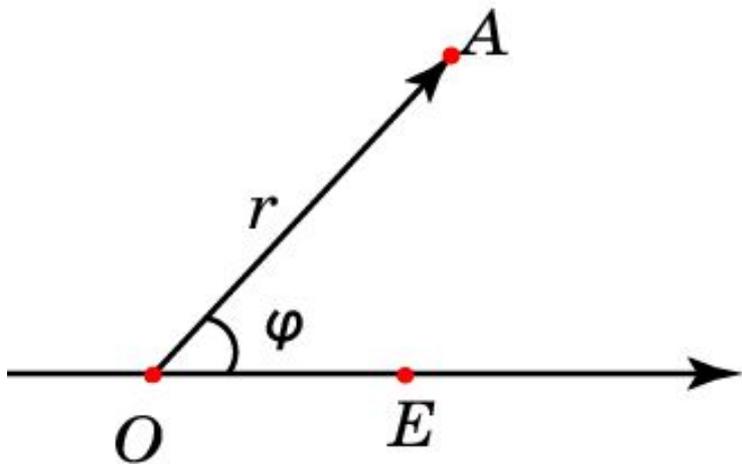


Полярные координаты

Пусть на плоскости задана координатная прямая с выделенной точкой O и единичным отрезком OE . Эта прямая в данном случае будет называться **полярной осью**. Точка O называется **полюсом**.

Полярными координатами точки A на плоскости с заданной полярной осью называется пара (r, ϕ) , где r - расстояние от точки A до точки O , ϕ - угол между полярной осью и вектором \overrightarrow{OA} , отсчитываемый в направлении против часовой стрелки, если $\phi > 0$ и по часовой стрелке, если $\phi < 0$.

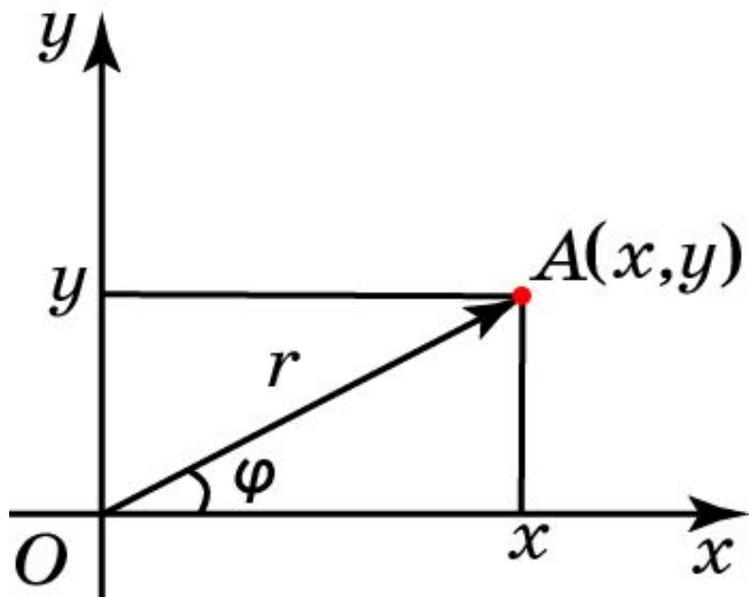
При этом первая координата r называется **полярным радиусом**, а вторая ϕ - **полярным углом**. Полярный угол можно задавать в градусах или радианах.



Полярные координаты

Если на плоскости задана декартова система координат, то обычно за полюс принимается начало координат и за полярную ось – ось Ox . В этом случае каждой точке плоскости с декартовыми координатами (x, y) можно сопоставить полярные координаты (r, φ) . При этом декартовы координаты выражаются через полярные по формулам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$$

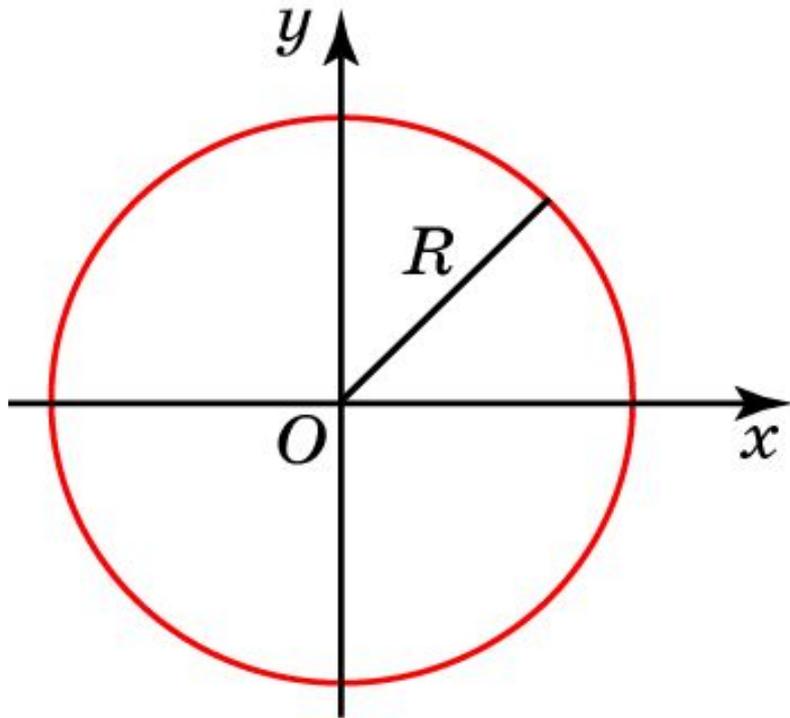


Наоборот, полярные координаты выражаются через декартовы по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Окружность

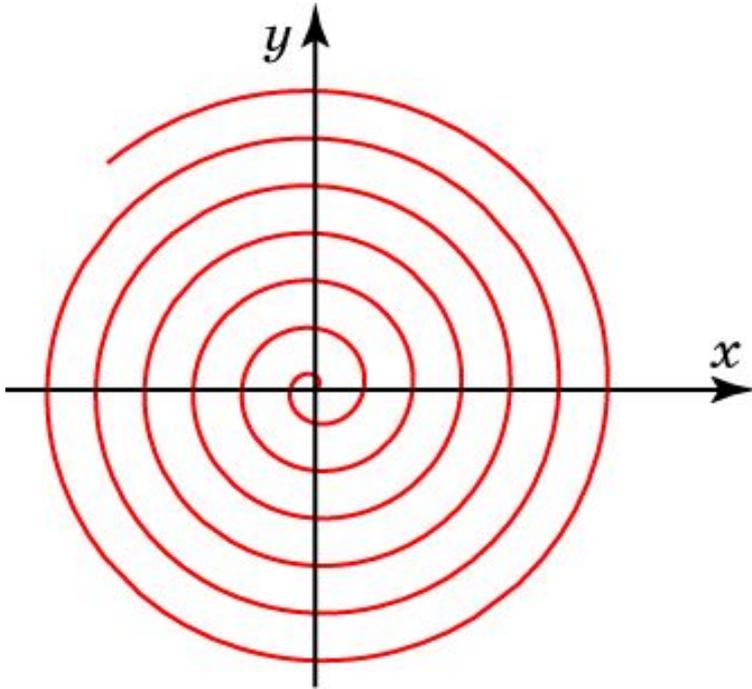
Окружность радиуса R с центром в точке O задается уравнением $r = R$.



Действительно, окружность является геометрическим местом точек, удаленных от точки O на расстояние R . Все такие точки удовлетворяют равенству $r = R$. При этом, если угол увеличивается, то соответствующая точка на окружности движется в направлении против часовой стрелки, описывая круги. Если же угол уменьшается, то соответствующая точка описывает круги в направлении по часовой стрелке.

Спираль Архимеда

Спираль Архимеда - кривая, задаваемая уравнением $r = a\phi$, где a - некоторое фиксированное число, угол ϕ задается в радианах.



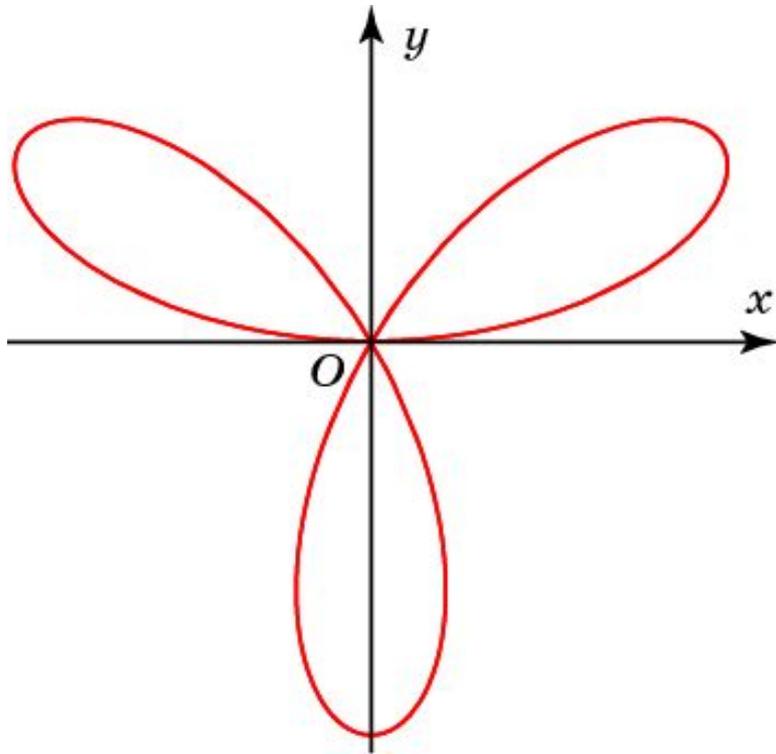
Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками, каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол увеличивается на 2π , т.е. точка делает один, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками.

Трилистник

Трилистник – кривая, задаваемая уравнением $r = \sin 3\phi$.

Для построения этой кривой сначала заметим, что, поскольку радиус неотрицателен, должно выполняться неравенство $\sin 3\phi \geq 0$, решая которое находим область допустимых значений углов :

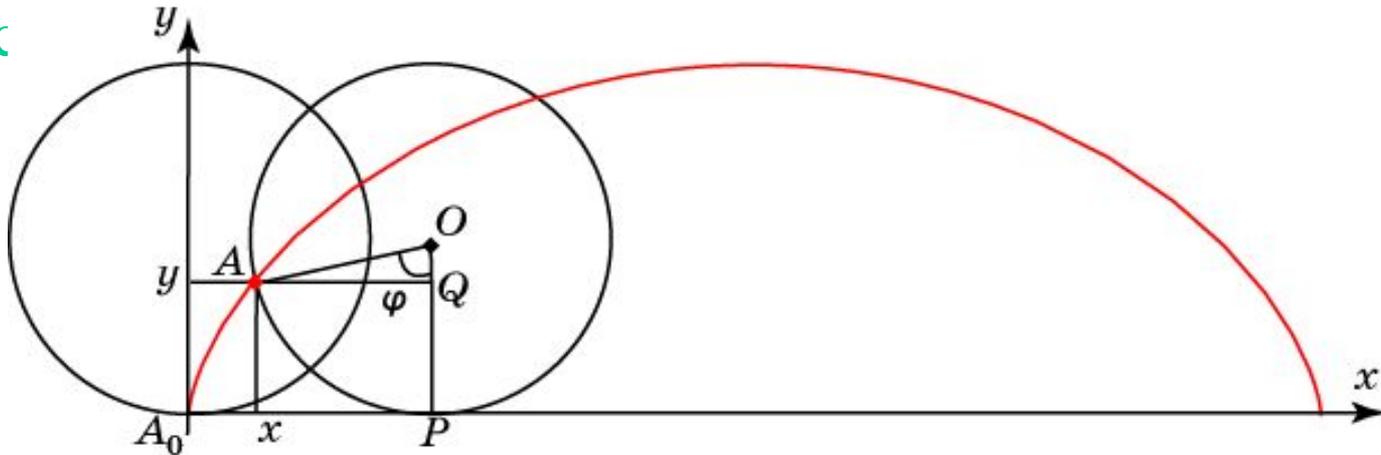
$$0^\circ \leq \phi \leq 60^\circ; 120^\circ \leq \phi \leq 180^\circ; 240^\circ \leq \phi \leq 300^\circ.$$



Если угол ϕ изменяется от нуля до 30° , то радиус r изменяется от нуля до единицы. Если угол ϕ изменяется от 30° до 60° , то радиус изменяется от единицы до нуля. Таким образом, при изменении угла от 0° до 60° точка описывает кривую, похожую на очертания лепестка. Такие же лепестки получаются когда угол изменяется в пределах от 120° до 180° и от 240° до 300° .

Циклоида

Циклоида - кривая, которую описывает точка, закрепленная на окружности



Найдем уравнения циклоиды. Предположим, что окружность радиуса R катится по оси Ox , и в начальный момент времени закрепленная точка A_0 находилась в начале координат. Если окружность повернется на угол ϕ , то закрепленная точка переместится в положение A . Поскольку дуга AP прокатилась по отрезку A_0P , то их длины равны, т.е. $AP = A_0P = R$. Для координат x , y точки A имеем:

$$x = AP - AQ = R - R \sin \phi = R(\phi - \sin \phi),$$

$$y = OP - OQ = R - R \cos \phi = R(1 - \cos \phi).$$

Упражнение 1

Для следующих точек с заданными полярными координатами найдите их декартовы координаты:

а) $(1, \frac{\pi}{3})$; б) $(2, -\frac{\pi}{4})$.

Ответ: а) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; б) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Упражнение 2

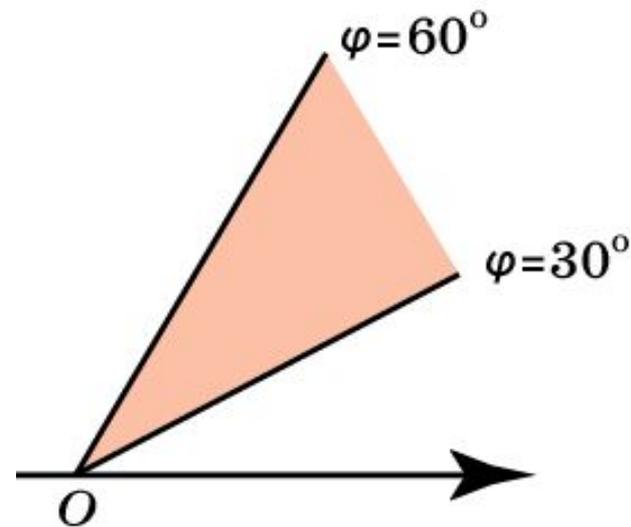
Для следующих точек с заданными декартовыми координатами найдите их полярные координаты: а) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; б) $(-10, 0)$; в) $(1, -\sqrt{3})$; г) $(-\sqrt{3}, 1)$.

Ответ: а) $(2, \frac{\pi}{4})$; б) $(10, \pi)$; в) $(2, -\frac{\pi}{3})$; г) $(2, \frac{5\pi}{6})$.

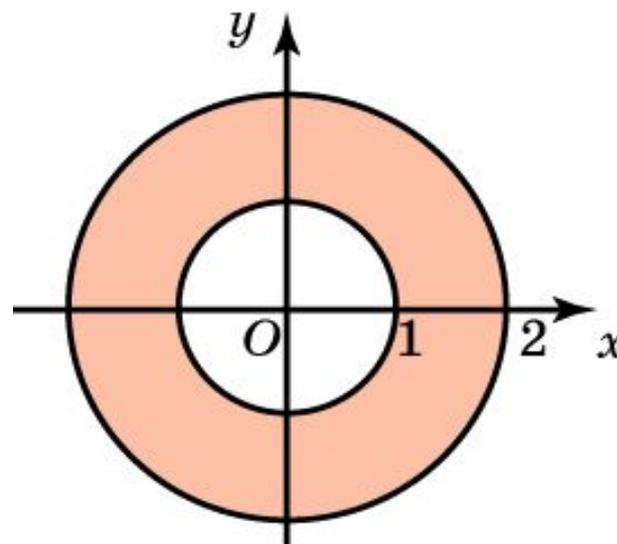
Упражнение 3

Нарисуйте геометрическое место точек на плоскости, полярные координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $30^\circ < \phi < 60^\circ$; б) $1 < r < 2$; в) $30^\circ < \phi < 60^\circ, 1 < r < 2$.

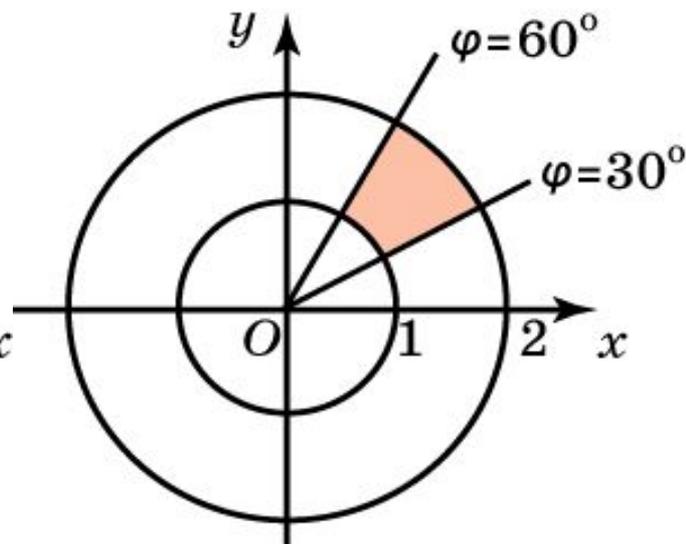
Ответ: а)



б)



в)

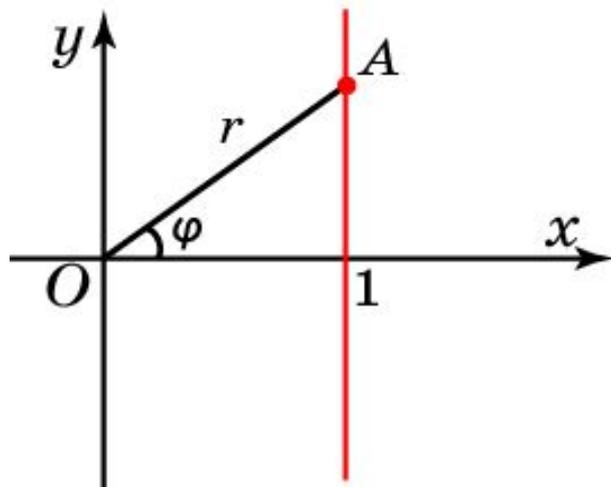


Упражнение 4

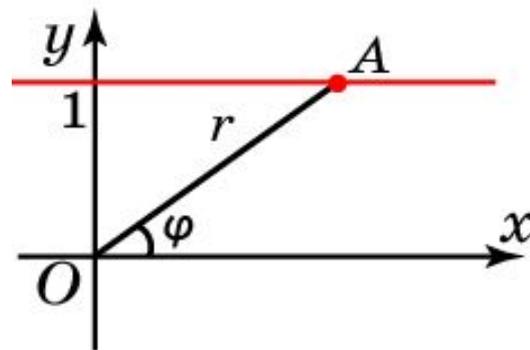
Найдите геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению:

а) $r = \frac{1}{\cos \varphi}$; б) $r = \frac{1}{\sin \varphi}$.

Ответ: а)



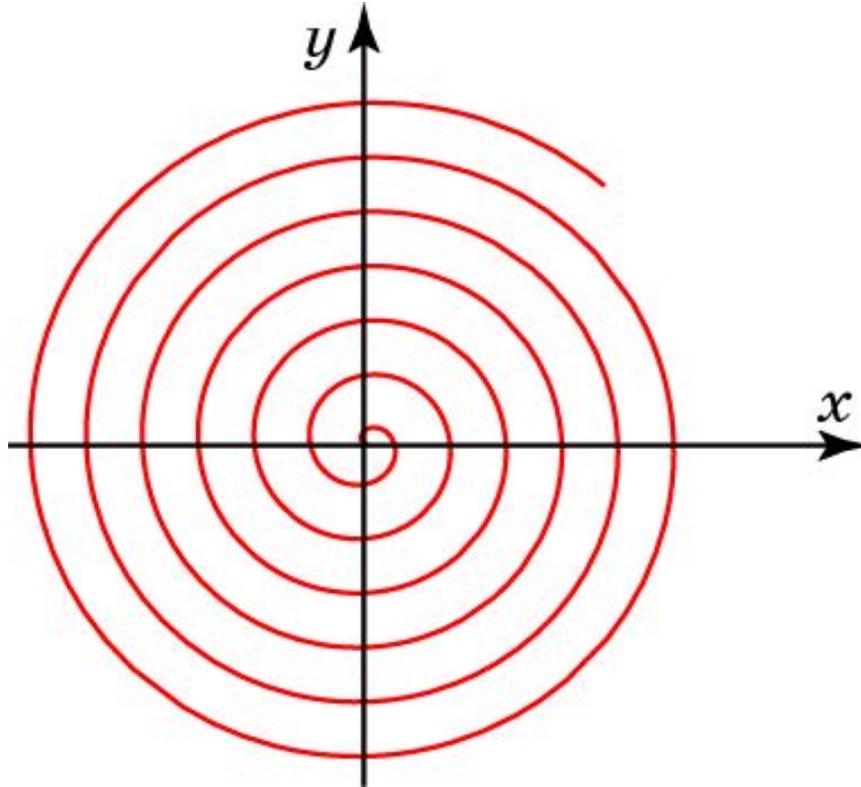
б)



Упражнение 5

Нарисуйте спираль Архимеда, заданную уравнением $r = -\phi$.

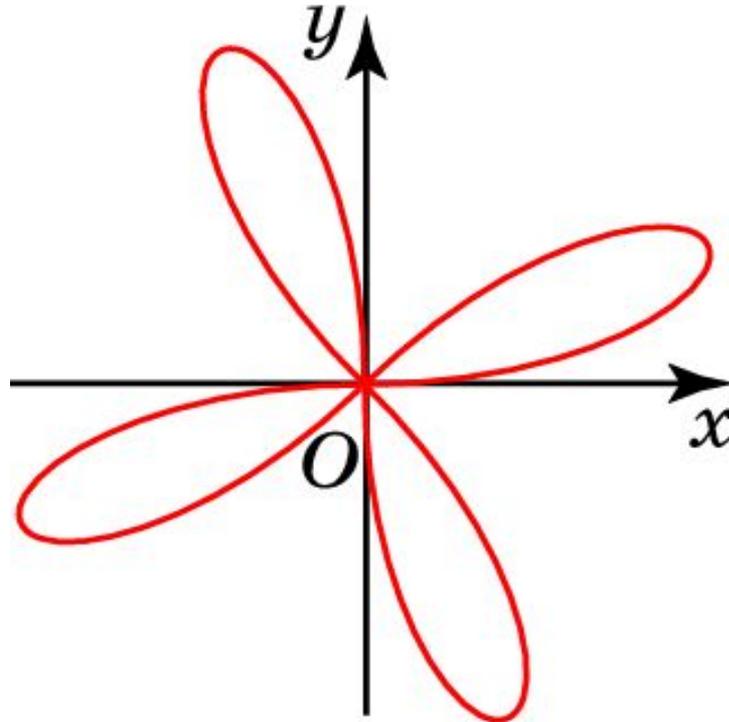
Ответ:



Упражнение 6

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin 4\phi .$$

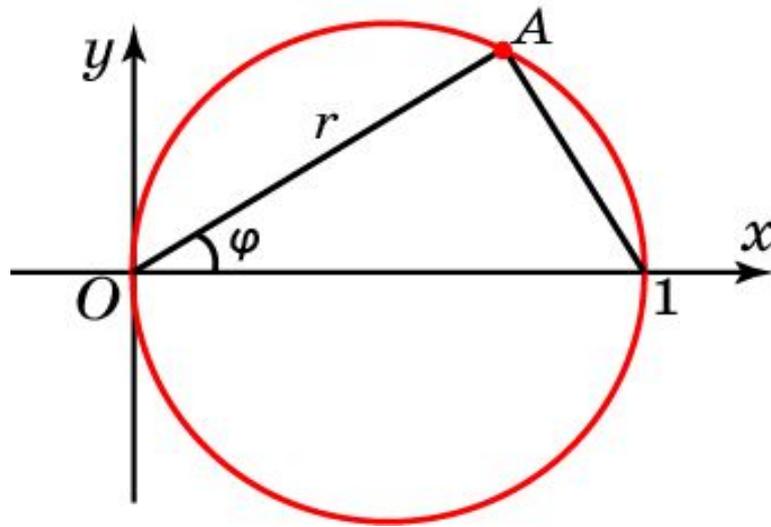


Ответ:

Упражнение 7

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением
 $r = \cos \phi$.

Ответ:

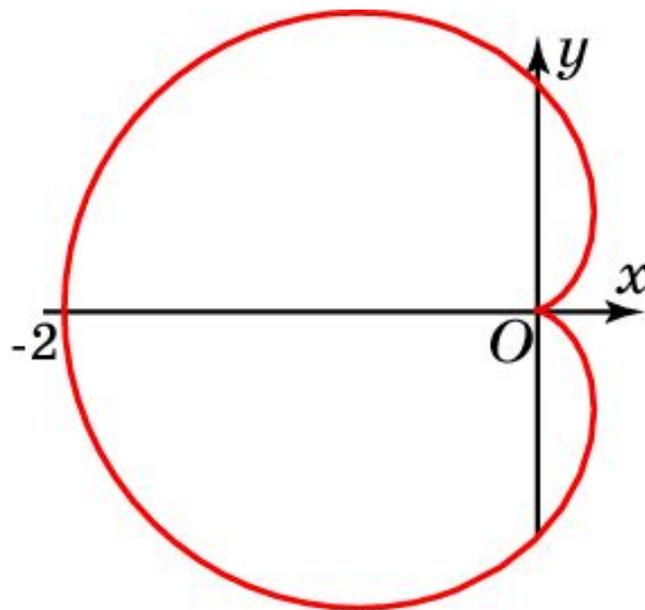


Упражнение 8

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = 1 - \cos \phi.$$

Ответ: Кардиоида.

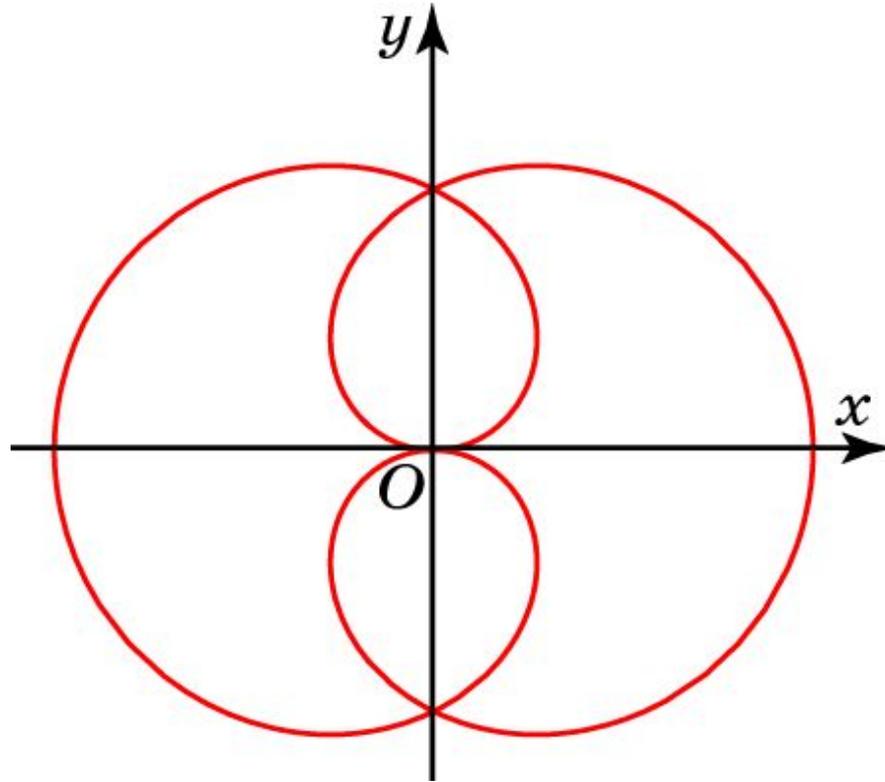


Упражнение 9

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Ответ:

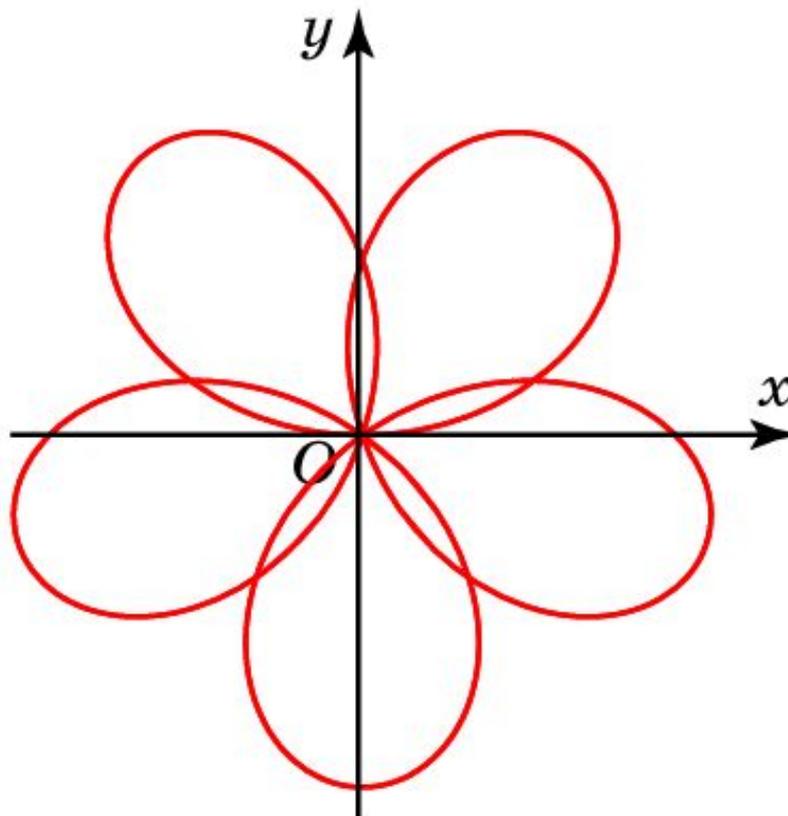


Упражнение 10

Нарисуйте кривую, задаваемую уравнением

$$r = \sin \frac{5\varphi}{3}.$$

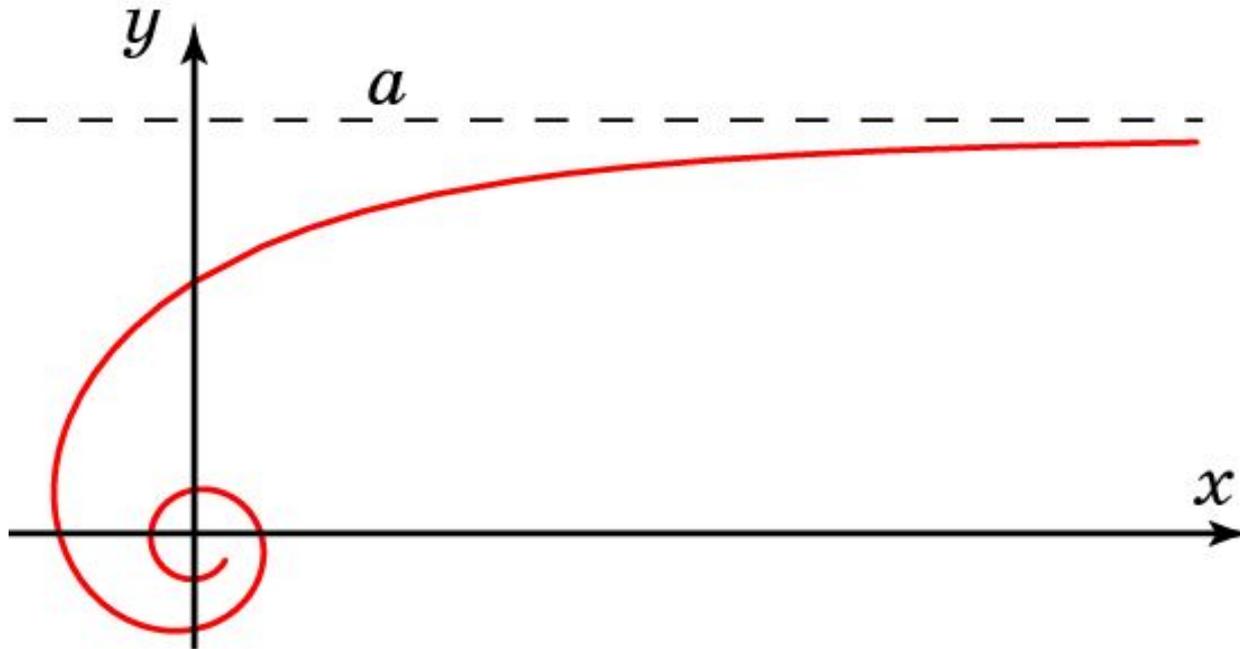
Ответ:



Упражнение 11

Нарисуйте гиперболическую спираль – кривую, задаваемую уравнением $r = a/\phi$.

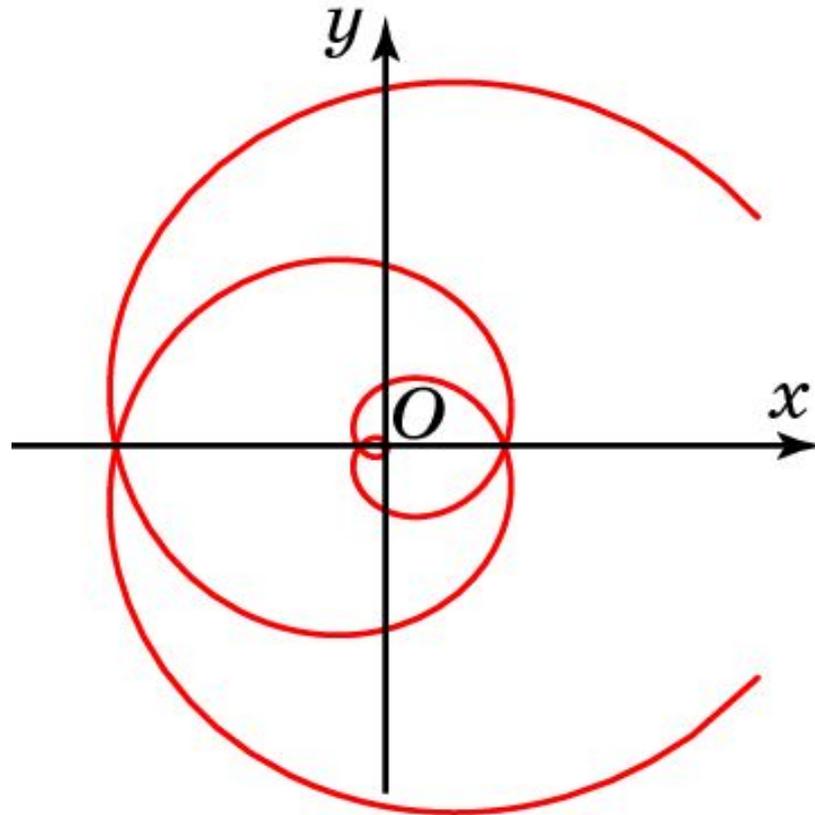
Ответ:



Упражнение 12

Нарисуйте спираль Галилея – кривую, задаваемую уравнением $r = a\phi^2$.

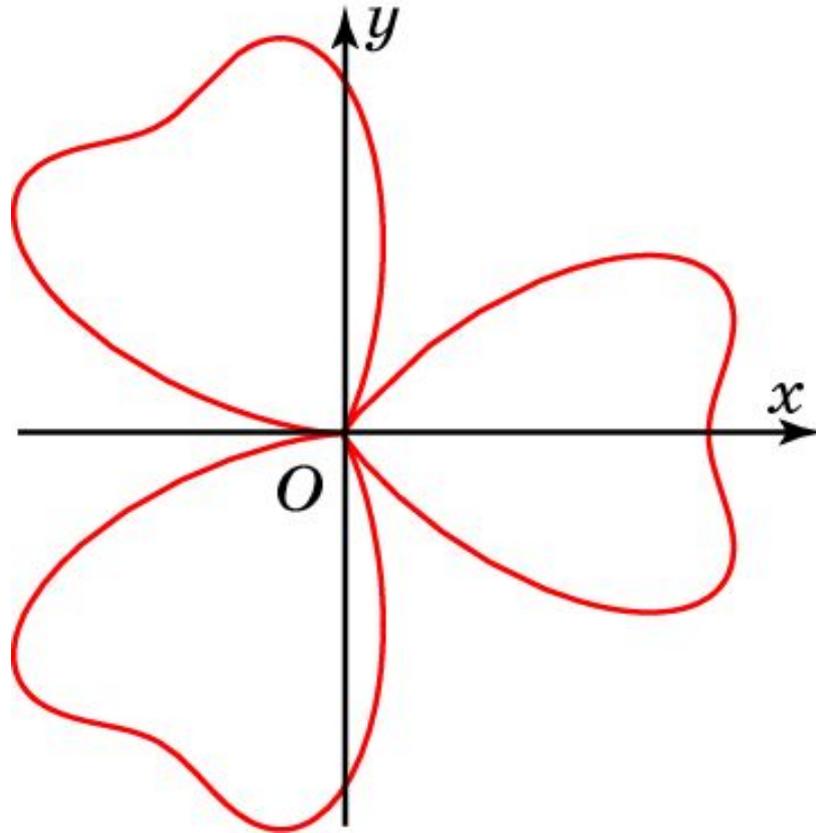
Ответ:



Упражнение 13

Нарисуйте кривую, напоминающую лист клевера и задаваемую уравнением $r = 1 + \cos 3\phi + \sin^2 3\phi$.

Ответ:



Упражнение 14

Человек идет с постоянной скоростью вдоль радиуса вращающейся карусели. Какой будет его траектория относительно земли?

Ответ: Спираль Архимеда.