

«Применение дискретных неравенств в исследовании разностных динамических систем»

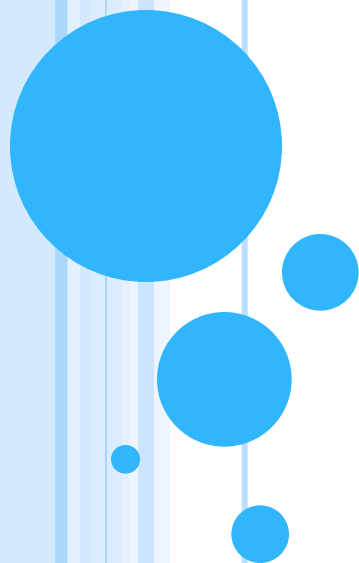
Ким Екатерина

Лян Анастасия

Ученицы 12С

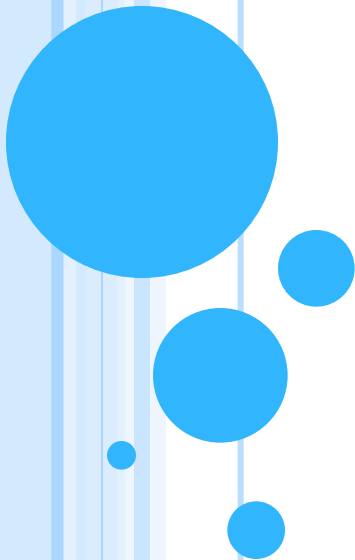
НИШ

г. Талдыкорган

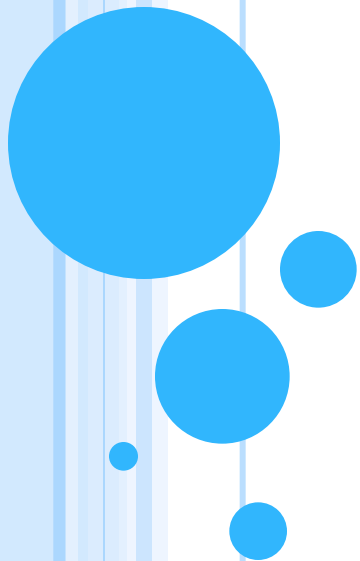


ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

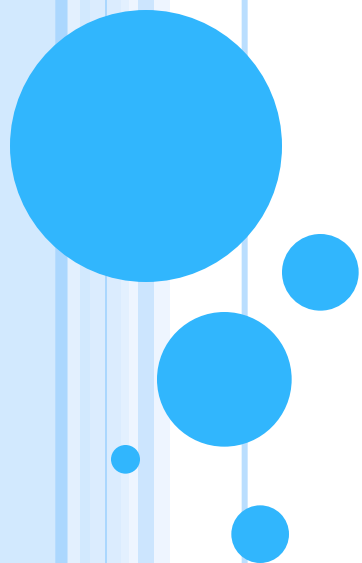
Получить различные дискретные неравенства и систематизировать различные типы дискретных неравенств, которые могут использоваться в теории устойчивости РДС.



**Актуальность работы
и
Научная новизна исследования**



Неравенства Беллмана, Бихари, Гронуолла



Лемма

о дискретном аналоге неравенства Беллмана

$$(1.1) \quad x(n) \leq \omega(n) + \sum_{s=0}^{n-1} f(s) \cdot x(s) , \quad \forall n/n \in N_0$$

(

$$1.2) \quad x(n) \leq \omega(n) \cdot \prod_{s=0}^{n-1} [1 + f(s)] , \quad \forall n/n \in N_0$$



Гронуолла

Если $U(n) \leq C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)U(s)$, то

$$U(n) \leq C * \exp(\sum_{s=0}^{n-1} v(s))$$

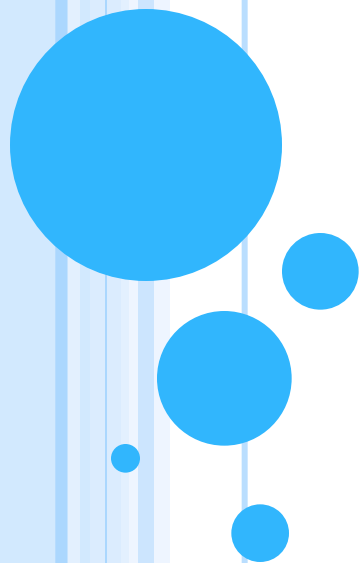
Бихари

Если $U(n) \leq C + \sum_{s=0}^{n-1} v(s)[U(s)]^\tau$, то

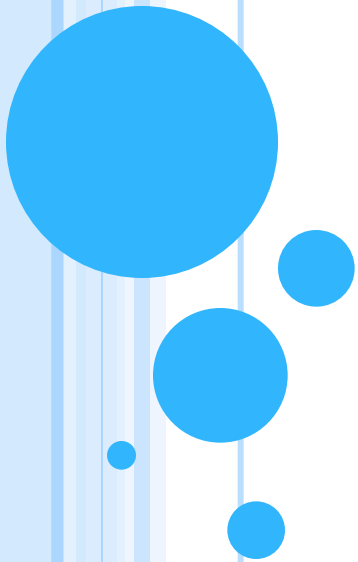
$$U(n) \leq C * \left[1 - (\tau - 1)C^{\tau-1} \sum_{s=0}^{n-1} v(s) \right]^{-\frac{1}{\tau-1}}$$



Применение дискретных неравенств к исследованию РДС



Оценки решения нелинейных разностных динамических систем



$$x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n), \quad n > 0, \quad x_n \in R^n$$

(2.1

$$y_{n+1} = A(n)y_n$$

$$y_n = A(n-1) \cdot A(n-2) \cdot \square \cdot A(0)y_0$$



□ Обозначим

$$(2.1.4) \quad y_n = A(n-1) \cdot A(n-2) \cdot \dots \cdot A(0)y_0 = \Phi(n,0)y_0$$

Теперь возьмем некоторую функцию $y_0(n) = y_0$, тогда получим

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n) + f(n, y_n)$$

так как

$$\Phi(n+1,0)y_0(n) = A(n)\Phi(n,0)y_0(n)$$

то

$$\Phi(n+1,0) = A(n)\Phi(n,0)$$



□ Это даст

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) = \Phi(n+1,0)y_0(n) + f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)y_0(n+1) - \Phi(n+1,0)y_0(n) = f(n, y_n)$$

$$\Phi(n+1,0)[y_0(n+1) - y_0(n)] = f(n, y_n)$$

$$y_0(n+1) - y_0(n) = \Phi^{-1}(n+1,0)f(n, y_n)$$



□ Варьируя по n получим

$$(2.1.5) \quad y_0(n) = y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi^{-1}(j+1,0)f(j,y_j)$$

где $y_0(0) = \text{const}$

Подставим (2.1.5) в (2.1.4), получим

$$\begin{aligned} y_n &= \Phi(n,0) \left(y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi^{-1}(j+1,0)f(j,y_j) \right) = \\ &= \Phi(n,0)y_0(0) + \sum_{j=0}^n \Phi(n,0)\Phi^{-1}(j+1,0)f(j,y_j) \end{aligned}$$



По свойству модуля имеем

$$|y_n| \leq |\Phi(n,0)y_0(0)| + \sum_{j=0}^n |\Phi(n,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot |f(j,y_j)|$$

Пусть вектор функция удовлетворяет условию

$$(2.1.6) \quad |f(j,y_j)| < \gamma(j)|y_j|^\alpha, \quad \forall j \geq 0$$

где α некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(j) < \varepsilon$$

ε - сколь угодно малое положительное число, тогда получим следующее неравенство

$$|y_n| \leq |\Phi(n,0)y_0(0)| + \sum_{j=0}^n |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)|y_j|^\alpha$$



Введем обозначения

$$\varphi(n) = |\Phi(n,0)y_0(0)|, \text{ и } \psi(j) = |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)$$

получим

$$|y_n| \leq \varphi(n) + \sum_{j=0}^n \psi(j) |y_j|^\alpha, \text{ где } \varphi(n) = C$$

$$|y_n| \leq C + \sum_{j=0}^n \psi(j) |y_j|^\alpha$$

Применяя лемму 1, получим следующую оценку

$$(2.1.7) \quad |y_n| \leq C \cdot \left[1 - (\alpha - 1) C^{\alpha-1} \sum_{s=0}^{n-1} \psi(s) \right]^{-\frac{1}{\alpha-1}}, \forall n \geq 0$$

$$\text{где } \psi(j) = |\Phi(j,0)\Phi^{-1}(j+1,0)| \cdot \gamma(j)$$

так как $\gamma(j) < \varepsilon$, то

$$(2.1.8) \quad |y_n| \leq C + \varepsilon$$



Теорема 2.1.1

□ Если нелинейная часть РДС

$$(2.1.1) \quad x_{n+1} = A(n) + f(n, x_n) \quad n > 0, \quad x_n \in R^n$$

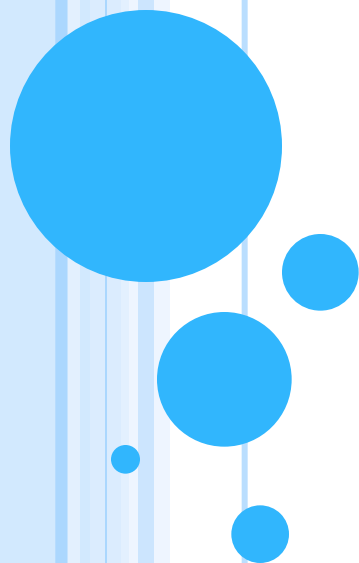
в окрестности начала координат удовлетворяет условию

$$(2.1.6) \quad |f(j, y_j)| < \gamma(j) |y_j|^\alpha \quad \forall j \geq 0$$

то ее решение оценивается сверху неравенством

$$(2.1.8) \quad |y_n| \leq C + \varepsilon$$

Получены некоторые новые
дискретные неравенства, которые
позволяют судить об устойчивости РДС



ТЕОРЕМА 2.1.2

- Пусть, $U_n, \varphi(n), f(n)$ — неотрицательные функции.
Если при $a > 0, p > 1$ выполняется неравенство

$$(2.1.9) \quad U_n \leq a + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) U_j + \sum_{j=0}^{n-1} f(j) U_j^p$$

(тогда)
$$(2.1.10) \quad U_n \leq \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \left\{ a^{1-p} + (1-p) \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \left(\prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q \right\}^{\frac{1}{p}}$$



Доказательство: Отметим

$$(2.1.11) \quad \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} = -\varphi(n) \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$

$$\prod_{j=0} (1 + \varphi(j))^{-1} = 1$$

Положим $z_0 = a$, тогда

$$(2.1.12) \quad z_n = a + \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(j) U_j + \sum_{j=0}^{n-1} f(j) U_j^p, \quad n \geq 0$$

Очевидно, что $U_n \leq z_n$ при $n \geq 0$

Из того, что $z_{n+1} - z_n = \varphi(n) U_n + f(n) U_n^p$



находим

$$(2.1.13) \quad z_{n+1} - z_n - \varphi(n)z_n \leq f(n)z_n^p$$

Умножая обе части неравенства 2.1.13 на $\prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$ и учитывая, 2.1.11 преобразуем его. Получим оценку

$$(2.1.14) \quad z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \leq f(n) \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} z_n^p$$

Далее, пусть $q = 1 - p$. Преобразуем левую часть неравенства (2.1.14) к виду

$$(2.1.15) \quad \frac{\left(z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p - \left(z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q}{D} =$$
$$= q \left(z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} - z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)$$



где D - некоторое значение, находящееся между

$$z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \quad \text{и} \quad z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1}$$

Из того, что z_n - неубывающая, а

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \leftrightarrow \quad - \text{невозрастающая, следует}$$

$$D > z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \geq z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$

если

$$z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} < z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$$



и $D > z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \geq z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1}$

если $z_{n+1} \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} < z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1}$

Из 2.1.13 и 2.1.15 получаем

$$(2.1.16) \quad \left(z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p - \left(z_n \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q \leq qf(n) \left(\prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q$$

при $q < 0, (p > 1)$

Учитывая, что $z_0 = a$, и суммируя (2.1.16) по n от 0 до $n+1$ находим

$$(2.1.17) \quad \left(z_n \prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^p \leq a^q + q \sum_{j=0}^{n-1} f(j) \left(\prod_{j=0}^n (1 + \varphi(j))^{-1} \right)^q$$

при $q < 0, (p > 1)$



Теорема 2.1.3

- Пусть функции U_n и g_n непрерывны и функции a_n и b_n - суммируемы, предположим, что a_n и b_n неотрицательны на N и удовлетворяют неравенству

$$(2.1.26) \quad U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} g_k U_k, \quad n \in N,$$

тогда справедливо неравенство

$$(2.1.27) \quad U_n \leq a_n + b_n \sum_{k=n_0}^{n-1} a_k g_k \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + b_s g_s]$$

Рассмотрим разностную динамическую систему

$$(2.1.32) \quad x_{n+1} = A(n)x_n + f(n, x_n) \quad x_{n_0} = x_0$$

Представим решение $x(n, x_0)$ РДС (2.1.32) в следующем виде

$$(2.1.33) \quad x_n = X(n, n_0)x_0 + \sum_{k=n_0}^{n-1} X^{-1}(n_0, k)f(k, x_k)$$

где $X(n, n_0)$ — фундаментальная матрица
линейной РДС:

$$x_{n+1} = A(n)x_n$$



Из соотношения

$$|f(k, x_k)| < \gamma(k) |x_k|, \quad \forall k \geq 0$$

где α - некоторое положительное число,

$$\alpha \geq 1, \quad \gamma(k) < \varepsilon,$$

ε - сколь угодно малое положительное число, получим следующее неравенство

$$|x_n| \leq |X(n, n_0)x_0| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |X^{-1}(n_0, k) \cdot \gamma(k) x_k|, \quad \forall k \geq 0$$



Введем обозначения, пусть

$$|X(n, n_0)x_0| = \omega(n)$$

и

$$|X^{-1}(n_0, k) \cdot \gamma(k)| = \psi(n)$$

Тогда получим

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(n) |x_k|$$



Теорема 2.1.4

- Пусть функция $\psi(n)$ непрерывна и функция $\omega(n)$ - суммируема. Предположим, что $\omega(n)$ неотрицательна на $\mathbb{N}$ и удовлетворяют неравенству

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \psi(k) |x_k|$$

тогда справедливо неравенство

$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)]$$

Доказательство:

Применяя теорему 2.1.3, получим оценку

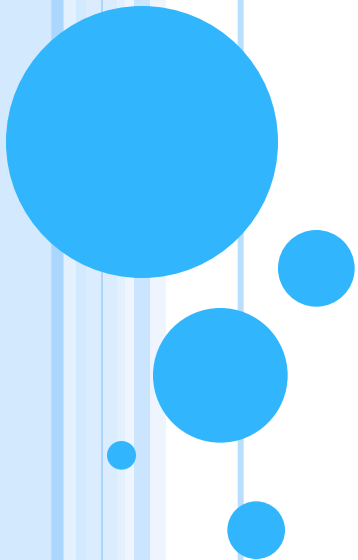
$$|x_n| \leq \omega(n) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \omega(k) \psi(k) \prod_{s=k+1}^{n-1} [1 + \psi(s)]$$

Из этого неравенства следует утверждение теоремы.



Результаты исследования:

- некоторые новые дискретные неравенства, которые позволяют судить об устойчивости РДС;
- одно неравенство типа Гронуолла, которое применяется для оценки решения нелинейных разностно-динамических систем с помощью фундаментальных решений линейного приближения.



Вывод:

- В работе проведено исследование, при котором решение оценивается функциями, зависящими от известных параметров, входящих в правые части РДС. При этом были систематизированы различные типы дискретных неравенств, которые могут быть использованы в теории устойчивости РДС. Эти задачи до сих пор не были проработаны и поэтому полученные результаты представляют теоретическую и практическую ценность и важны в приложениях.

