Сегодня: *

Лекция 10

Тема: ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Содержание лекции:

1. Упругие напряжения и деформации. Закон Гука.
2. Общие свойства жидкостей и газов.
3. Поток вектора скорости. Уравнение непрерывности.
4. Циркуляция векторного поля. Ротор вектора. Уравнения движения и равновесия жидкости.
5. Уравнение движения и равновесия жидкости.
6. Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли.
7. Стационарное течение вязкой жидкости.

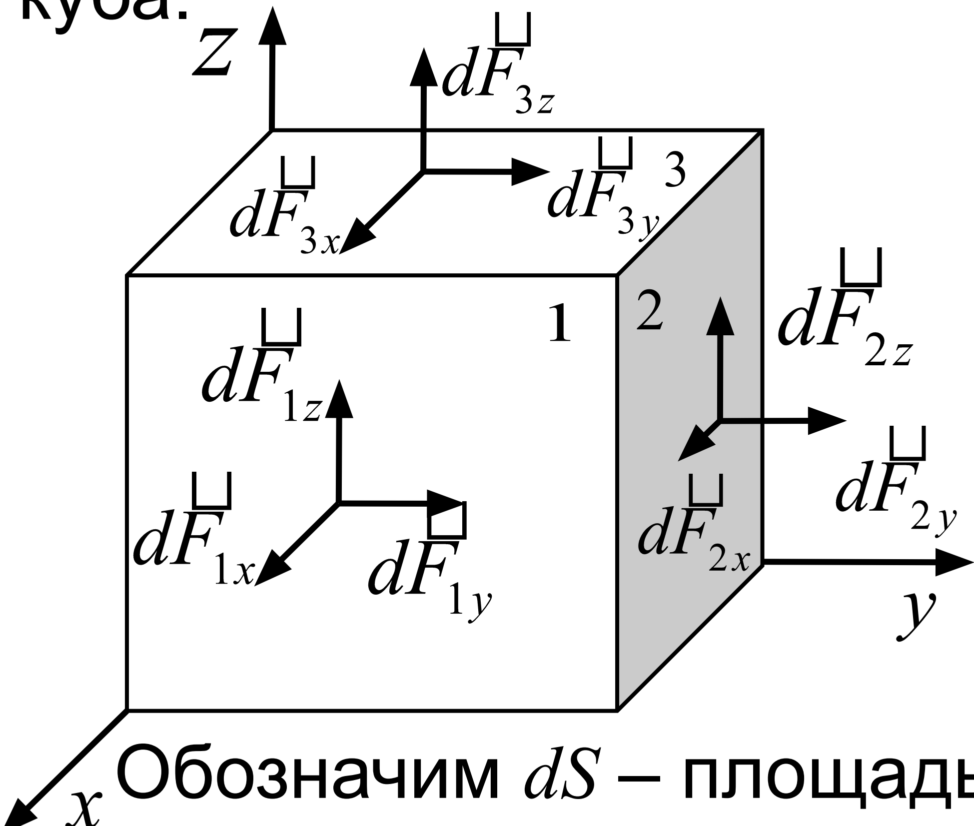
1. Упругие напряжения и деформации. Закон Гука

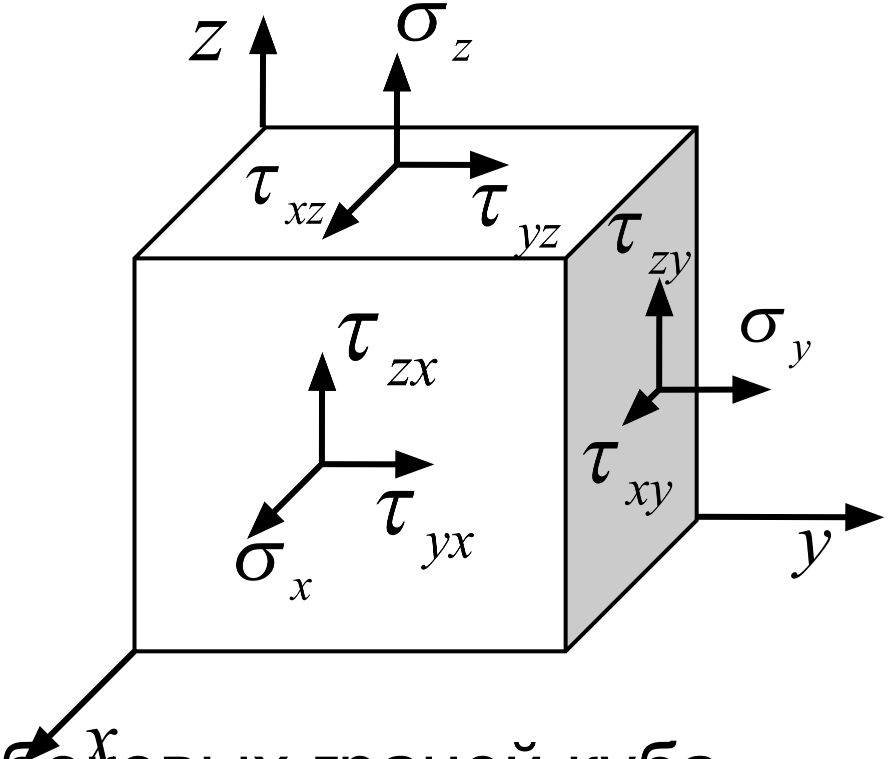
Идеально (абсолютно) упругим телом называется такое тело, которое обладает свойством восстанавливать свои размеры и форму после того, как деформирующие его силы прекращают свое воздействие.

Рассматриваем не сам процесс деформирования, а конечный результат, после установления равновесия в деформируемом теле.

Рассмотрим некоторое тело, деформированное внешними силами. Внешние силы вызывают смещения частиц тела по сравнению с исходным состоянием. В результате в теле возникают внутренние силы, т.е. тело переходит в напряженное состояние.

Выделим бесконечно малый объем вещества в виде куба.





Обозначим dS – площадь боковых граней куба.

В равновесии силы, действующие на каждую грань:

- Должны быть равны по величине и противоположны по направлению;
- Полный момент всех сил, действующих на куб, равен нулю.

$$\sigma_x = \frac{dF_{1x}}{dS}, \qquad \tau_{xy} = \frac{dF_{2x}}{dS}, \qquad \tau_{xz} = \frac{dF_{3x}}{dS},$$

$$\tau_{yx} = \frac{dF_{1y}}{dS}, \qquad \sigma_y = \frac{dF_{2y}}{dS}, \qquad \tau_{yz} = \frac{dF_{3y}}{dS},$$

$$\tau_{zx} = \frac{dF_{1z}}{dS}, \qquad \tau_{zy} = \frac{dF_{2z}}{dS}, \qquad \sigma_z = \frac{dF_{3z}}{dS}.$$

Эти величины называются механическими напряжениями.

Из второго условия равновесия суммарный момент, например, сил dF_{1y} и dF_{2x} равен нулю, если $dF_{1y} = dF_{2x}$, т.е.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Компоненты $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - нормальные напряжения, в зависимости от знака характеризуют растягивающие (сжимающие) усилия.

Напряжения $\tau_{xy}, \tau_{z\bar{y}}, \tau_{xy}$ касательные (сдвиговые) напряжения, действуют в плоскости соответствующих граней.

При внешнем воздействии в общем случае тело изменяет свои размеры и форму, т.е. испытывает деформацию. При всем разнообразии деформаций оказывается возможным любую из них свести к двум.

Элементарными деформациями являются растяжение (сжатие) и сдвиг.

Деформация растяжения (сжатия) –

характеризуют величиной относительного удлинения.

Если выделенный в теле объем до действия сил имел длину l в некотором направлении, а после приложения сил, эта длина изменилась на Δl, то относительное удлинение будет

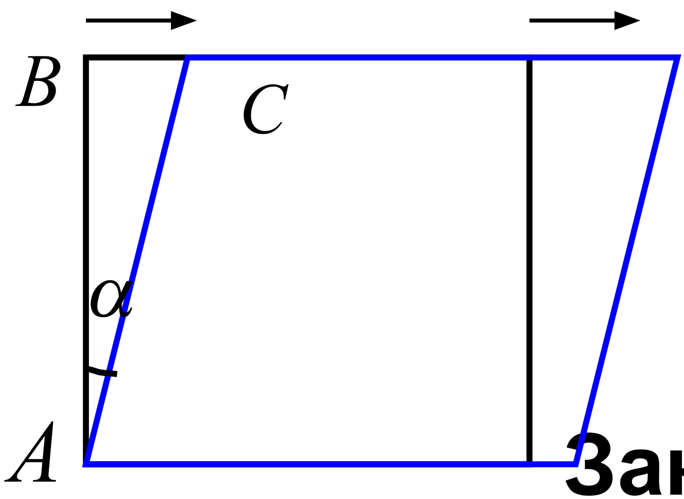
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}}$$

При растяжении $\varepsilon > 0$, *при сжатии* $\varepsilon < 0$.

Как правило $\varepsilon \ll 1$!!!

Деформация сдвига

характеризуется величиной относительного сдвига



$$\boxed{\gamma = \frac{BC}{BA} = tg\alpha \approx \alpha}$$

$$\gamma << 1$$

Закон Гука

Относительное растяжение (сжатие) ε пропорционально растягивающему (сжимающему) напряжению σ.

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

E – модуль Юнга – напряжение, создающее относительное удлинение тела, равное единице.

Растяжение, например, стержня, сопровождается его поперечным сжатием.

$$\boxed{\delta = \frac{\Delta b}{b} = \frac{b' - b}{b}}$$

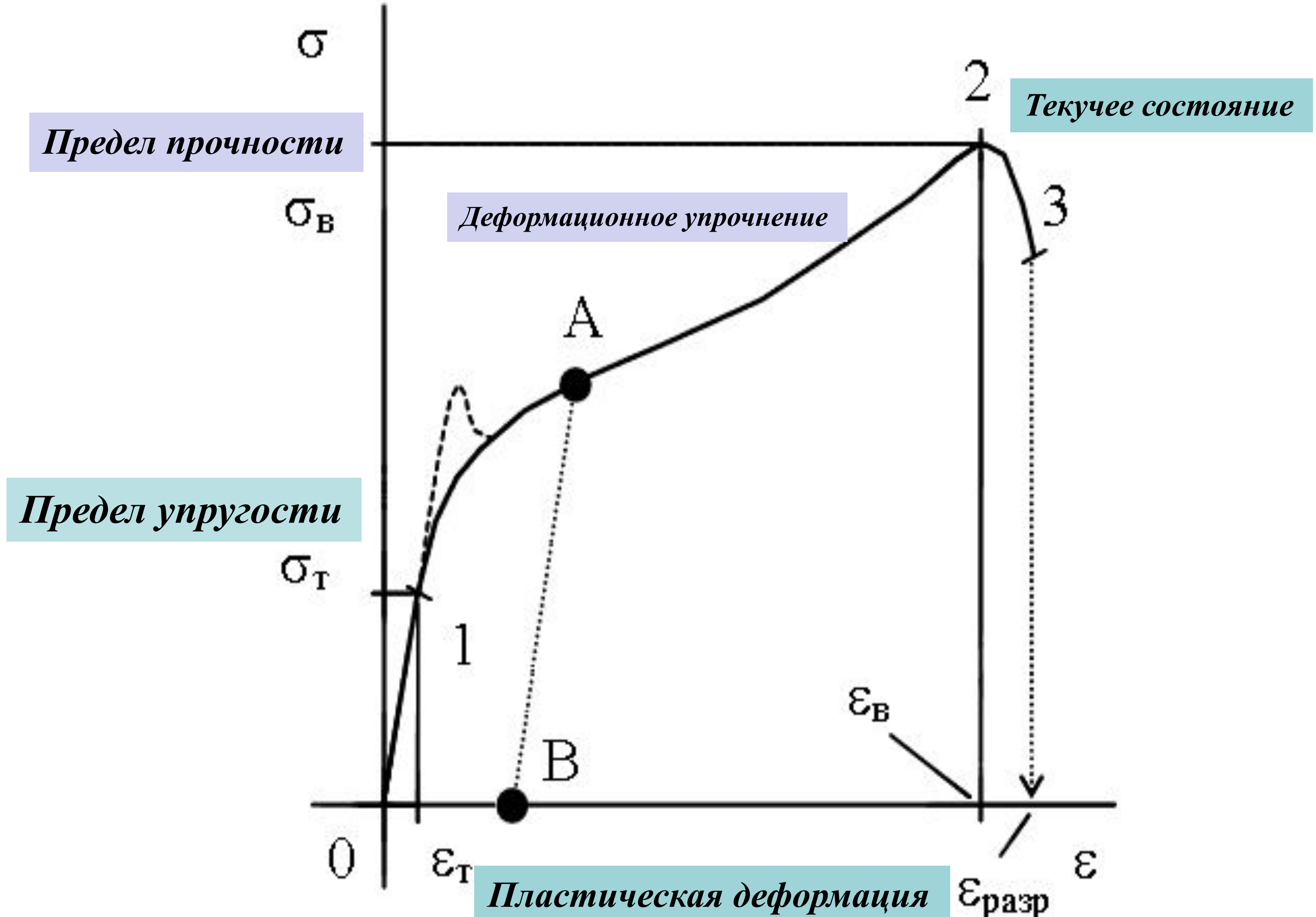
- относительное сжатие.

Относительное сжатие связано с относительным растяжением:

$$\boxed{\delta = -\nu\varepsilon}$$

ν - коэффициент Пуассона.

«-» – отражает тот факт, что продольная и поперечная деформации при одноосном растяжении (сжатии) всегда имеют противоположные знаки.



Зависимость напряжения от относительного удлинения при растяжении образца

2. Общие свойства жидкостей и газов

Агрегатное состояния вещества

1.Твердое

2. Жидкое

3. Газообразное

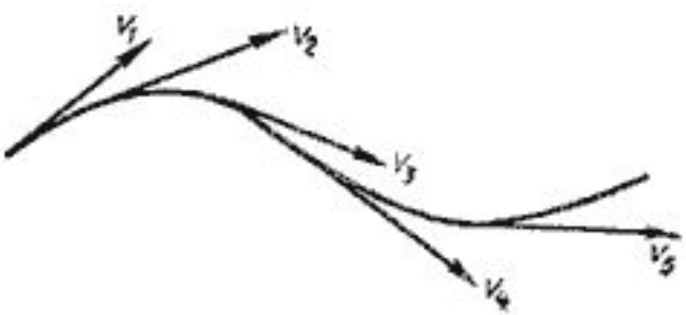
Зависит от соотношения между потенциальной энергией взаимодействия атомов $W_{вз}$, составляющих тело, и их средней кинетической энергией $W_{ср.кин}$.

1. $W_{вз} >> W_{ср.кин}$, твердое состояние.
2. $W_{вз} \sim W_{ср.кин}$, жидкое состояние.
3. $W_{вз} << W_{ср.кин}$, газообразное состояние.

Способы кинематического описания жидкостей

1. **Способ Лагранжа**. Выбирается совокупность «жидких» частиц, движение жидкости описывается как движение таких частиц. Вводится понятие скорости и ускорения частиц (трудно учесть изменение формы «жидкой» частицы при движении).
2. **Способ Эйлера.** Задается векторное поле скоростей движения жидкости, т.е. фиксируем, как ведет себя скорость течения жидкости в точках ее объема с течением времени. Следим за кинематическими характеристиками жидкости в фиксированных точках пространства, не интересуясь тем, какие именно «жидкие» частицы проходят эти точки. Для наглядного представления вводят линии тока.

Линия тока – линия, в каждой точке которой вектор скорости направлен по касательной.



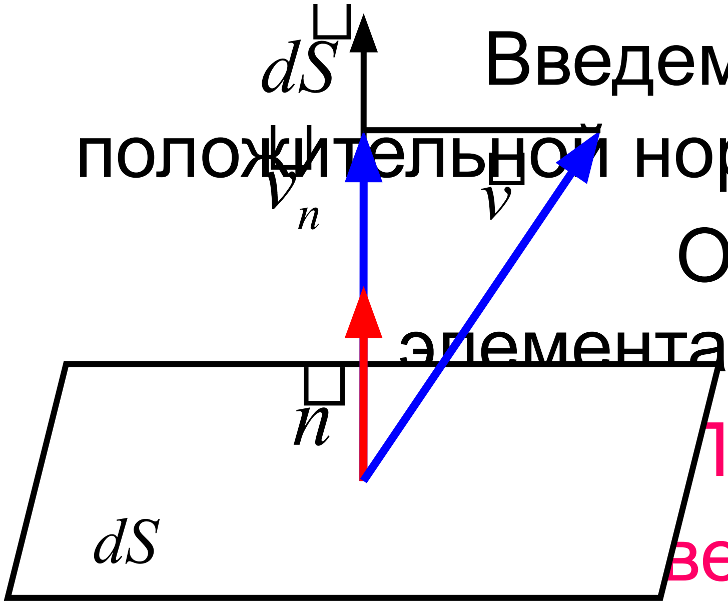
Густота , с которой проведены линии тока, пропорциональна величине скорости течения.

Часть объема жидкости, ограниченная линиями тока, называется ***трубкой тока***.

Жидкость, находящаяся внутри трубки тока, не может покинуть ее пределы, т.к. по определению линий тока вектор скорости течения направлен по касательной к поверхности трубки тока.

3. Поток вектора скорости; уравнение непрерывности

Рассмотрим в поле вектора малый плоский элемент поверхности с площадью dS.



Введем единичный вектор положительной нормали $\vec{n}$.

Образуем вектор площади элемента

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$$

Потоком вектора $\vec{v}$ через поверхность бесконечно малой площади называется величина:

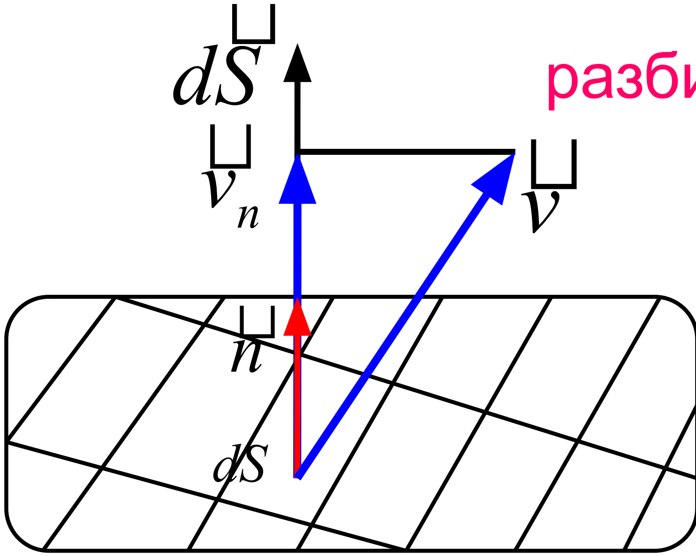
$$d\Phi_v = \left(\vec{v}, d\vec{S}\right) = v_n dS$$

объем dV, который успевает наполнять за 1 с поток жидкости, пронизывающий площадку dS

$$d\Phi_m = \left(\vec{v}\rho, d\vec{S}\right) = \rho v_n dS$$

поток массы

Если поверхность имеет конечные размеры S

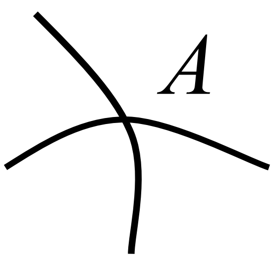


разбить на плоские малые элементы

$$\Phi_v = \int_S \left(\vec v, d\vec S\right) = \int_S v_n dS.$$

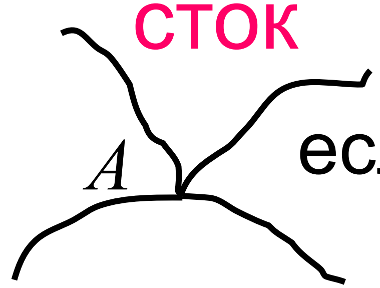
ок вектора $\vec v$ через всю поверхность.

Здесь и далее считается, что нормаль к каждому из элементов поверхности dS направлена из объема наружу (внешняя нормаль).



если $d\Phi_v > 0$

исток



сток

если $d\Phi_v < 0$

при $d\Phi_v = 0$ источников и стоков нет,

или они имеют одинаковую интенсивность.

Рассмотрим в поле вектора $\vec{v}$ малый объем ΔV, окруженный замкнутой поверхностью ΔS. Тогда

$$\Delta \Phi_v = \oint_{\Delta S} \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)$$

будет характеризовать общую интенсивность источников и стоков, находящихся в объеме ΔV.

$$\frac{\oint_{\Delta S} \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)}{\Delta V}$$

характеризует удельную интенсивность источников (стоков).

$$\boxed{\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{\Delta S} \left(\vec{v}, d\vec{S}\right)}{\Delta V} = div\left(\vec{v}\right)}$$

Это локальная удельная характеристика интенсивности источников жидкости в точке А поля $\vec{v}$.

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\limits_{\Delta S} (\vec{v}, d\vec{S})}{\Delta V} = div(\vec{v})$$

Это локальная удельная характеристика интенсивности источников жидкости в точке А поля $\vec{v}$.

Если ***div(v) = 0, в т. А нет источников (стоков).***

Если ***div(v) > 0, т. А является источником.***

Если ***div(v) < 0, т. А является стоком.***

Чем больше *div(v) > 0*, тем выше интенсивность источника.

$$(\nabla, \vec{v}) \equiv div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\nabla - набла$$

Уравнение непрерывности

Выберем в жидкости объем V, ограничим замкнутой поверхностью S. Поток массы через S:

$$\Phi_m = \oint_S \rho v_n dS$$

Масса жидкости, заключенной внутри S, равна

$$m = \int_V \rho dV$$

В отсутствие источников (стоков) жидкости внутри объема масса жидкости, которая вытекает из него, должна быть равна изменению массы объема V в единицу времени, т.е. $-\dfrac{\partial m}{\partial t}$

$$-\frac{\partial m}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho dV\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho dSdt\right)=-\rho dS$$

$$\boxed{\Phi_m=\oint_S \rho v_n dS=-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho dV.}$$

Уравнение непрерывности жидкости в интегральной форме.

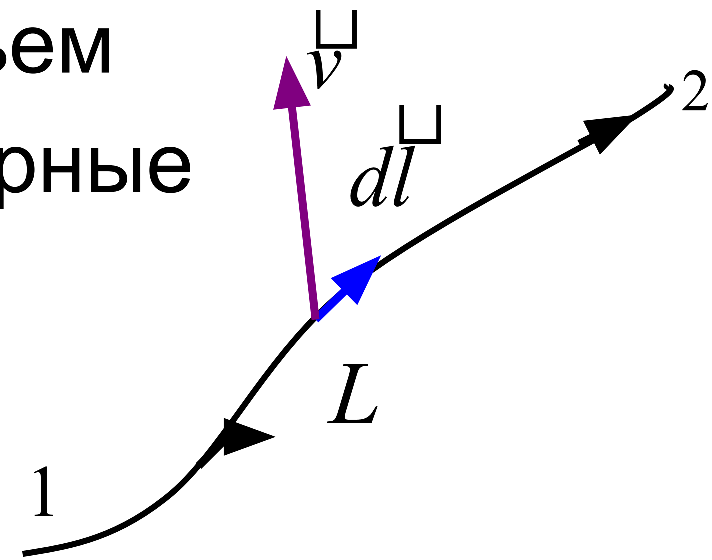
Если течение стационарно, т.е. величины, характеризующие течение жидкости, не зависят явно от времени, то

$$\boxed{\oint_S \rho v_n dS=0}$$

Смысл: **в стационарном потоке сколько жидкости входит в данный объем, столько и выходит из него.**

4. Циркуляция векторного поля. Ротор вектора. Уравнения движения и равновесия жидкости.

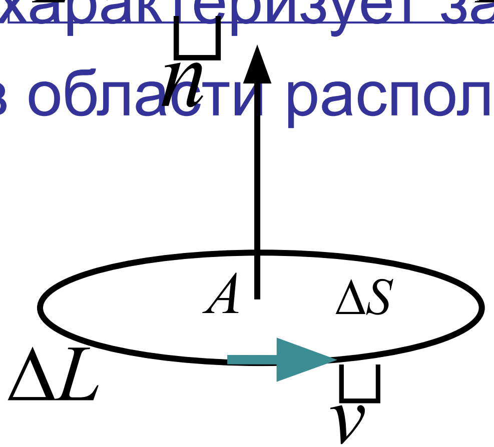
Пусть в поле скоростей $v\ (x, y, z)$ задана некоторая кривая L. Разобьем эту кривую на малые векторные элементы dl, направление которых совпадает с направлением обхода L.



$$\oint_L \left(\vec v, d\vec l\right) = \oint_L v_l\, dl$$

циркуляция вектора скорости вдоль кривой L

(характеризует завихренность поля вектора в области расположения L).



$$\lim_{\Delta S\to 0} \frac{\oint_{\Delta L}\left(\vec v, d\vec l\right)}{\Delta S}\cdot \vec n = rot\,\vec v(x, y, z)$$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\frac{\oint (\vec{v}, d\vec{l})}{\Delta L}}{\Delta S} \cdot \vec{n} = rot\vec{v}(x, y, z)$$

Это локальная характеристика завихренности потока жидкости в окрестности точки А.

$$rot\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = [\nabla, \vec{v}]$$

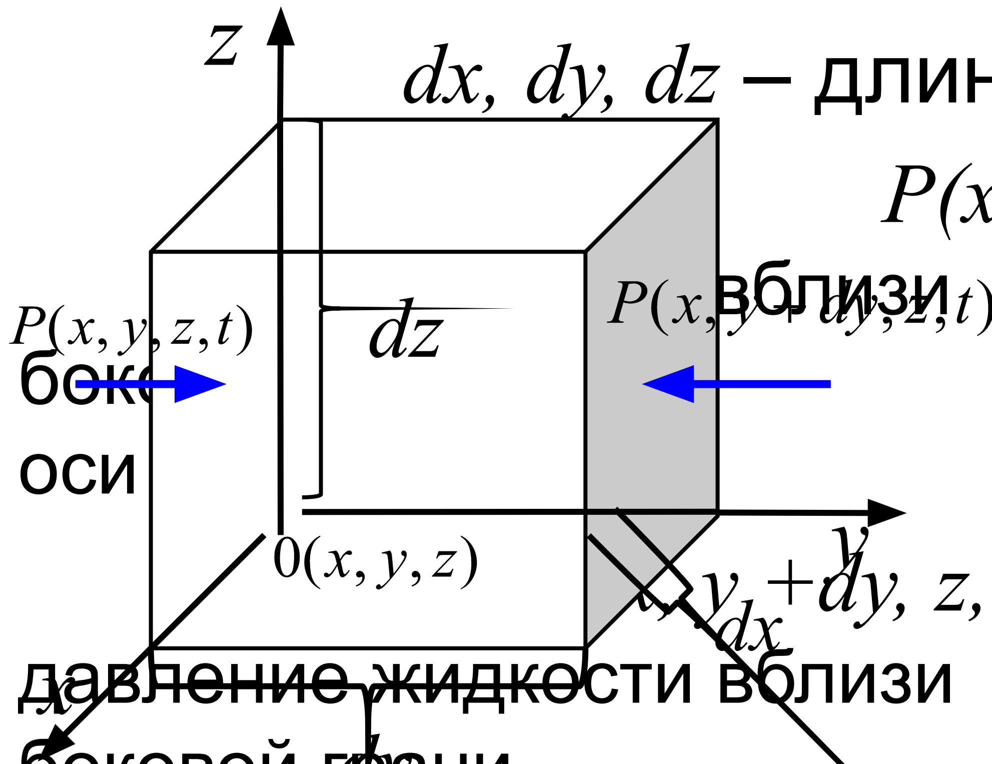
В жидкости отсутствует понятие сдвига. В жидкости могут быть только напряжения всестороннего сжатия, причем

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = P$$

где P – давление – сила, действующая на некоторую площадку, помещенную в жидкость перпендикулярно силе и отнесенной к единице площади:

$$\boxed{P = \frac{dF}{dS_\perp}}$$

Выберем в жидкости бесконечно малый объем



dx, dy, dz – длины ребер.

$P(x, y, z, t)$ – давление жидкости вблизи левой боковой перпендикулярной оси

$P(x, y+dy, z, t)$ – давление жидкости вблизи правой боковой грани.

Проекция на ось y силы давления жидкости:

$$dF_y = P(x, y, z, t)dxdz - P(x, y+dy, z, t)dxdz =$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}dxdydz = -\frac{\partial P}{\partial y}dV$$

Воспользуемся определением частной производной, т е. проекция силы давления, отнесенная к единице объема:

$$\frac{dF_y}{dV} = f_y = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Аналогично:

$$f_x = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad f_z = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\boxed{f = -gradP = -\nabla P}$$

Сила давления, действующая на элемент жидкости.

Учтем, что жидкость может находиться в гравитационном поле, потенциал которого φ, тогда

$$f_m = -\nabla \varphi$$

- сила, действующая со стороны этого поля на единицу массы.

$$f_T = -\rho \nabla \varphi$$

-сила, отнесенная к единице объема.

Идеальная жидкость – жидкость, вязкостью которой можно пренебречь.

Запишем второй закон Ньютона

$$dm\vec{a} = dm\frac{d\vec{v}(x,y,z,t)}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_m = -\nabla P dV - dm\nabla\varphi$$

$$dm = \rho dV$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}$$

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$\nabla - набла$

Уравнение движения идеальной жидкости в гравитационном поле

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla P - \rho\nabla\varphi$$

В равновесии справедлив **закон Паскаля: давление, оказываемое на жидкость, передается ею по всем направлениям одинаковым образом**.

$$\boxed{\nabla P + \rho\nabla\varphi = 0}$$

Частный случай: несжимаемая жидкость.

Жидкость находится в однородном поле тяготения.

Выберем положительное направление оси z вертикально верх. Тогда потенциал будет

$$\varphi = gz + const,$$

где g – ускорение свободного падения. Подставим в уравнение равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g.$$

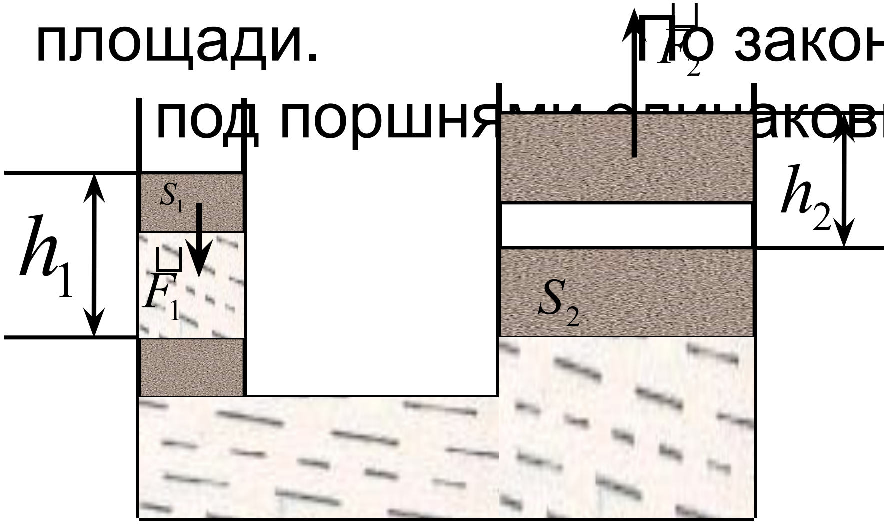
$$\boxed{P = -\rho g z + const.}$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho g(h - z)}$$

линейное увеличение гидростатического давления

с увеличением глубины

Одно из проявлений закона Паскаля можно наблюдать в гидравлическом прессе: два сообщающихся сосуда заполнены жидкостью и закрыты поршнями различной площади. По закону Паскаля, давления под поршнями одинаковы:



$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad или \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

Таким образом, сила давления второго поршня больше силы давления первого во столько раз, во сколько площадь больше первого.

Гидравлический пресс – простой механизм, позволяющий развить колоссальные силы, используемые для прессования различных изделий из металлов и пластмасс.

Обозначим h_1, h_2 - ходы поршней.

Вследствие несжимаемости объемы жидкости, перешедшего из одного цилиндра в другой, одинаковы: $S_1 h_1 = S_2 h_2$

Работы, совершаемые силами за один ход

$$A_1 = S_1 h_1 \text{ и } A_2 = S_2 h_2.$$

Их отношение

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{F_1 h_1}{F_2 h_2} = \frac{S_1 h_1}{S_2 h_2} = 1$$

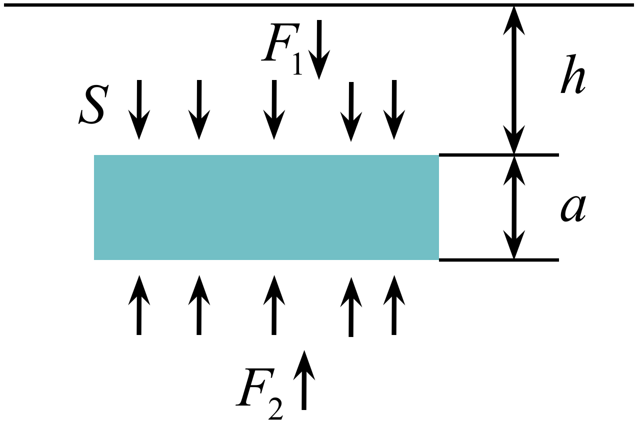
Как и следовало ожидать,

пресс дает выигрыш в силе, но не в совершаемой работе.

Согласно формуле $$P = P_0 + \rho g(h - z)$$

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние. Поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила – сила Архимеда.

Погрузим в жидкость на глубину h параллелепипед с площадью основания S и высотой ребра a.



Давление на глубине h равно

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

Поэтому на верхнее основание действует сила

$$F_{\downarrow} = p(h)S = S(p_0 + \rho g h).$$

На глубине $h + a$ давление равно

$$p(h+a) = p_0 + \rho g(h+a)$$

Поэтому на нижнее основание действует сила

$$F_{\uparrow} = p(h+a)S = S(p_0 + \rho g h + \rho g a).$$

Равнодействующая этих двух сил направлена вверх и равна по величине

$$F_A = F_{\uparrow} - F_{\downarrow} = \rho S a g = \rho V g = m g.$$

Здесь $Sa = V$ - объем погруженной части тела,

$\rho V = m$ - масса жидкости (газа) того же объема.

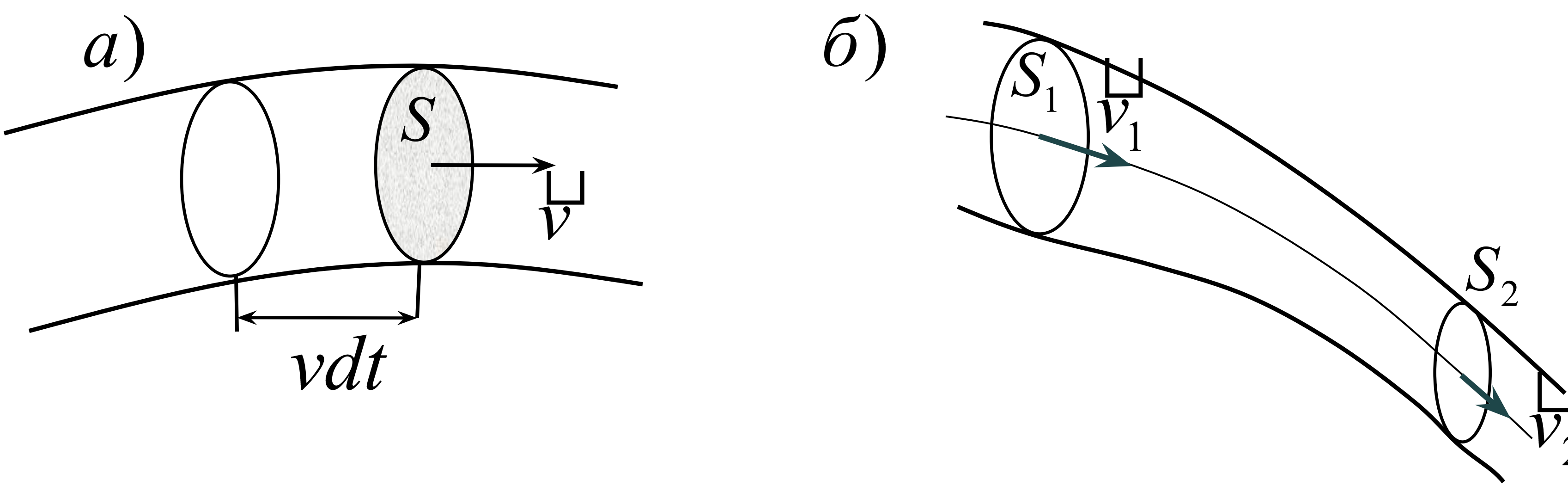
Закон Архимеда: на тело погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая сила, равна весу вытесненной телом жидкости (газа).

6. Стационарное движение идеальной жидкости. Уравнение Бернулли

Стационарное течение жидкости - это такое течение, при котором скорость жидкости в каждой данной точке остается постоянной как по величине, так и по направлению.

Для стационарного течения форма и расположение линий тока со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. За время dt через произвольное сечение S ходит объем жидкости $Svdt$. Выберем два ее сечения S_1 и S_2.



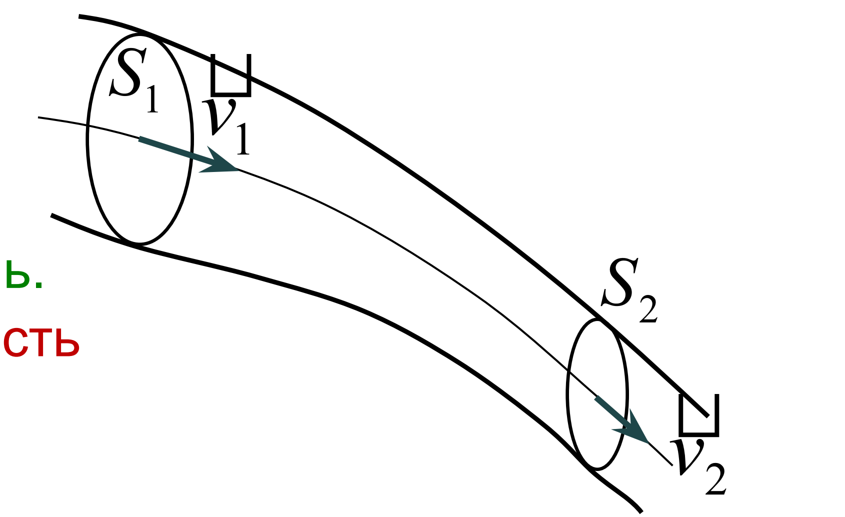
За время dt через сечение S_1 пройдет объем жидкости $V_1 = S_1 v_1 dt$. Аналогично, через сечение S_2 за то же время dt пройдет объем $V_2 = S_2 v_2 dt$.

Из условия несжимаемости жидкости следует равенство объемов, вошедших в область между сечениями S_1 и S_2 и вышедших из нее:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Следовательно, для несжимаемой жидкости величина Sv в любом сечении одной и той же трубки тока одинакова: $Sv = const$. – теорема о непрерывности струи.

б)



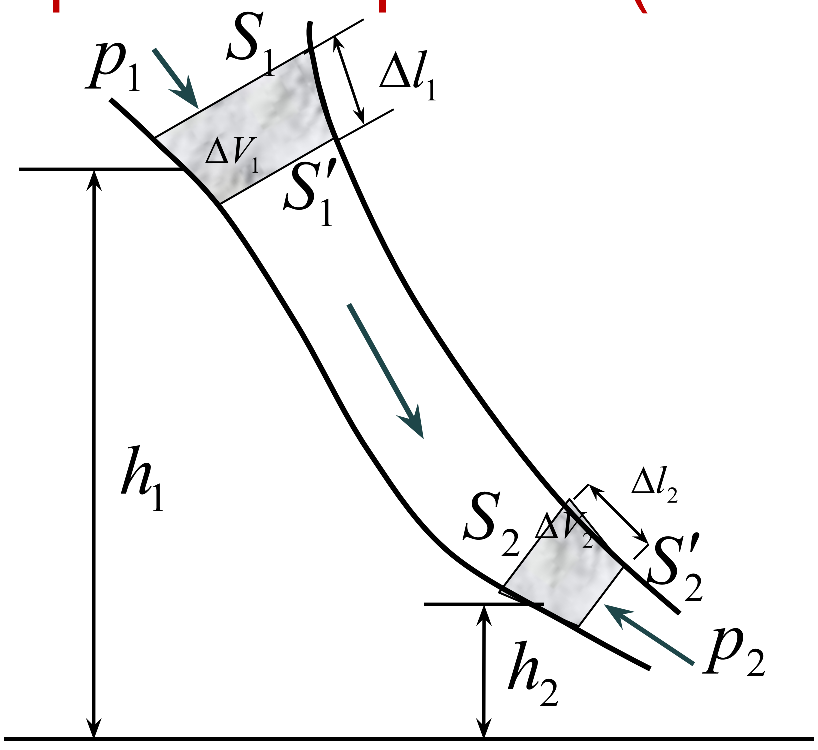
Примечание: Теорема применима к реальным жидкостям и газам, если их сжимаемостью можно пренебречь.

Следствие: в месте сужения трубы скорость потока возрастает.

При течении жидкости ее отдельные слои текут с разными скоростями, скользят друг относительно друга, вследствие чего между ними возникают силы трения. Эти силы называют силами внутреннего трения (возникают не только в жидкостях, но и в газах).

Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) полностью отсутствует, называется идеальной.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2, по которой слева направо течет жидкость.



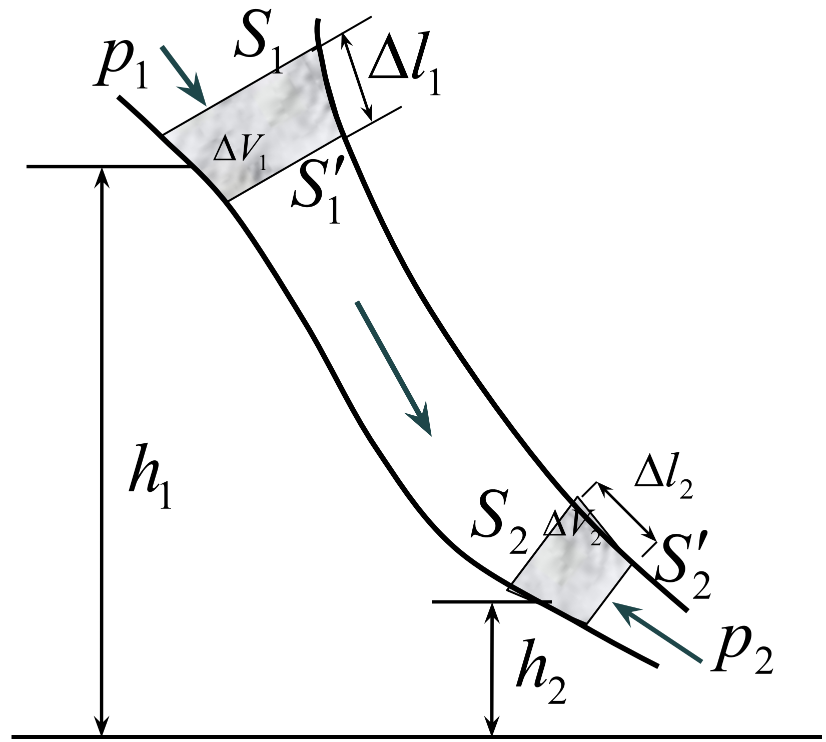
За время Δt объем жидкости переместится вдоль трубки тока. В силу непрерывности струи заштрихованные объемы будут иметь одинаковую величину: $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$.

Энергия каждой частицы жидкости $W_i = W_{iкин} + W_{iпот}$.

Полная энергия потока, протекающего за Δt через сечение S_1

$$W_1 = \left(\frac{\rho \Delta V_1 v_1^2}{2} + \rho \Delta V_1 g h_1 \right) =$$

$$= \Delta V \left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 \right).$$



Аналогично для S_2

$$W_2 = \left(\frac{\rho \Delta V_2 v_2^2}{2} + \rho \Delta V_2 g h_2 \right) =$$

$$= \Delta V \left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \right).$$

Изменение полной механической энергии

$$W_2 - W_1 = \Delta W = A$$

Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц, поэтому работу не совершают. Отлична от нуля только работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2.

$$A = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V$$

$$\Delta W = \Delta V\left(\frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2\right) - \Delta V\left(\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1\right) =$$

$$= A = (p_1 - p_2)\Delta V.$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Сечения S_1 и S_2 были взяты произвольно. Поэтому в стационарно текущей идеальной жидкости в любом сечении трубки выполняется условие:

$$\boxed{\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const.}$$

$p -$ *статическое давление*

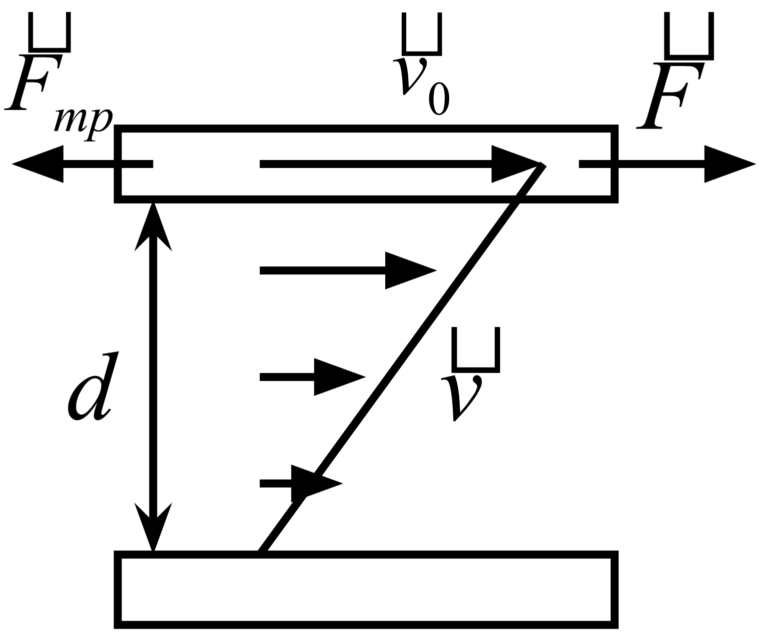
$\rho g h -$ *гидростатическое давление*

$\frac{\rho v^2}{2} -$ *динамическое давление*

Уравнение Бернулли: в установившемся движении идеальной жидкости полное давление, слагающееся из динамического, гидростатического и статического, одинаково для всех поперечных сечений трубки тока.

7. Движение тел в среде с сопротивлением. Стационарное течение вязкой жидкости

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть у нас имеются две большие параллельные пластины, площадью S.



$\vec{v}_0$ – *скорость стационарного движения верхней пластины,*

$\vec{F}$ – *внешняя сила действующая на верхнюю пластину,*

$\vec{F}_{тр}$ – *сила вязкого трения, действующая со стороны жидкости на пластину.*

Через некоторое время после приложения к верхней пластине силы $\vec{F}$ она приобретает постоянную скорость $\vec{v}_0$.

Слои жидкости также станут двигаться, причем величина скорости этих слоев будет линейно возрастать от 0 до ∞ с увеличением расстояния от нижней пластины.

Выводы:

1. Вязкая жидкость «прилипает» к поверхности твердого тела. Скорость жидкости на поверхности тела и скорость тела движущегося в жидкости одинаковы (условие «прилипания»).

2. Так как скорость $\vec{v}_0$ постоянна, то со стороны жидкости на верхнюю пластину действует сила, которая компенсирует внешнюю силу $\vec{F}$. Это и есть сила вязкого трения $\vec{F}_{тр}$. Она действует не только на твердые тела в жидкости, но и между элементами самой жидкости.

Для величины силы вязкого трения в условиях рассматриваемого опыта справедливо равенство

$$\boxed{F_{mp} = \eta\left|\frac{dv}{dz}\right|S}$$

Формула Ньютона

η - коэффициент вязкости – динамическая вязкость

$$[\eta] = 1\ \text{пуаз} = 1\ \text{Н}\cdot\text{с}\cdot\text{м}^{-2}$$

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v},\nabla)\vec{v}\right] = -\nabla P + \eta\Delta v}$$

Уравнение движения вязкой жидкости – уравнение Навье-Стокса

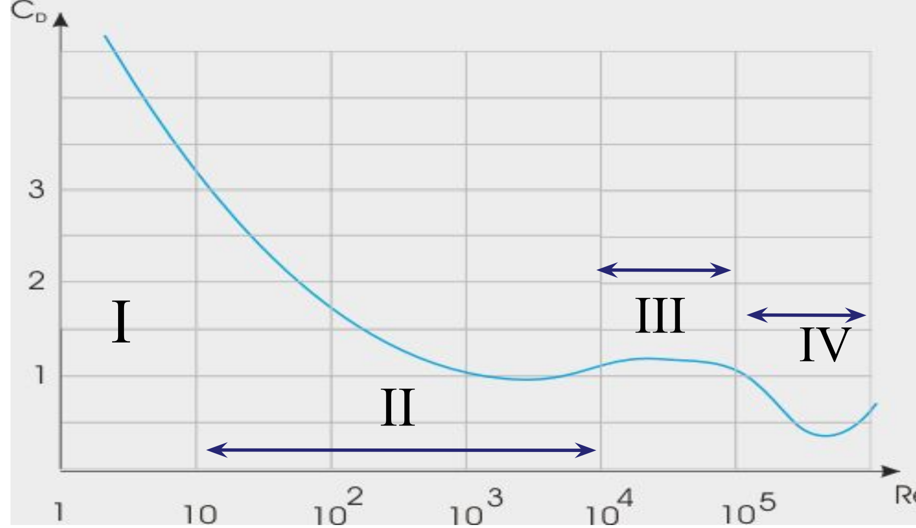
Применяется для описания движения реальных жидкостей и газов

$$\Delta\vec{v} = \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2} - \textit{оператор Лапласа}$$

Вихревая дорожка при обтекании цилиндра

Число Рейнольдса

$$R_e = \frac{\rho R v_\infty}{\eta}$$



.Если число Рейнольдса мало (R_e~1 – 10^{-2}), то течение через некоторое время после начала приобретает характер послойного, т.е. ламинарного, установившегося (стационарного) течения.

.Если увеличим чи ... са до (R_e~10), то первоначальное ... ечение становится неустойчивым. Т.е. ... ежно в процессе течения случайные малые воз ... жидкости со временем возрастают по величине, ... икновению более сложного стационарного течения: о

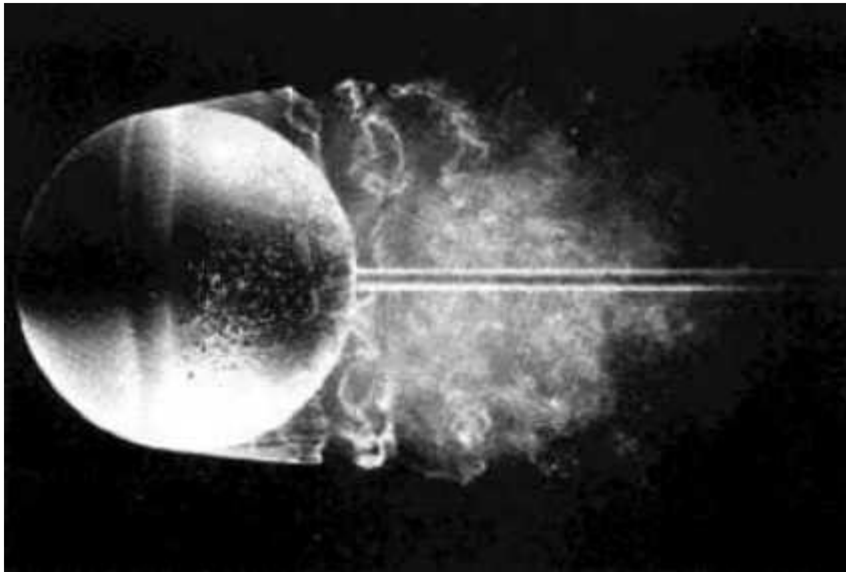
1199.swf

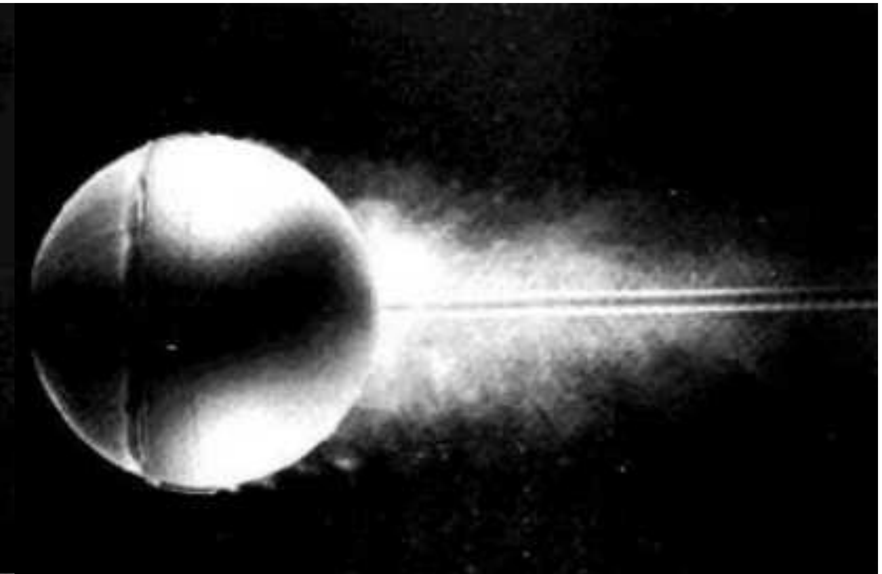
1.swf

3. Если увеличить число Рейнольдса до (R_e~10^2), то характер течения снова меняется за счет нового типа неустойчивости: возникает нестационарное обтекание, при котором вихри отрываются и уносятся по течению.

4. Если увеличить число Рейнольдса до (R_e~10^4-10^5), течение становится полностью неупорядоченным, хаотическим. Такое течение называет турбулентным.

Ламинарное (на переднем плане) и турбулентное течение вокруг субмарины «Лос-Анджелес»





Лекция окончена

Нажмите клавишу <ESC> для выхода