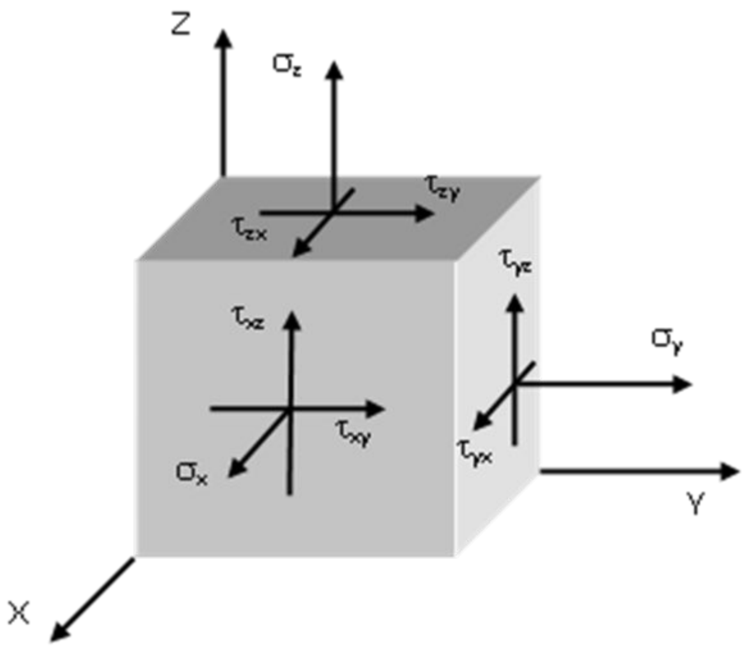
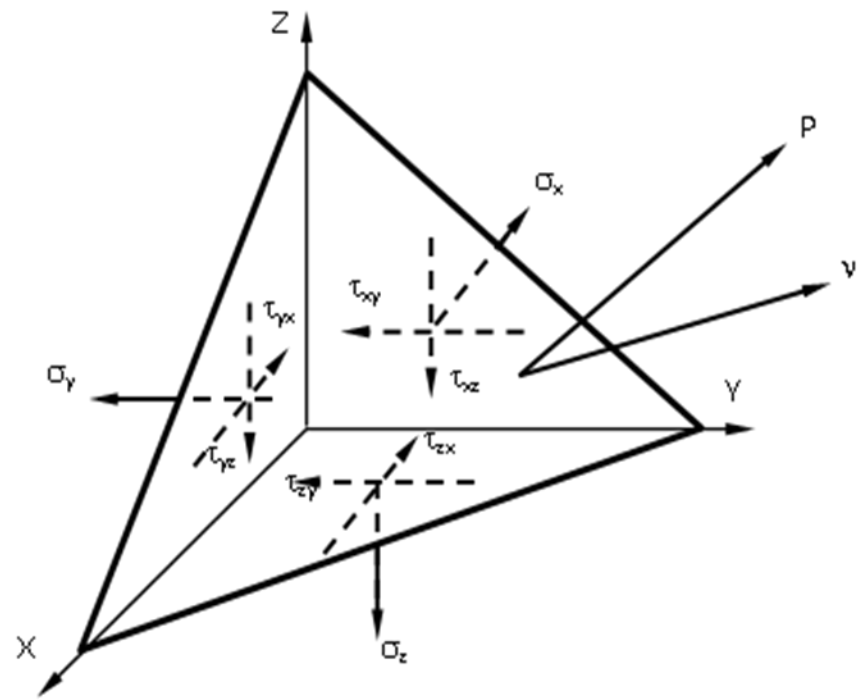
Определение напряжений на различных площадках

Напряжения на наклонных площадках

Элементарный объём в форме параллепипеда, связанный с системой координат таким образом, чтобы его грани совпадали с координатными плоскостями, рассечем наклонной плоскостью

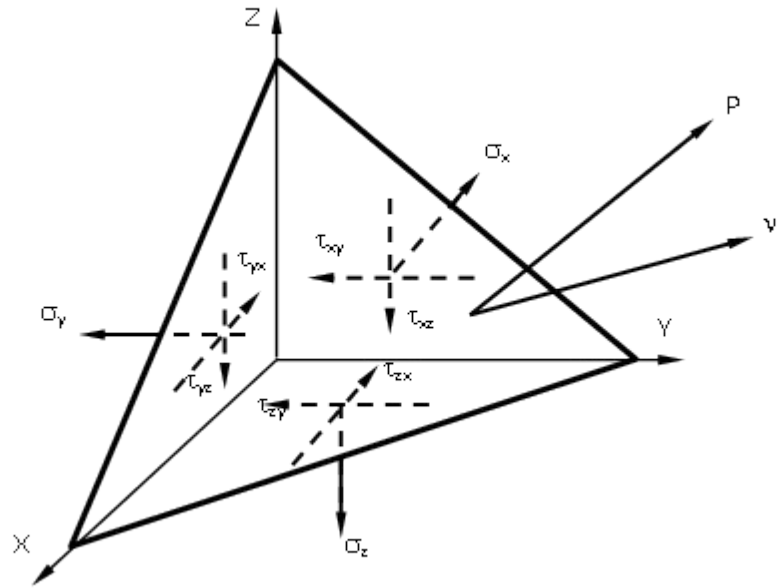




Положение наклонной площадки характеризуется вектором нормали v с направляющими косинусами l, m, n. На наклонной площадке площадью dF действует полное напряжение P с проекциями по осям P_x, P_y, P_z. Пусть нормальные и касательные напряжения на гранях, совпадающих с координатными плоскостями, известны. Необходимо найти нормальное и касательное напряжение на наклонной площадке - σ_v и τ_v. Площадки, отсекаемые на координатных плоскостях, будут иметь площади:

$$dF_x = dF \cdot l, \qquad dF_y = dF \cdot m, \qquad dF_z = dF \cdot n.$$

Составим уравнение равновесия сил в проекции на ось X:



$\Sigma X = 0,$

$P_x \cdot dF - \sigma_x \cdot dF_x - \tau_{yx} \cdot dF_y - \tau_{zx} \cdot dF_z = 0,$

$P_x \cdot dF - \sigma_x \cdot dF \cdot l - \tau_{yx} \cdot dF \cdot m - \tau_{zx} \cdot dF \cdot n = 0,$

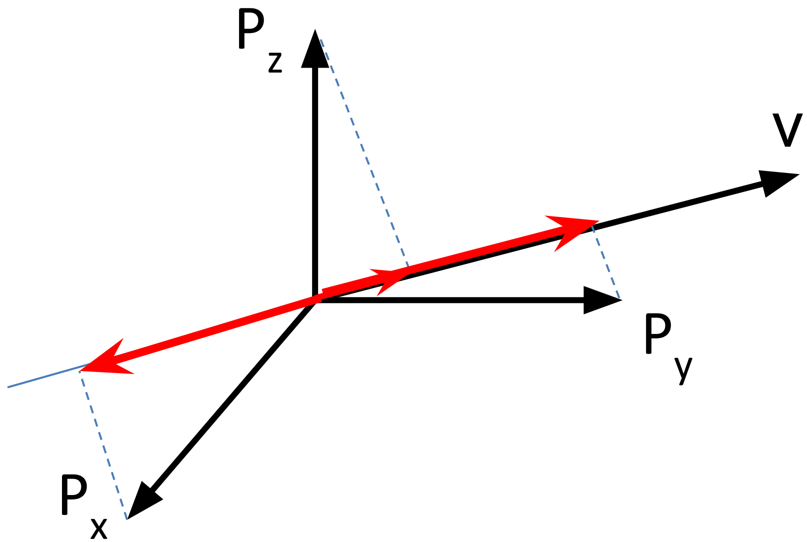
$P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n.$

Аналогично, составляя уравнения равновесия сил на оси Y и Z

$P_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n,$

$P_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n.$

Чтобы определить нормальное напряжение на наклонной площадке, спроецируем проекции полного напряжения на нормаль.



$$\sigma_v = P_x \cdot l + P_y \cdot m + P_z \cdot n =$$

$$= (\sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n) \cdot l + (\tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n) \cdot m +$$

$$+ (\tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n) \cdot n =$$

$$= \sigma_x \cdot l^2 + \tau_{yx} \cdot m \cdot l + \tau_{zx} \cdot n \cdot l + \tau_{xy} \cdot l \cdot m + \sigma_y \cdot m^2 + \tau_{zy} \cdot n \cdot m + \tau_{xz} \cdot l \cdot n +$$

$$\tau_{yz} \cdot m \cdot n + \sigma_z \cdot n^2$$

С учетом закона парности касательных напряжений ($\tau_{yx} = \tau_{xy}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), получаем основную квадратичную форму нормальных напряжений:

$$\sigma_v = \sigma_x \cdot l^2 + \sigma_y \cdot m^2 + \sigma_z \cdot n^2 + 2\tau_{yx} \cdot m \cdot l + 2\tau_{zx} \cdot n \cdot l + 2\tau_{zy} \cdot n \cdot m$$

Полученное выражение позволяет определить нормальное напряжение на любой наклонной площадке, поскольку при выводе этого выражения никаких ограничений на положение площадки не накладывалось. Теперь найдем величину касательного напряжения на наклонной площадке:

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2,$$

$$\tau_v^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_v^2.$$

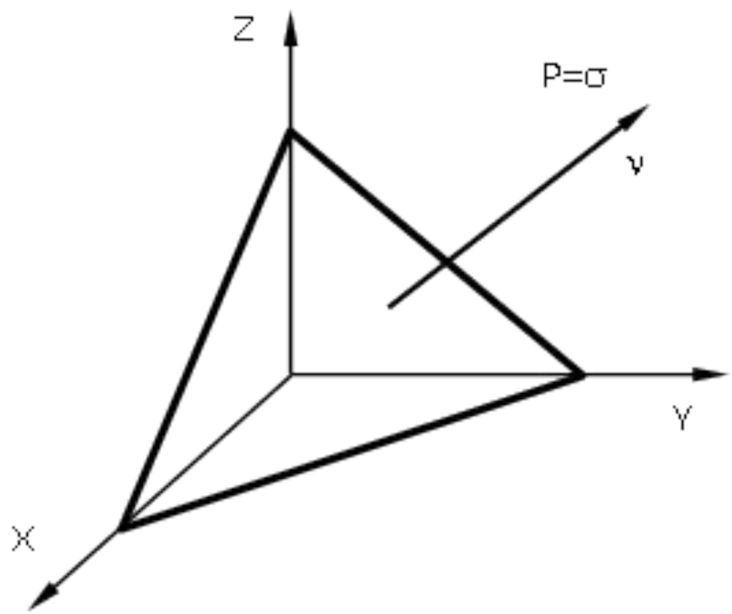
Главные площадки и главные напряжения

Нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке зависят от ее положения, то есть от направляющих косинусов l, m, n.

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю и действуют только нормальные напряжения, называются **главными**. Нормальные напряжения на этих площадках называются **главными напряжениями**.

Предположим, что наклонная площадка с направляющими косинусами l, m, n является главной, то есть вектор нормали к наклонной площадке совпадает с вектором полного напряжения. Тогда нормальное напряжение на этой площадке равно полному напряжению, а касательное напряжение равно нулю.

Предположим, что наклонная площадка с направляющими косинусами l, m, n является главной, то есть вектор нормали к наклонной площадке совпадает с вектором полного напряжения (τ=0).



$P_x = \sigma \cdot l, \quad P_y = \sigma \cdot m, \quad P_z = \sigma \cdot n.$

Проекции по координатным осям:

$$P_x = \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = \sigma \cdot l,$$
$$P_y = \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = \sigma \cdot m,$$
$$P_z = \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n = \sigma \cdot n.$$

В данных уравнениях четыре неизвестных (направляющие косинусы l, m, n и главное напряжение σ), поэтому необходимо четвертое уравнение:

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n = 0 \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n = 0 \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$$

Система уравнений имеет ненулевое решение (нулевое не устраивает из-за четвертого уравнения системы), когда равен нулю главный определитель системы:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

Раскроем определитель

$$(\sigma_x - \sigma)\cdot(\sigma_y - \sigma)\cdot(\sigma_z - \sigma) + \tau_{yx}\cdot\tau_{zy}\cdot\tau_{xz} + \tau_{xy}\cdot\tau_{yz}\cdot\tau_{zx} - \tau_{xz}\cdot(\sigma_y - \sigma)\cdot\tau_{zx} - \tau_{xy}\cdot\tau_{yx}\cdot(\sigma_z - \sigma) - \tau_{yz}\cdot\tau_{zy}\cdot(\sigma_x - \sigma) = 0.$$

Сгруппируем слагаемые по степеням главного напряжения

$$- \sigma^3 + \sigma^2 \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) - \sigma \cdot (\sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2) + (\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 - - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2) = 0.$$

Запишем это уравнение в более компактной форме

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0$$

где $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$$I_2 = \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_z + \sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2,$$

$$I_3 = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot \tau_{yz} \cdot \tau_{zx} - \sigma_y \cdot \tau_{xz}^2 - \sigma_z \cdot \tau_{xy}^2 - \sigma_x \cdot \tau_{yz}^2$$

Введенные обозначения называются инвариантами напряженного состояния. Так как главные напряжения в точке являются физической характеристикой, то они не зависят от выбора системы координат, а, следовательно, и значения инвариантов также не зависят от выбора системы координат.

Решая кубическое уравнение, получим три вещественных корня – три главных напряжения, которые нумеруются в порядке убывания: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Подставляя величину главного напряжения в систему, можно определить положение главной площадки, т. е. определить ее направляющие косинусы. Три главных площадки в точке взаимно перпендикулярны.

Виды напряженных состояний в точке

- Объемное (трехосное) напряженное состояние

$I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 \neq 0$, следовательно три главных напряжения отлично от нуля.

- Плоское (двухосное) напряженное состояние

$I_1 \neq 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, следовательно два главных напряжения отлично от нуля.

- Чистый сдвиг (частный случай плоского)

$I_1 = 0$, $I_2 \neq 0$, $I_3 = 0$, следовательно два главных напряжения отлично от нуля (причем $\sigma_1 = -\sigma_3$).

- Линейное (одноосное) напряженное состояние

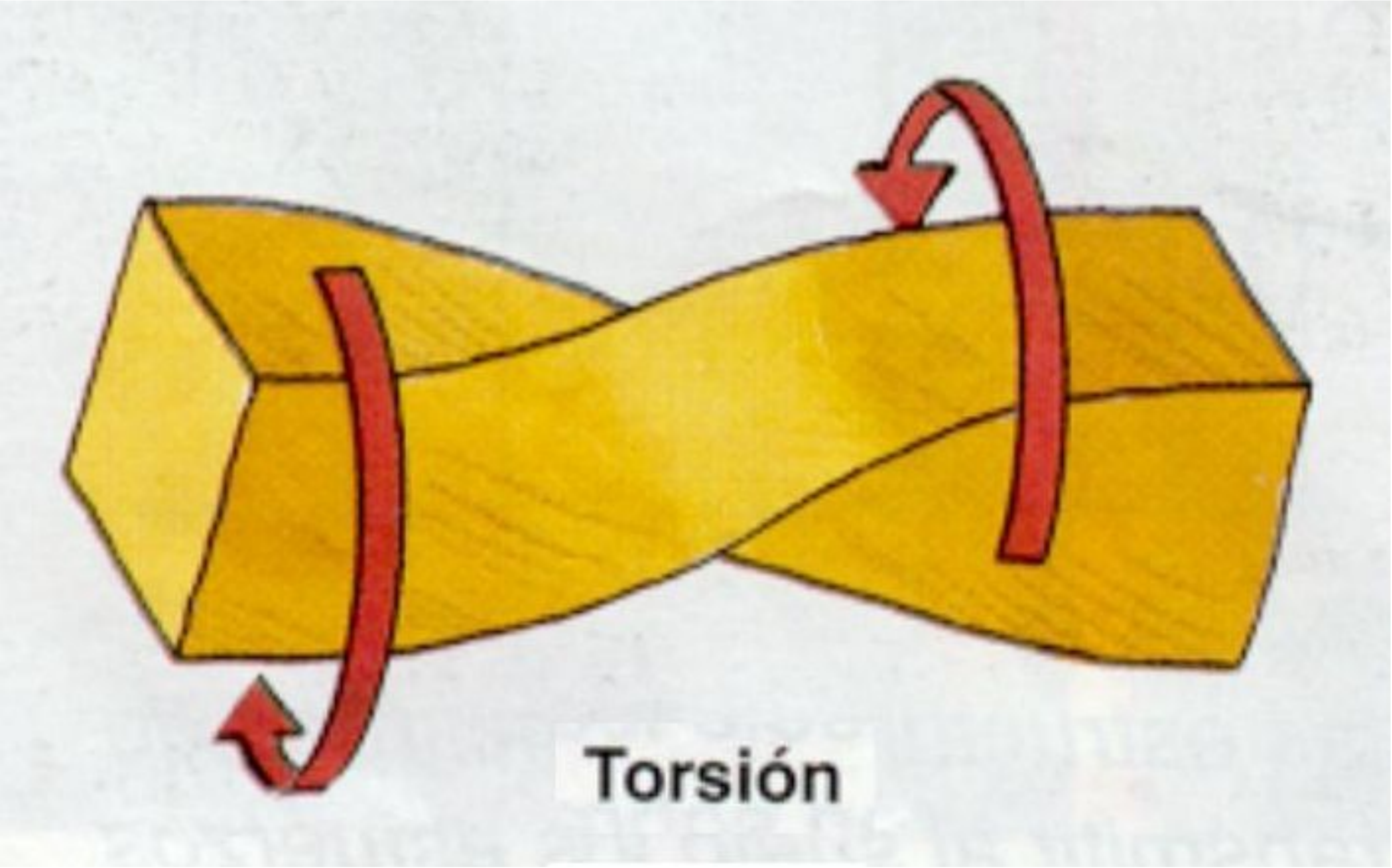
$I_1 \neq 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, следовательно одно главное напряжение отлично от нуля.

Примеры различных видов напряженных состояний

Объемное- возникает во время объемной штамповки

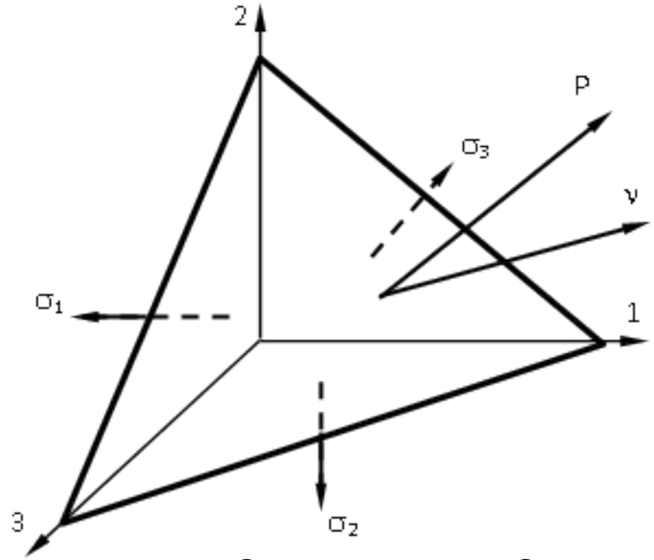
Плоское-возникает при изгибе или изгибе с кручением

Чистый сдвиг-возникает при кручении



Линейное- возникает при растяжении-сжатии

Экстремальные свойства главных напряжений. Круговая диаграмма Мора



$$\sigma_v = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2$$

$$P_x = \sigma_1 \cdot l$$

$$P_y = \sigma_2 \cdot m$$

$$P_z = \sigma_3 \cdot n$$

$$P^2 = P_x^{\ 2} + P_y^{\ 2} + P_z^{\ 2} = \sigma_1^{\ 2} \cdot l^2 + \sigma_2^{\ 2} \cdot m^2 + \sigma_3^{\ 2} \cdot n^2$$

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 \cdot l^2 + \sigma_2 \cdot m^2 + \sigma_3 \cdot n^2 \\ \sigma^2 + \tau^2 = \sigma_1{}^2 \cdot l^2 + \sigma_2{}^2 \cdot m^2 + \sigma_3{}^2 \cdot n^2 \\ 1 = l^2 + m^2 + n^2 \end{cases}$$

Умножим каждое уравнение на произвольные множители a, b, c и сложим, сгруппировав при этом слагаемые по направляющим косинусам

$$a \cdot \sigma + b \cdot (\sigma^2 + \tau^2) + c =$$

$$= l^2 \cdot (a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_1{}^2 + c) + m^2 \cdot (a \cdot \sigma_2 + b \cdot \sigma_2{}^2 + c) +$$

$$+ n^2 \cdot (a \cdot \sigma_3 + b \cdot \sigma_3{}^2 + c)$$

- Для определения величины l^2 подберем коэффициенты a, b, c таким образом, чтобы вторая и третья скобки в правой части уравнения обнулились:

$$a\cdot\sigma_2 + b\cdot\sigma_2^2 + c = 0,$$

$$a\cdot\sigma_3 + b\cdot\sigma_3^2 + c = 0,$$

получаем

$b = 1$, $a = -(\sigma_2 + \sigma_3)$, $c = \sigma_2\cdot\sigma_3$.

Подставляя полученные коэффициенты в уравнение , находим величину l^2:

$$l^2 = \frac{a\cdot\sigma + (\sigma^2 + \tau^2) + c}{a\cdot\sigma_1 + b\cdot\sigma_1^{\ 2} + c} = \frac{-(\sigma_2 + \sigma_3)\cdot\sigma + \sigma^2 + \tau^2 + \sigma_2\cdot\sigma_3}{-(\sigma_2 + \sigma_3)\cdot\sigma_1 + \sigma_1^{\ 2} + \sigma_2\cdot\sigma_3}$$

Упрощая получим:

$$l^2=\frac{(\sigma-\sigma_2)\cdot(\sigma-\sigma_3)+\tau^2}{(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(\sigma_1-\sigma_3)}$$

аналогично находим квадраты двух других направляющих косинусов:

$$m^2=\frac{(\sigma-\sigma_3)\cdot(\sigma-\sigma_1)+\tau^2}{(\sigma_2-\sigma_3)\cdot(\sigma_2-\sigma_1)}$$

$$n^2=\frac{(\sigma-\sigma_1)\cdot(\sigma-\sigma_2)+\tau^2}{(\sigma_3-\sigma_1)\cdot(\sigma_3-\sigma_2)}$$

В уравнениях дроби должны быть больше нуля, так как в левых частях стоят квадраты величин. Проанализируем знаменатели дробей на основе неравенства $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$:

$$(\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (\sigma_1 - \sigma_3) \geq 0,$$

$$(\sigma_2 - \sigma_3) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \leq 0,$$

$$(\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2) \geq 0.$$

На основе неравенств можно сделать вывод о знаке числителя:

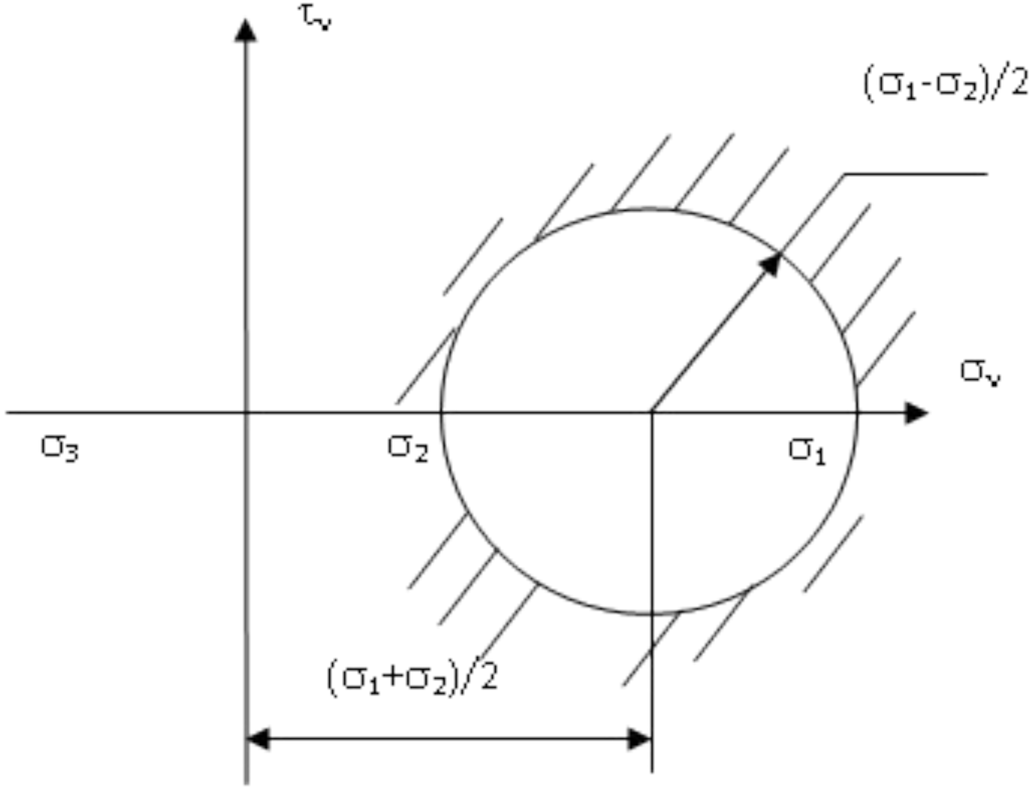
$$(\sigma - \sigma_2) \cdot (\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0,$$

$$(\sigma - \sigma_3) \cdot (\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0,$$

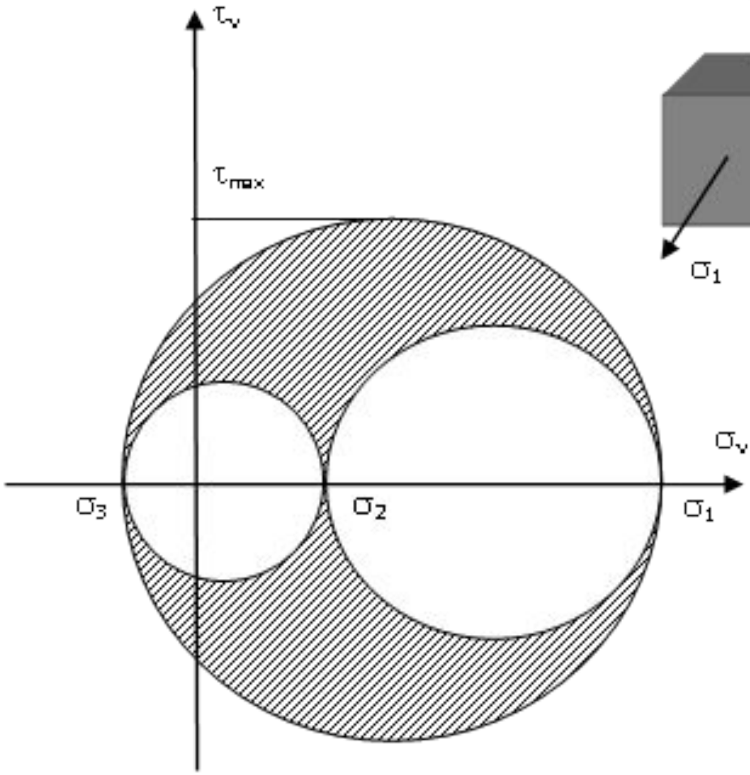
$$(\sigma - \sigma_1) \cdot (\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0.$$

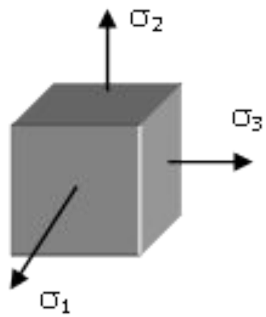
- Рассмотрим третье неравенство и представим его решение графически:

$$(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2+\tau^2 \geq (\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2})^2$$



Представим решение системы графически. Эта диаграмма называется **круговой диаграммой Мора**. Круговая диаграмма позволяет установить экстремальные свойства нормальных и касательных напряжений.





$$\left(\sigma-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2$$

- σ_1 - максимальное нормальное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке;

- σ_3 - минимальное нормальное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке;

- $\tau_{max} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$ - максимальное касательное напряжение, которое может возникнуть в точке на любой наклонной площадке, действует на площадках наклоненных к главным на угол 45°.