

Специализированный учебно-научный центр
Уральского Государственного Университета им. А.М.Горького

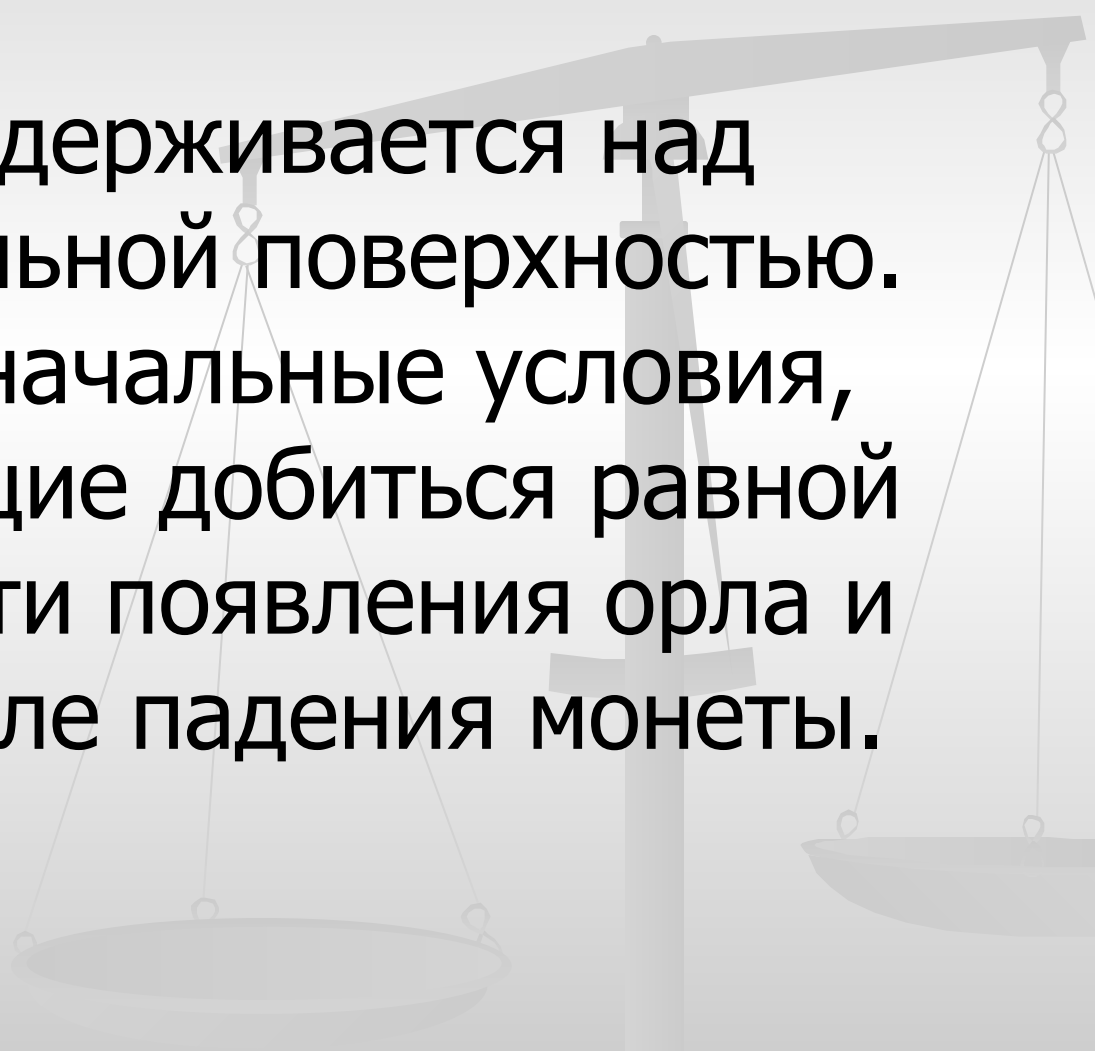
Задача № 5 «Вероятность»

Докладчик: Самунь Виктор



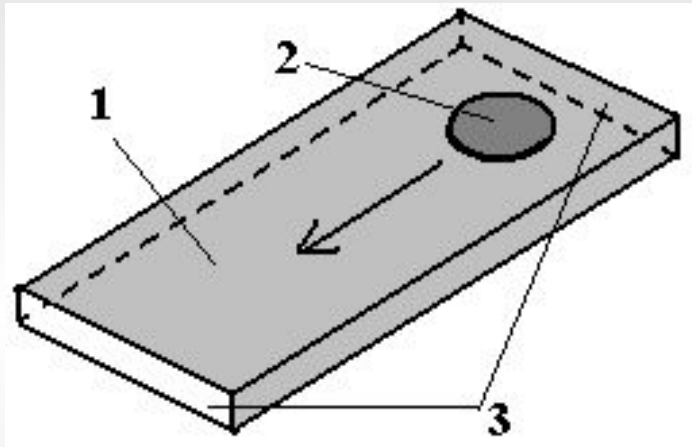
Формулировка задачи

Монета удерживается над горизонтальной поверхностью. Найдите начальные условия, позволяющие добиться равной вероятности появления орла и решки после падения монеты.



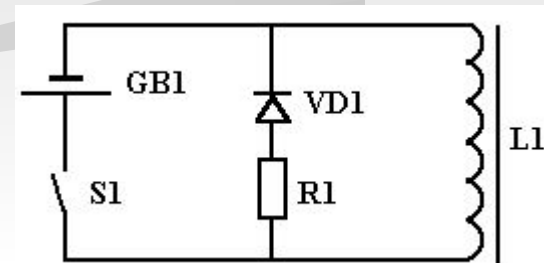
Способы, позволяющие добиться одинаковых начальных условий (угол наклона монеты, высота)

Способ № 1



- 1 – лётка;
- 2 – монета;
- 3 – прорези

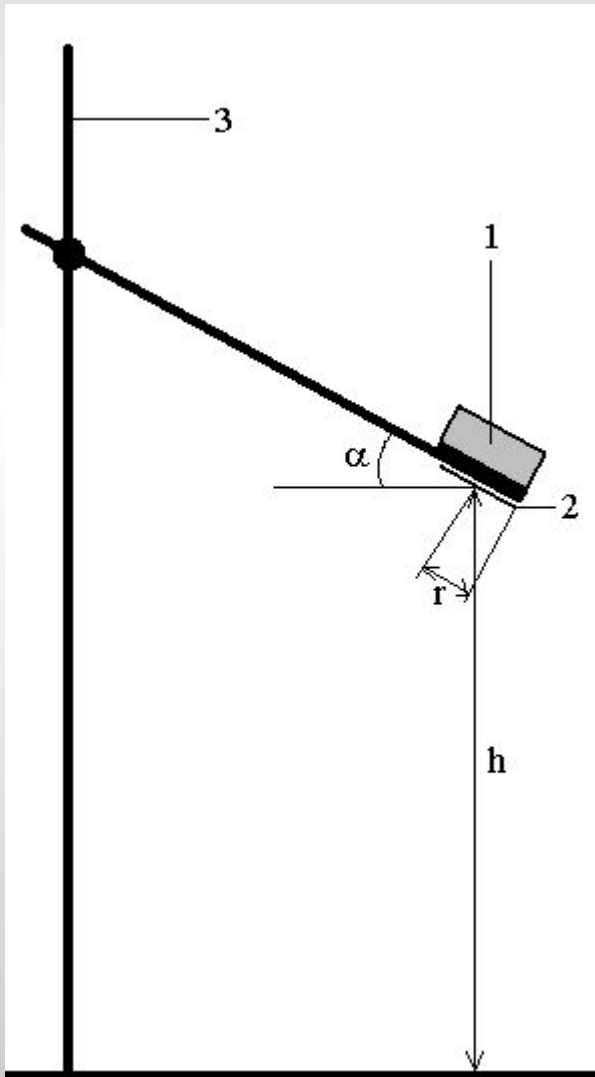
Способ № 2 (электромагнит)



- GB1 – гальванический элемент;
- S1 – выключатель;
- VD1 – светодиод;
- R1 – резистор;
- L1 – катушка с сердечником

Высоту монеты над поверхностью можно поддерживать одинаковой, используя штатив;

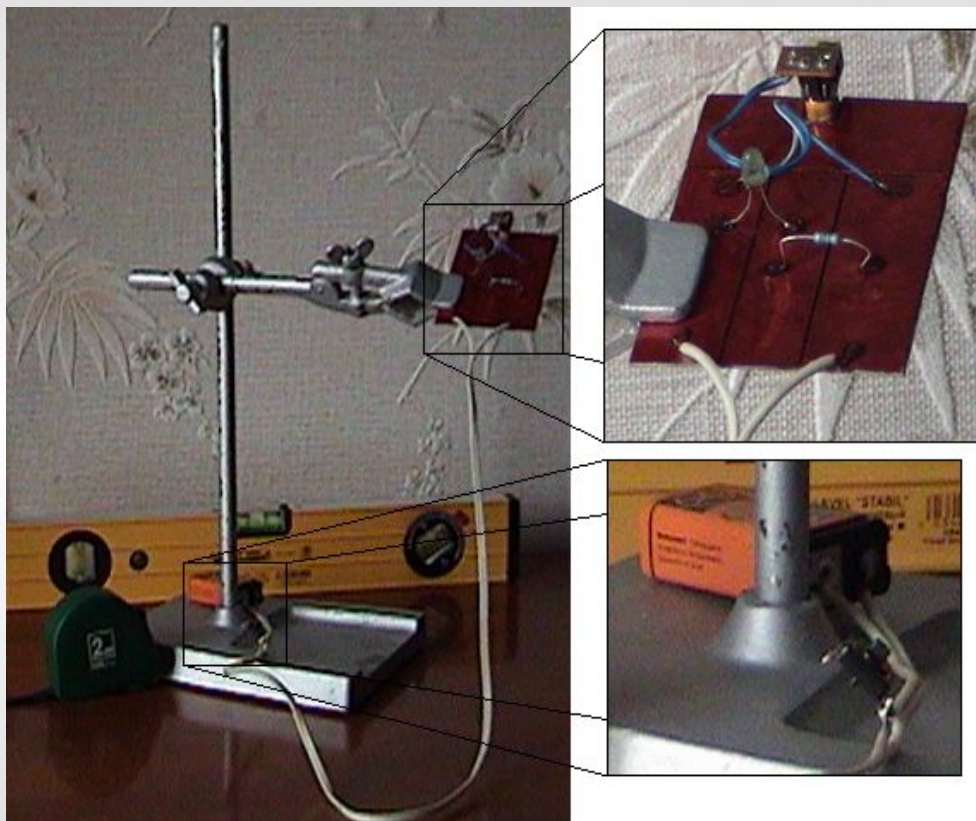
Схема экспериментальной установки:



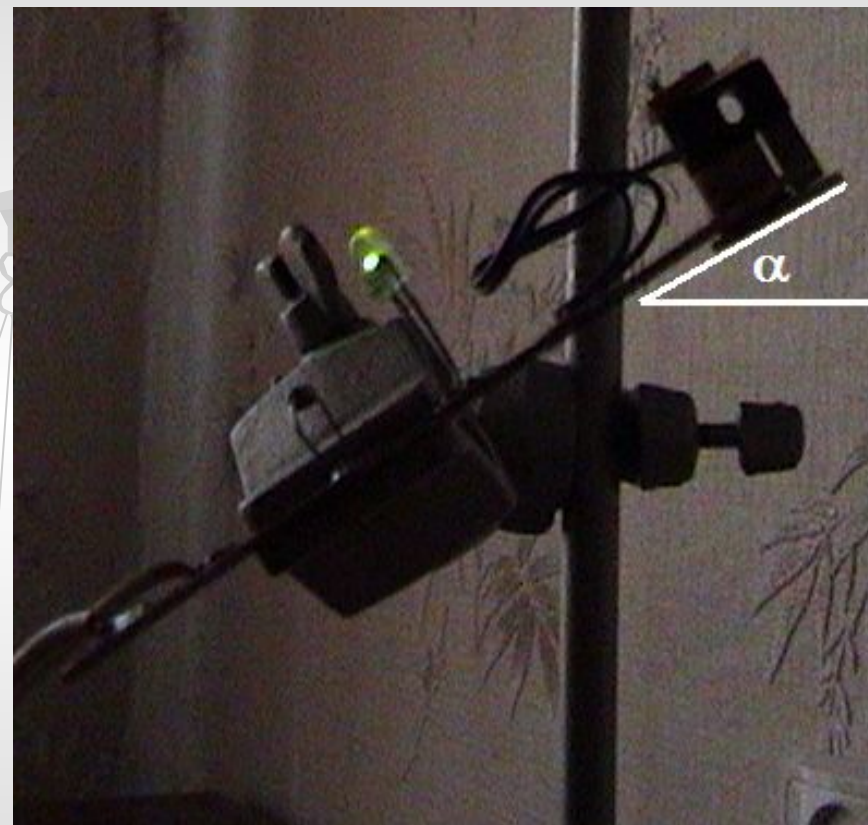
- 1 – электромагнит;
- 2 – монета;
- 3 – штатив с лапкой;

h – высота падения;
 r – радиус монеты;
 α – угол наклона;

Вид рабочей установки



Общий вид



Монета

Параметры монет, используемых в экспериментах

	Масса, г.	Диаметр, мм.	Толщина, мм.	Плотность, г/см ³
Монета № 1	$1,489 \pm 0,001$	$15,5 \pm 0,1$	$1,0 \pm 0,1$	$7,89 \pm 0,01$
Монета № 2	$1,495 \pm 0,001$	$15,9 \pm 0,1$	$1,1 \pm 0,1$	$6,84 \pm 0,01$



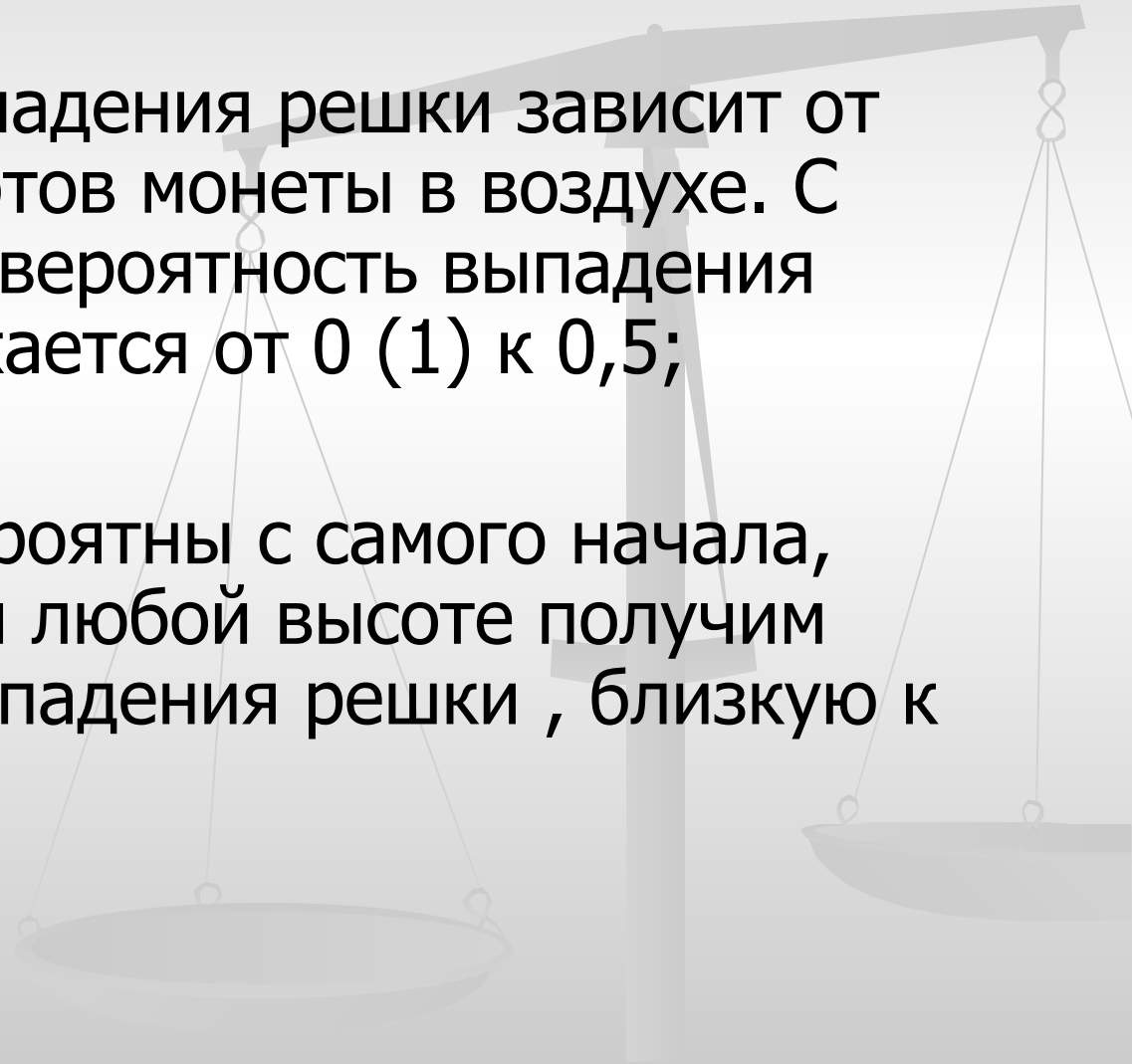
Качественный анализ проблемы

1. Угол 0° :

Вероятность выпадения решки зависит от числа переворотов монеты в воздухе. С ростом высоты вероятность выпадения решки приближается от 0 (1) к 0,5;

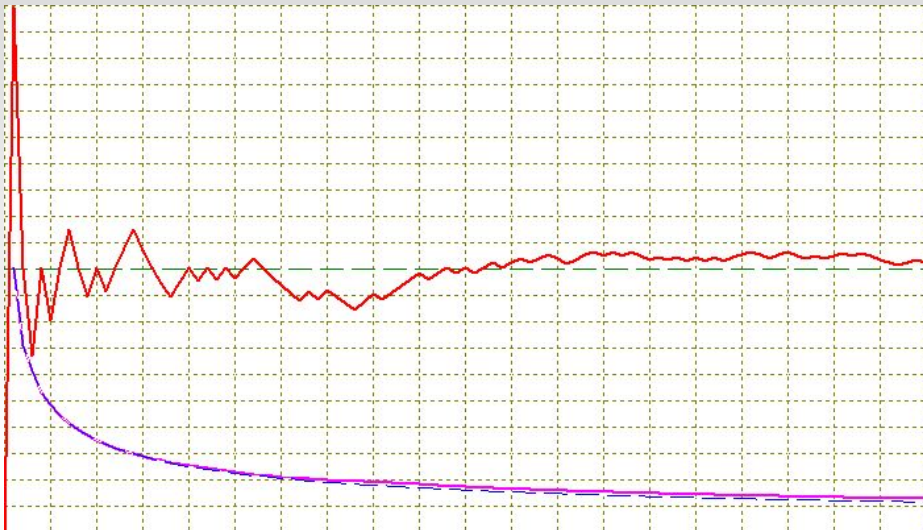
2. Угол 90° :

Исходы равновероятны с самого начала, поэтому мы при любой высоте получим вероятность выпадения решки, близкую к 0,5.

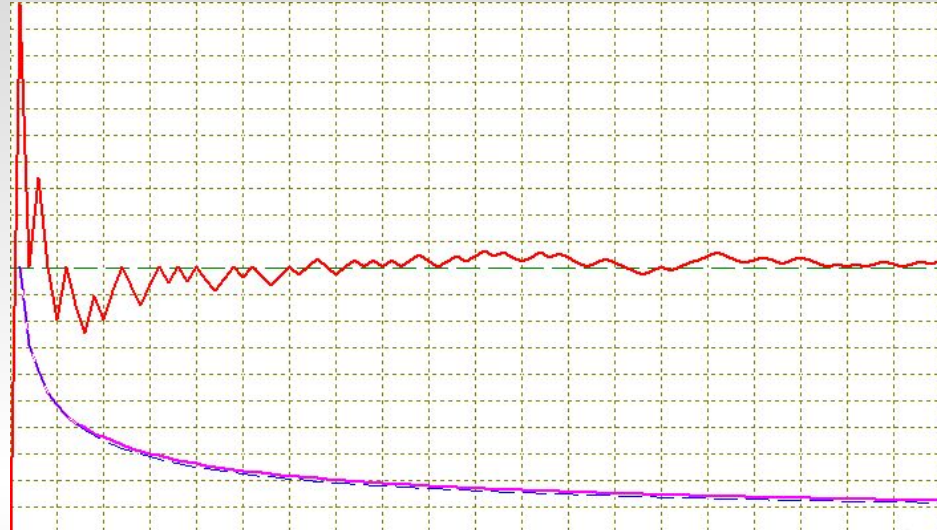


Угол 90°

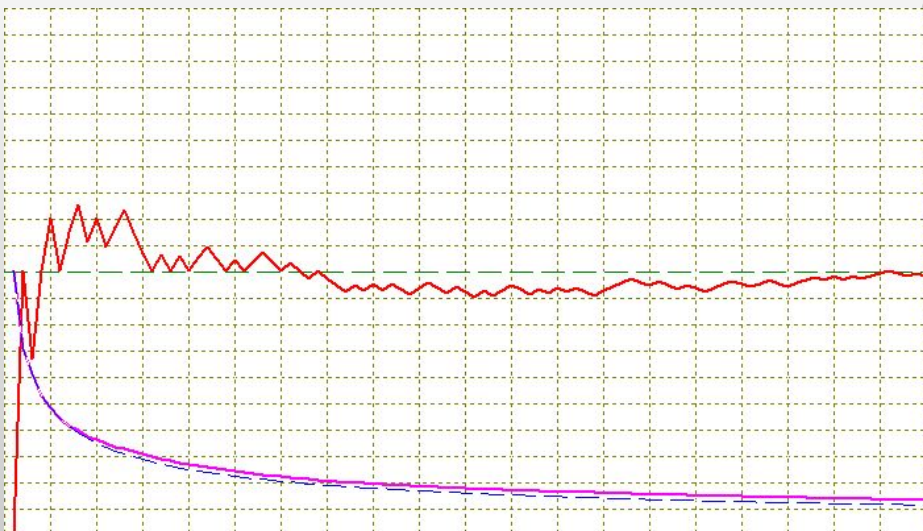
$h = 10\text{см}$, монета № 1



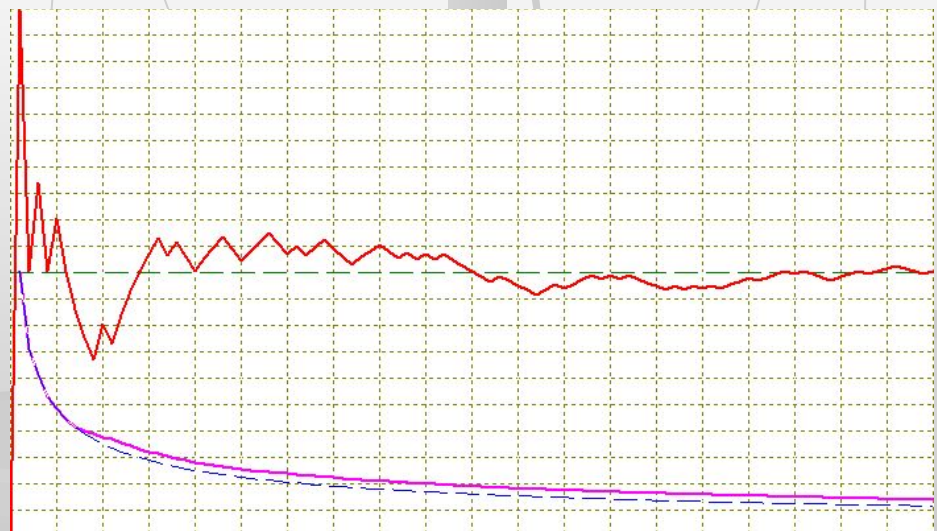
$h = 10\text{см}$, монета № 2



$h = 30\text{см}$, монета № 1



$h = 30\text{см}$, монета № 2

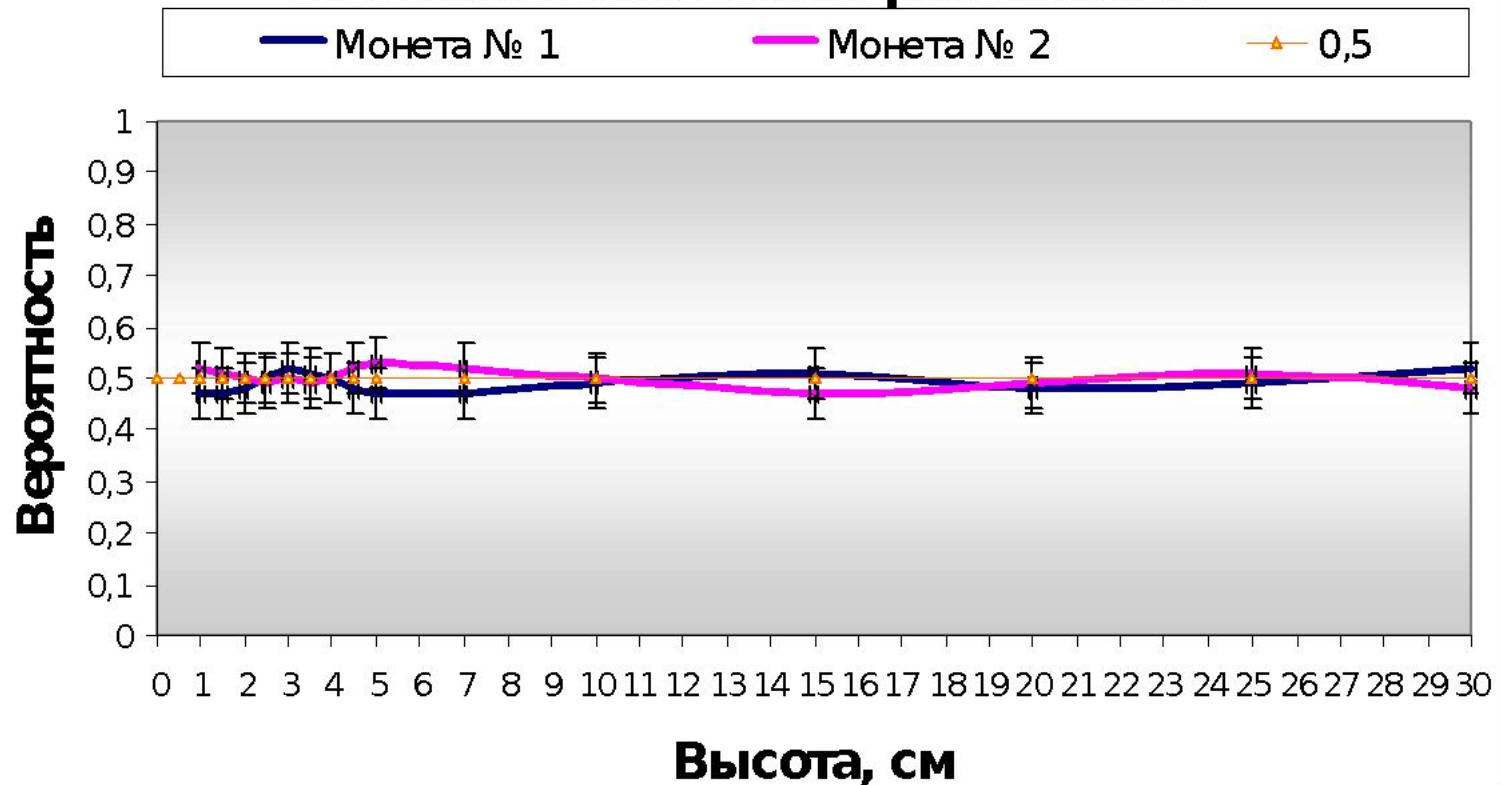


Зависимость вероятности от высоты. Угол 90°

Зависимость вероятности выпадения решки от высоты.

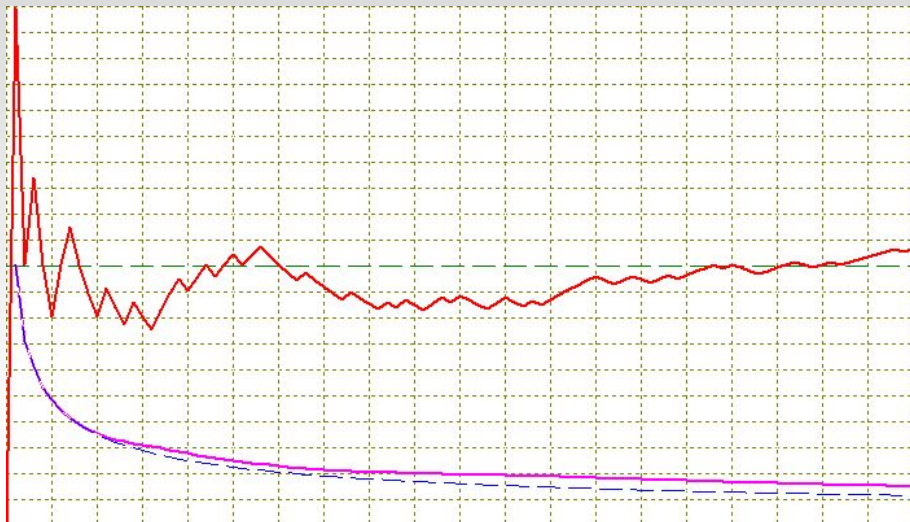
Начальный угол: 90°

Начальное положение: решкой вниз

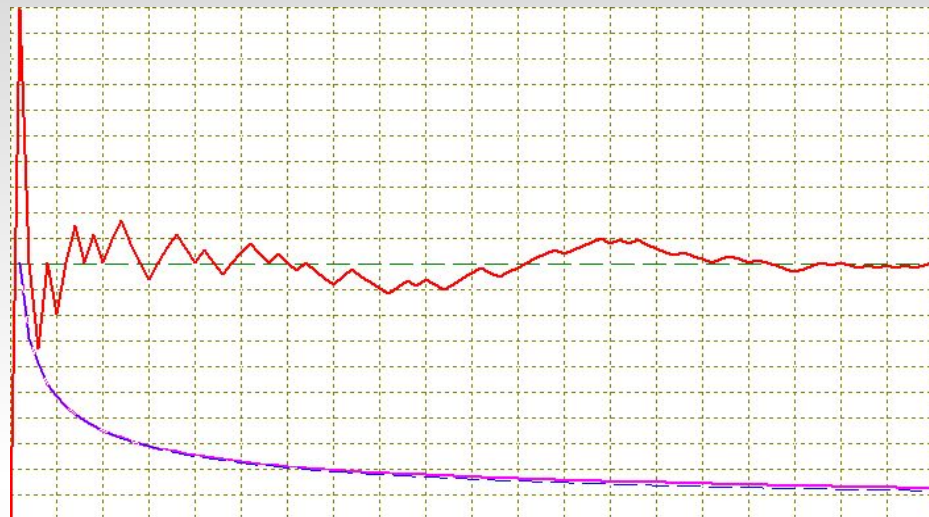


Угол 0°

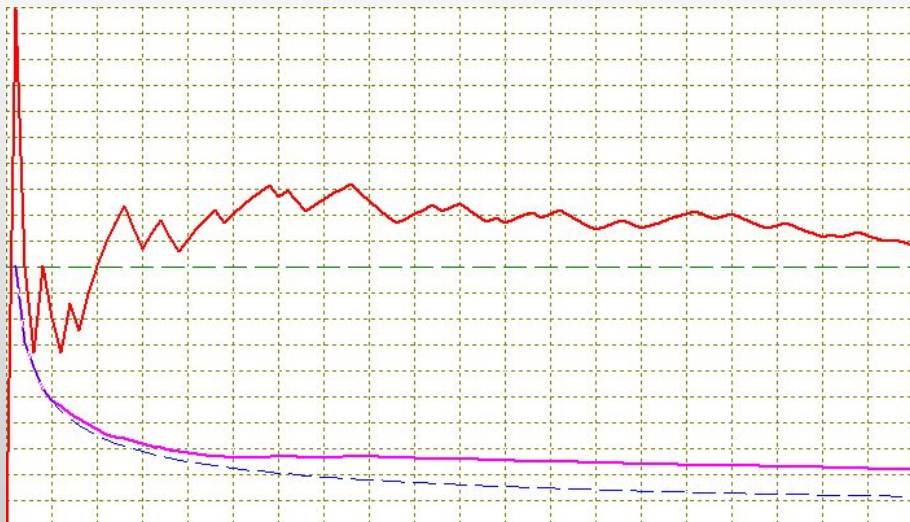
$h = 25\text{см}$, монета № 1



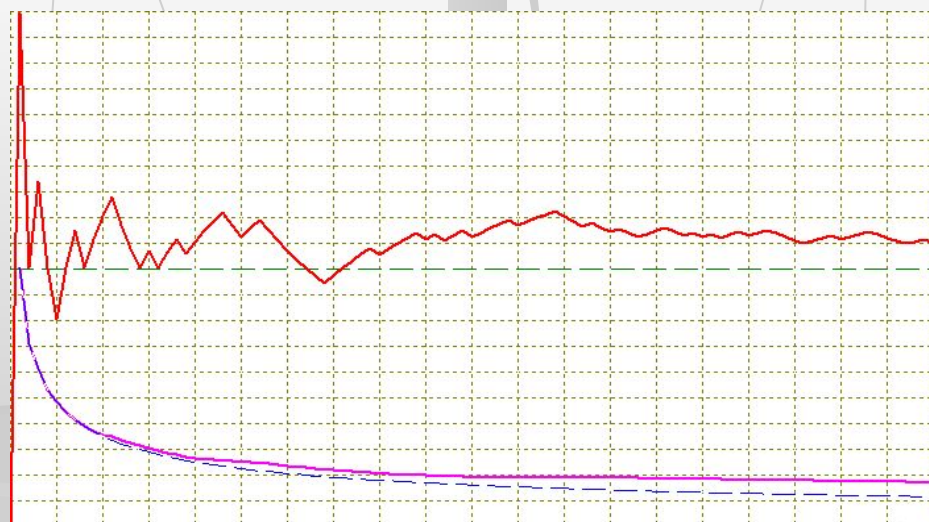
$h = 25\text{см}$, монета № 2



$h = 5\text{см}$, монета № 1

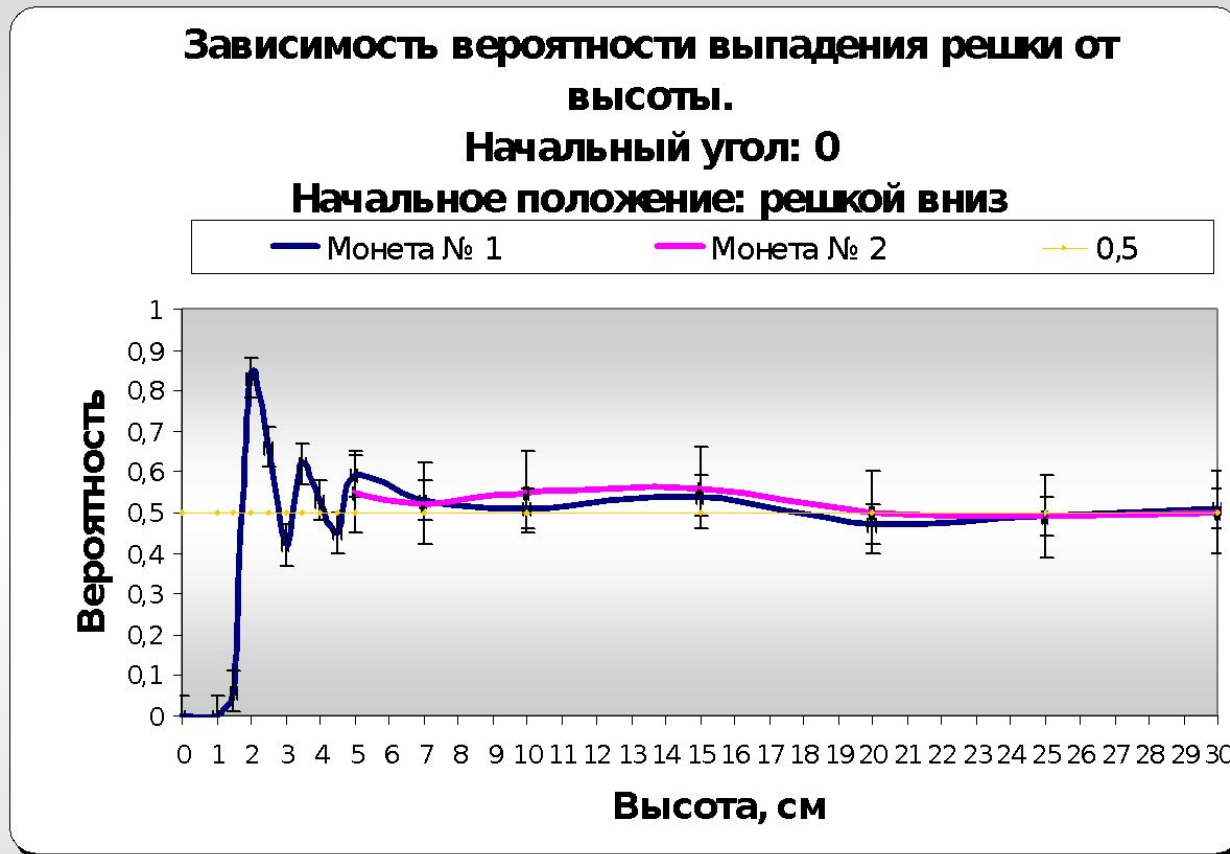


$h = 5\text{см}$, монета № 2



Зависимость вероятности от высоты. Угол 0°

Подложено 0 листов бумаги



Коэффициент восстановления: $0,52 \pm 0,03$

Число переворотов монеты

h	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	7	10	15	20	25	30
n	0-1	0-1	0-2	0-2	1-2	1-2	2-3	2-4	3-5	3-6	4-6	4-7	5-8	5-10

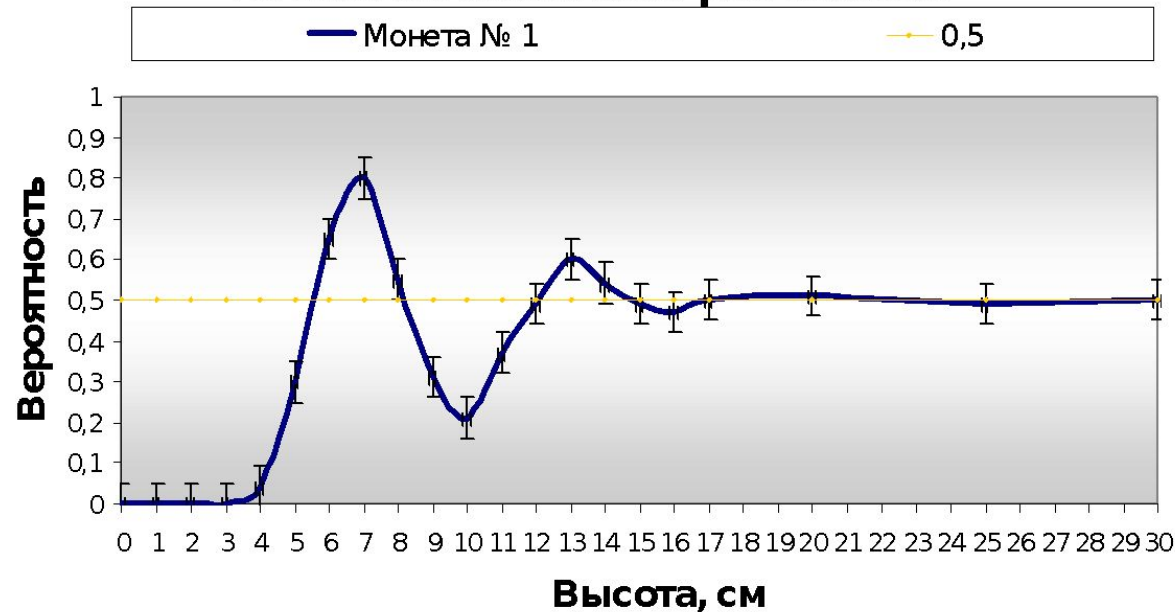
Зависимость вероятности от высоты. Угол 0°

Подложено 3 листа бумаги

**Зависимость вероятности выпадения решки от
высоты.**

Начальный угол: 0

Начальное положение: решкой вниз



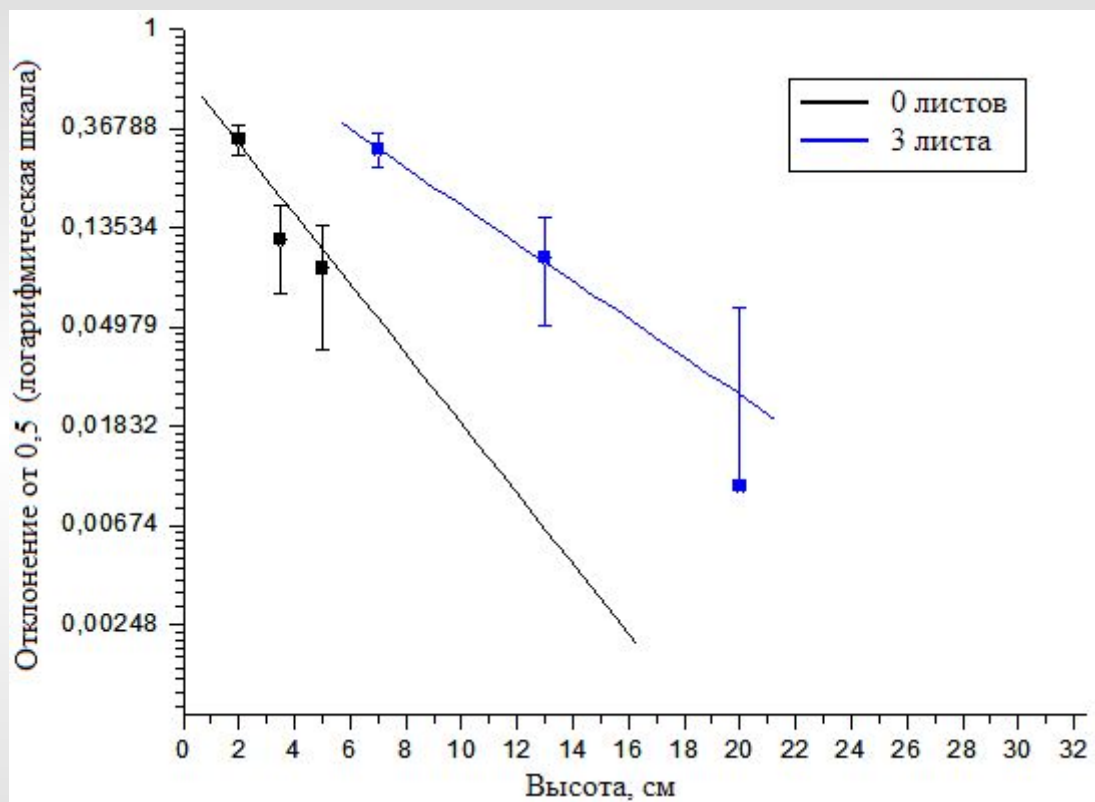
Коэффициент восстановления: $0,37 \pm 0,03$

Число переворотов монеты

h	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
n	0-1	0-1	1-2	1-2	1-2	1-2	2	2-3	2-3	2-3	2-3	3-4	3-4	3-4

Анализ осцилляций графиков

Отклонение «пиков» от 0,5 в логарифмическом масштабе:



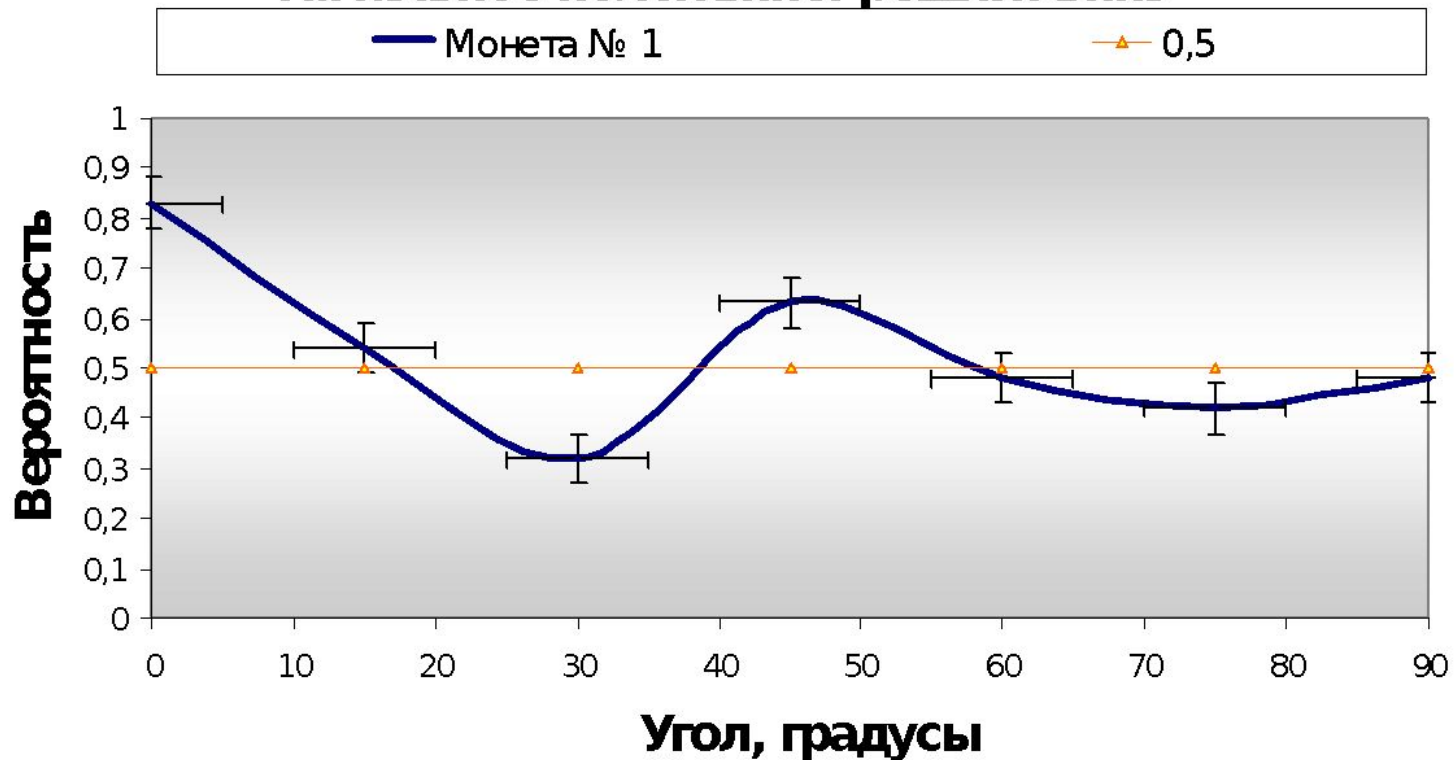
	$\gamma, \text{см}^{-1}$	$H_{\min}, \text{см}$
0 листов	$0,41 \pm 0,03$	6 ± 2
3 листа	$0,12 \pm 0,03$	22 ± 3

Зависимость вероятности от угла. Высота 2 см

Зависимость вероятности выпадения решки от угла.

Начальная высота: 2

Начальное положение: решкой вниз



Зависимость вероятности от угла. Высота 30 см

Зависимость вероятности выпадения решки от угла.

Начальная высота: 30

Начальное положение: решкой вниз

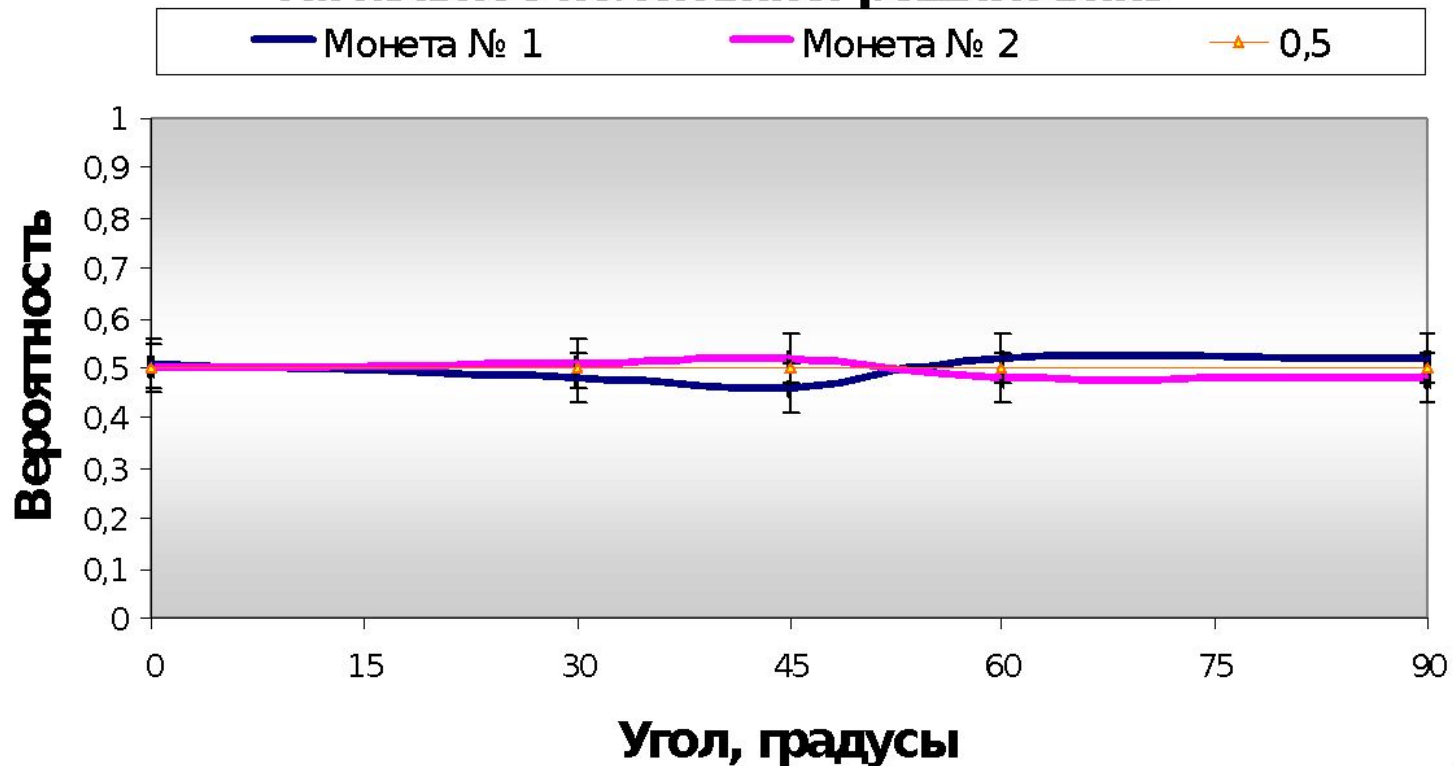


Таблица результатов экспериментов

Вероятность выпадения решки. Монета № 1

α ^h	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	7	10	15	20	25	30
0°	0	0	0	6	83	66	42	62	53	45	59	53	51	54	47	49	51
30°	0	0									53	60					48
45°	0	0									59	57					46
60°	0	0									55	52					52
90°	0	0	47	47	48	50	52	51	50	48	47	47	49	51	48	49	52
α ^h	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	20	25	30
0°	4	30	65	80	55	31	21	37	49	60	54	49	47	50	51	49	50

α _h	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
2	83	54	32	63	48	42	48

Таблица результатов экспериментов

Вероятность выпадения решки. Монета № 2

$\frac{h}{a}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	7	10	15	20	25	30
0°	0	0	0								55	52	55	56	50	49	50
30°	0	0									55	45					51
45°	0	0									44	43					52
60°	0	0									49	46					48
90°	0	0	52	51	50	49	50	49	50	52	53	52	50	47	49	51	48

Из 9205 проведенных экспериментов 5 раз монета становилась на ребро. Значит, вероятность третьего исхода (падение монеты на ребро) у реальных монет очень мала.

Вид монеты на ребре:



Вывод

- Предложены способы сохранения начальных условий падения монеты (угол, высота, начальная скорость) и сконструирована установка;
- Проведен качественный анализ проблемы и выбран самый интересный для исследования случай (0^0);
- Были проведены эксперименты по построению зависимости вероятности выпадения решки от различных начальных условий и исследован результат;
- Определили условия (для монет, используемых в эксперименте и для поверхности, используемой в эксперименте), позволяющие добиться равной вероятности исходов.

Преимущества и недостатки каждого способа сохранения угла

Способ № 1

- + Простота изготовления;
- + Возможность регулировки угла наклона;
- + Возможность проведения эксперимента с любыми монетами;
- Наличие силы трения;
- Разные конечные скорости монеты;
- Невозможность создания некоторых начальных условий;
- Невозможность соблюдения постоянства некоторых начальных условий

Способ № 2 (электромагнит)

- + Начальная скорость монеты не зависит от угла (0 м/с);
- + Нет трения;
- + Возможность регулировки угла наклона;
- + Возможность контроля работоспособности установки (с помощью светодиода);
- + Возможность проведения эксперимента с одинаковыми условиями;
- Сложность изготовления;
- Необходим элемент питания;
- Невозможность проведения эксперимента с некоторыми монетами

Расчет коэффициента затухания

Из приведенных графиков видно, что они «колеблются» около прямой $\omega=0,5$. Значит, можно сказать, что вероятность «совершает затухающие гармонические колебания» около этой прямой. Проведя такую аналогию, вычислим коэффициент затухания:

$$\tilde{\omega}_p(h) = \frac{1}{2} \Psi(h) f(h) + \frac{1}{2}, \quad f(h) = e^{-\gamma h}$$

$$\{h_0, \omega_0\} \in \tilde{\omega}_p(h) \Rightarrow \gamma = \frac{-\ln(2\omega_0 - 1)}{h_0}$$

$$\tilde{\omega}_p(h + \Delta) = \omega_p(h) \Leftrightarrow \tilde{\omega}_p(h) = \omega_p(h - \Delta)$$

Итоговая функция:

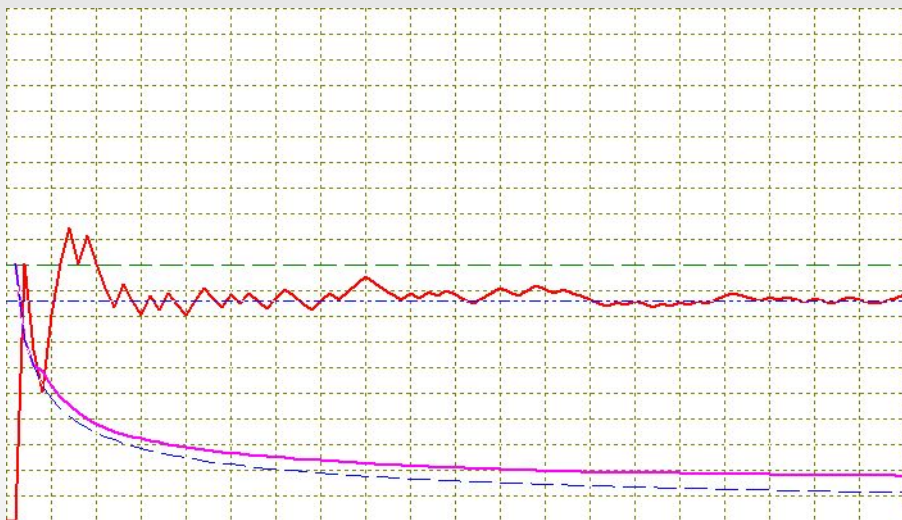
$$\omega_p(h) = \frac{1}{2} \Psi(h - \Delta) e^{-\gamma(h-\Delta)}, \quad \gamma = -\frac{\ln(2\omega_0 - 1)}{h_0 - \Delta}$$

Условия равной вероятности:

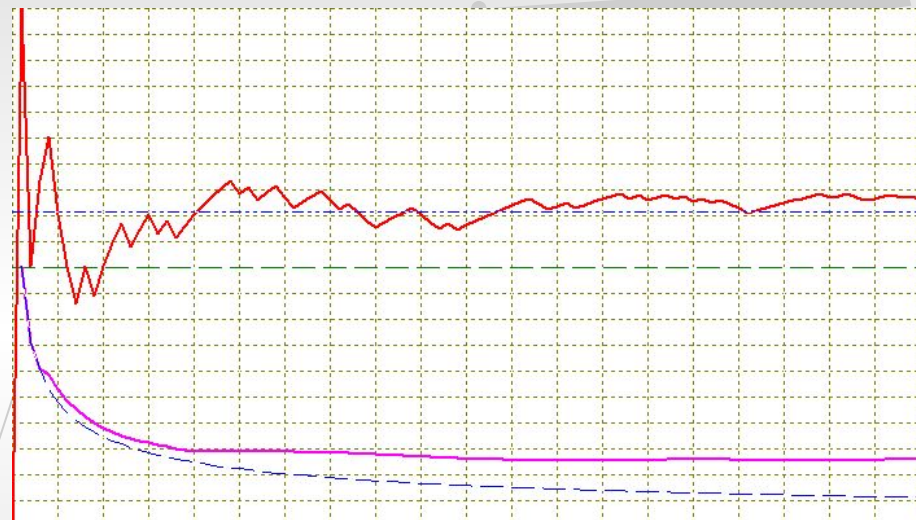
$$\frac{1}{2} e^{-\gamma(h-\Delta)} + \frac{1}{2} \leq \varepsilon + \frac{1}{2} \Rightarrow h \geq \Delta - \frac{\ln(2\varepsilon)}{\gamma}, \quad H_{\min} = \Delta - \frac{\ln(2\varepsilon)}{\gamma} \quad \varepsilon=0,05$$

Анализ влияния начального положения монеты

$h = 7\text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$, монета № 1, орлом вниз; $h = 7\text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$, монета № 1, решкой вниз



Вероятность выпадения решки: $0,43 \pm 0,05$



Вероятность выпадения решки: $0,60 \pm 0,05$

Значит, если мы в начальный момент монету перевернем, т.е. у нее сверху будет другая сторона, то вероятность выпадения решки станет равной:

$1 - \omega$, ω - исходная вероятность