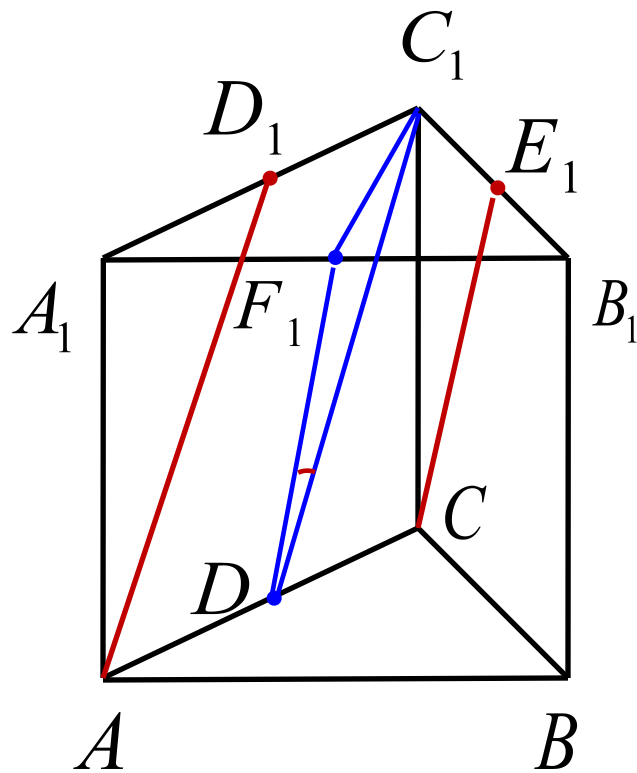
$$DF^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2 \cdot A_1D \cdot A_1F \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{5}{4} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Задача 4 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AD_1 и CE_1 , где D_1 и E_1 - соответственно середины ребер A_1C_1 и B_1C_1



Решение.

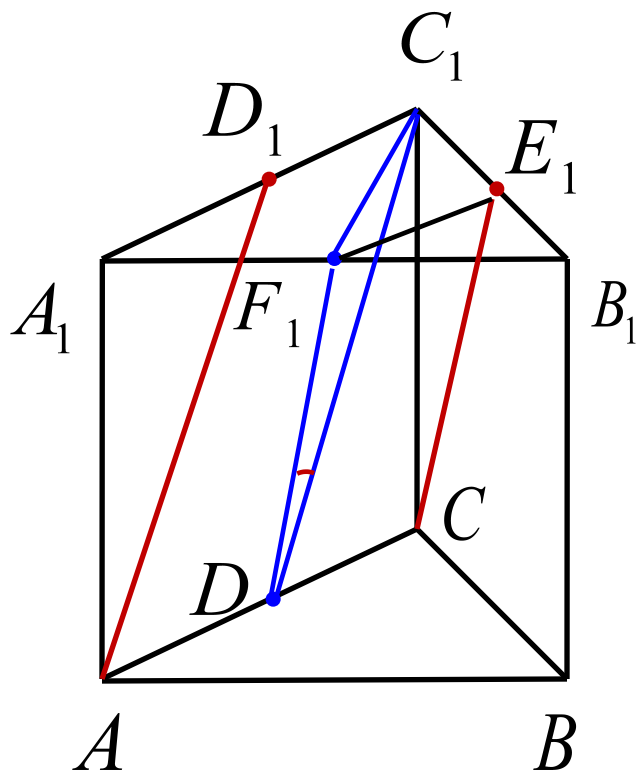
D – середина ребра AC

F_1 – середина ребра A_1B_1

$$DC_1 \parallel AD_1$$

$$DF_1 \parallel CE_1$$

$$\angle C_1DF_1 = \varphi$$



E_1F_1 - средняя линия $\triangle A_1B_1C_1$

$$E_1F_1 \parallel A_1C_1$$

$$E_1F_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2}$$

$$DC \parallel A_1C_1 \quad DC = \frac{1}{2}$$

$$E_1F_1 \parallel DC \quad E_1F_1 = DC$$

DF_1E_1C – параллелограмм

$$DF_1 \parallel CE_1 \quad DF_1 = CE_1$$



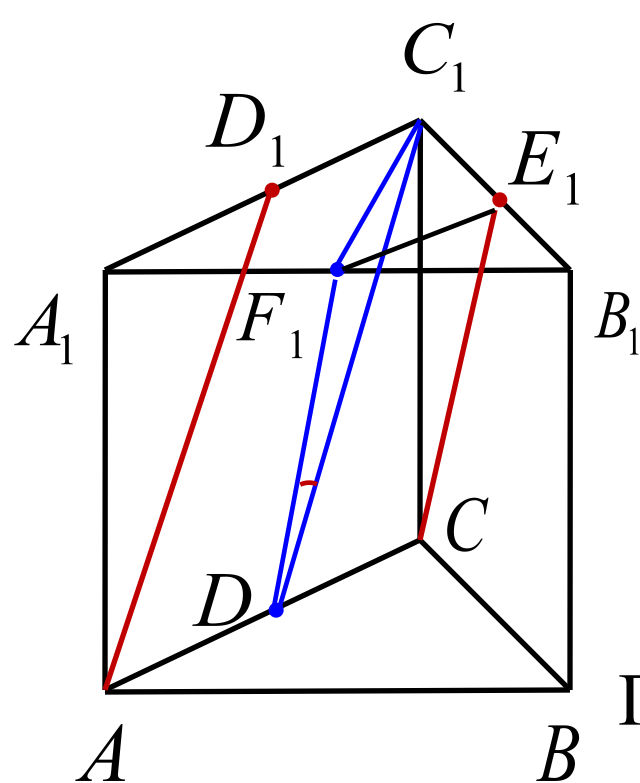
$$CE_1^2 = CC_1^2 + C_1E_1^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$DF_1 = CE_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

 ΔDCC_1 - прямоугольный

$$DC_1^2 = DC^2 + CC_1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$DC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$\triangle A_1F_1C_1$ - прямоугольный

$$C_1F_1^2 = A_1C_1^2 - A_1F_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle C_1DF_1$

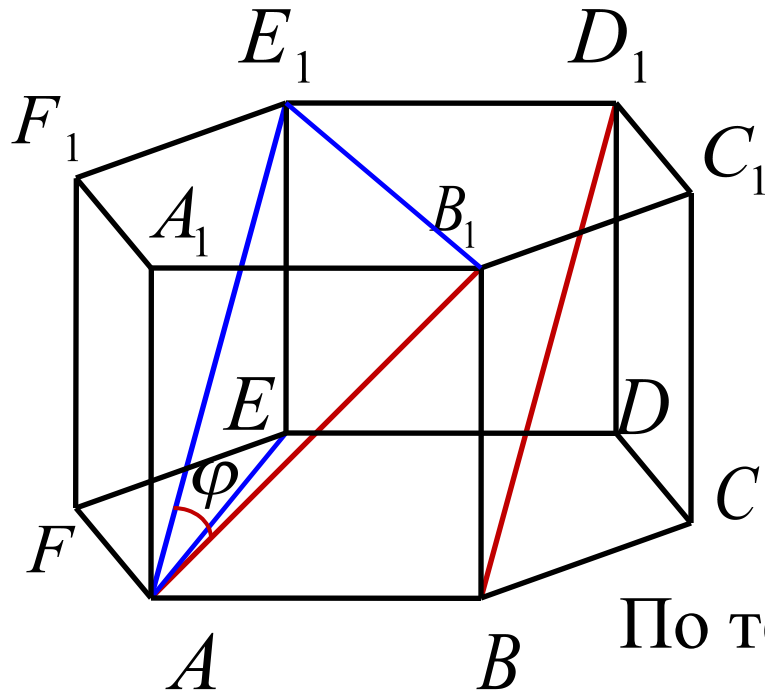
$$C_1F_1^2 = DF_1^2 + DC_1^2 - 2 \cdot DF_1 \cdot DC_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,7$$

Ответ : 0,7

Задача 5 В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1



Решение.

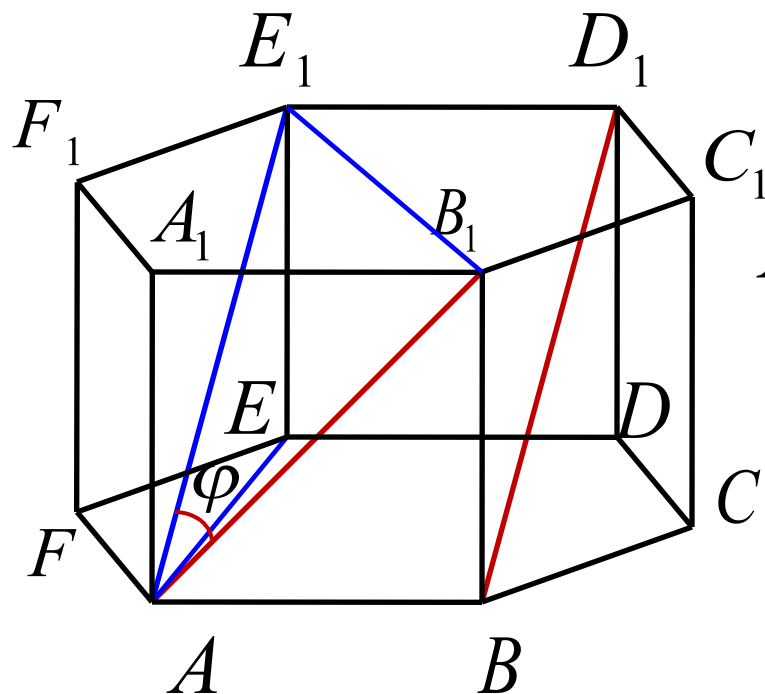
$$AE_1 \parallel BD_1$$

$$\angle B_1AE_1 = \varphi$$

По теореме косинусов для $\triangle AFE$

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos \angle AFE$$

$$AE^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 3$$



$\triangle AEE_1$ - прямоугольный

$$AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2 = 3 + 1 = 4$$

$$AE_1 = 2$$

$$B_1E_1 = 2A_1F_1 = 2$$

$$AB_1 = \sqrt{2}$$

По теореме косинусов для $\triangle B_1AE_1$

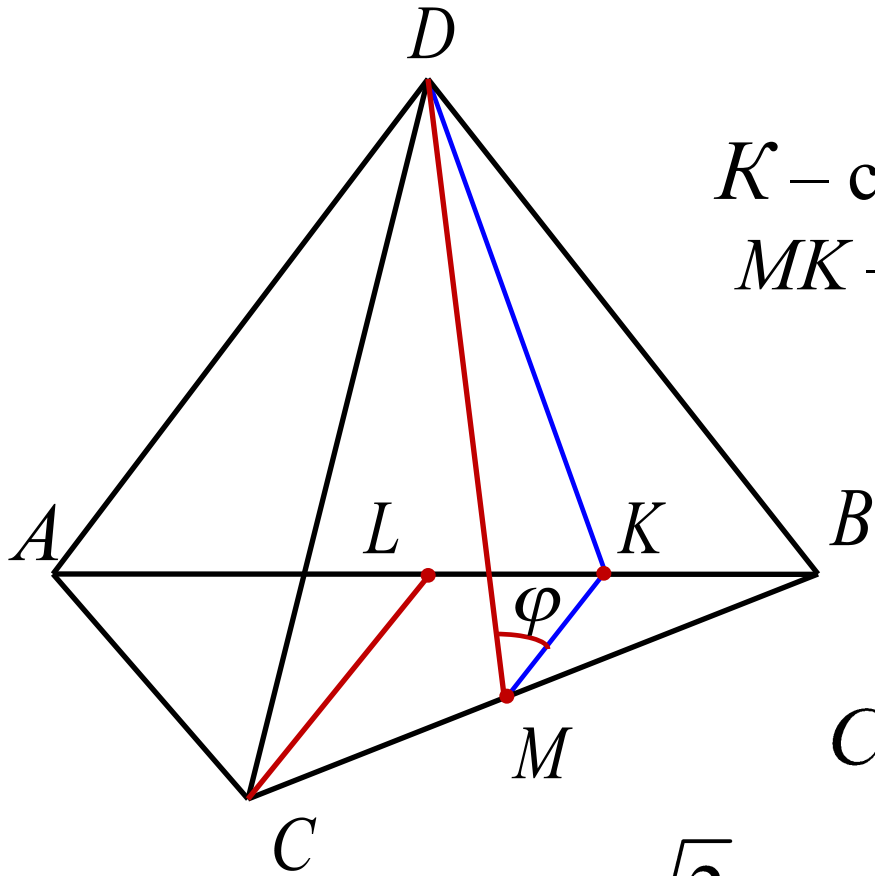
$$B_1E_1^2 = B_1A^2 + AE_1^2 - 2 \cdot B_1A \cdot AE_1 \cdot \cos \varphi$$

$$4 = 2 + 4 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 6 Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите косинус угла между прямыми DM и CL , где M – середина ребра BC , L – середина ребра AB .



Решение.

K – середина LB

MK – средняя линия $\triangle CLB$

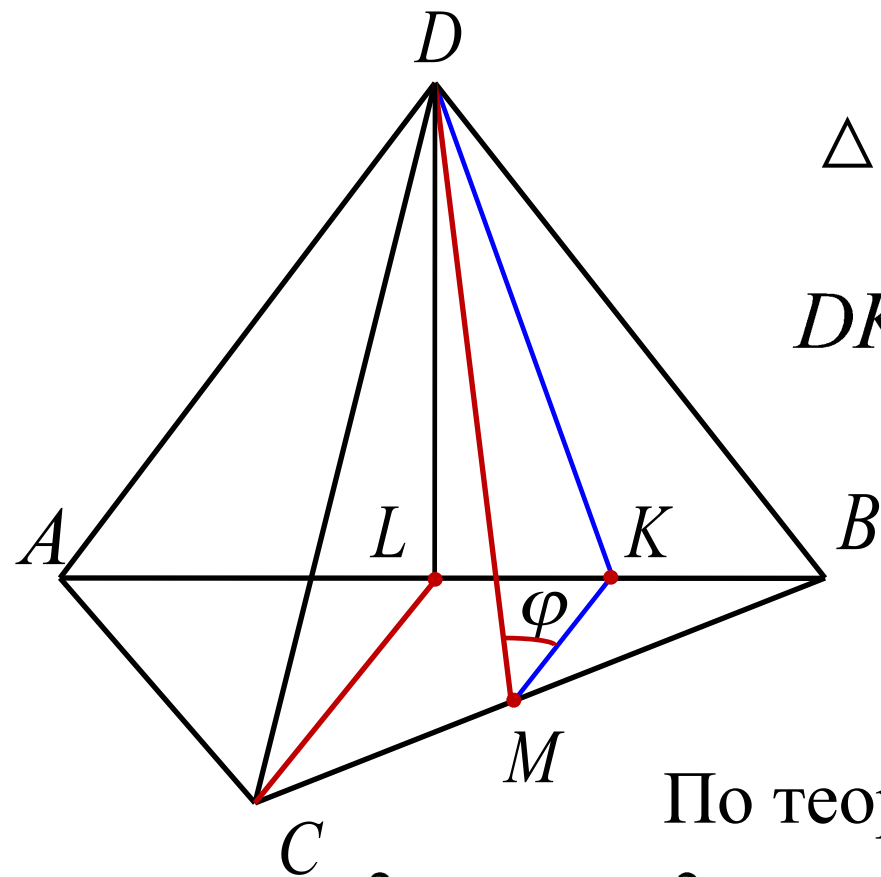
$MK \parallel CL$ $\angle DMK = \varphi$

$\triangle ALC$ – прямоугольный

$$CL^2 = AC^2 - AL^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$CL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MK = \frac{1}{2} CL = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$\triangle DLK$ - прямоугольный

$$DK^2 = DL^2 + LK^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$DK = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

По теореме косинусов для $\triangle DMK$

$$DK^2 = MK^2 + MD^2 - 2 \cdot MK \cdot MD \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{13}{16} = \frac{3}{16} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{1}{6}$$

Домашняя работа

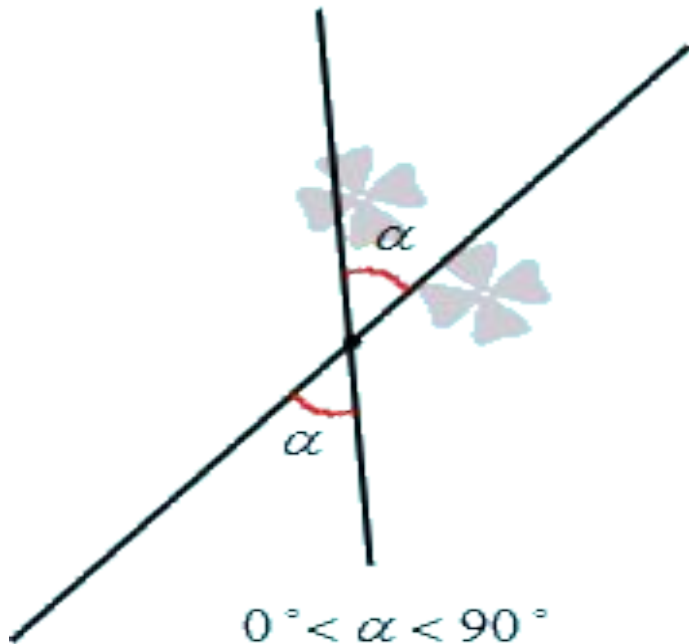
§2; п.7; 8 №44; №45

Учебник по геометрии

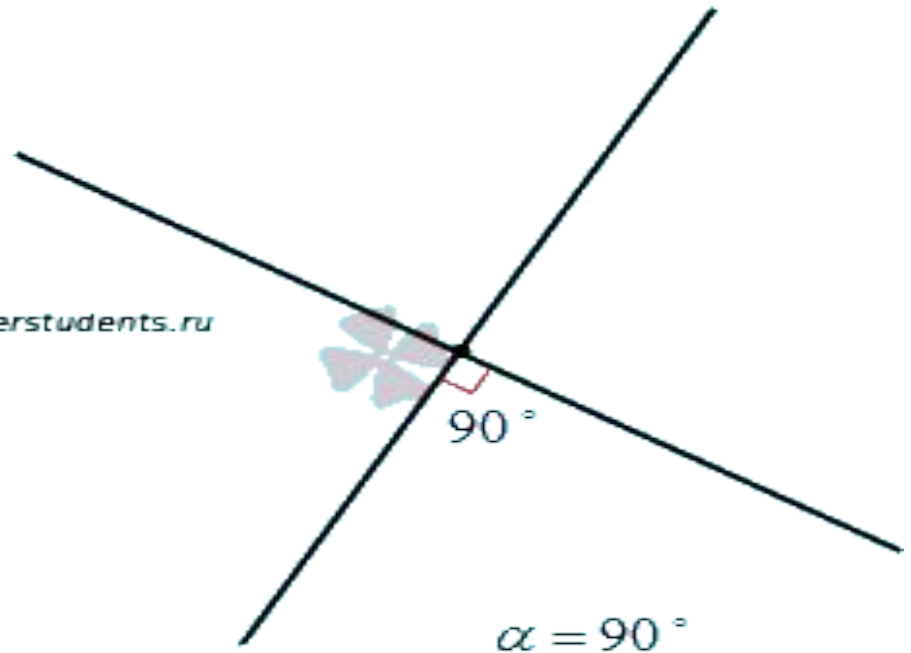
Л. С. Атанасян



угол между пересекающимися прямыми



www.cleverstudents.ru



Спасибо за урок!!!

