Классификация связей.
Принцип возможных перемещений.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.
ДИНАМИКА

ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

- Рассмотреть классификацию связей в динамике, познакомиться с принципом возможных перемещений и научиться с помощью этого принципа решать задачи статики.

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- Классификация связей;
- Принцип возможных перемещений;
- Решение задач;
- Заключение.

СВЯЗИ

- **В статике:**

Связи - то, что не даёт перемещаться

- Действие связей описывается реакциями.

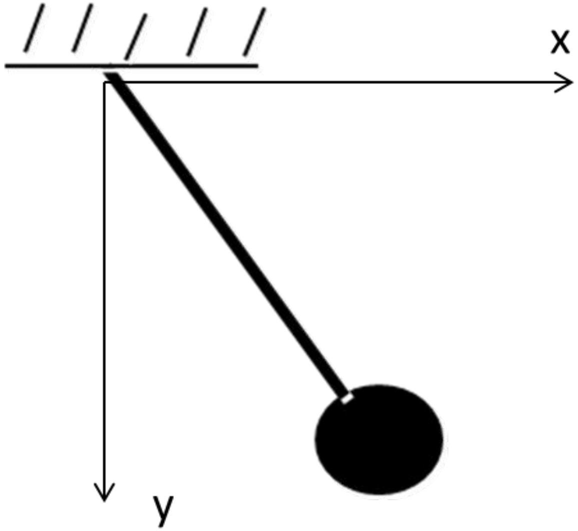
- **В аналитической механике:**

Связи - любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорость движущихся тел (точек).

- Действие связи описывается уравнениями (или неравенствами), которые определяют ограничения на движение тел.

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Односторонние** (неудерживающие, освобождающие) - связи, которые задаются неравенством: $\boxed{f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0}$

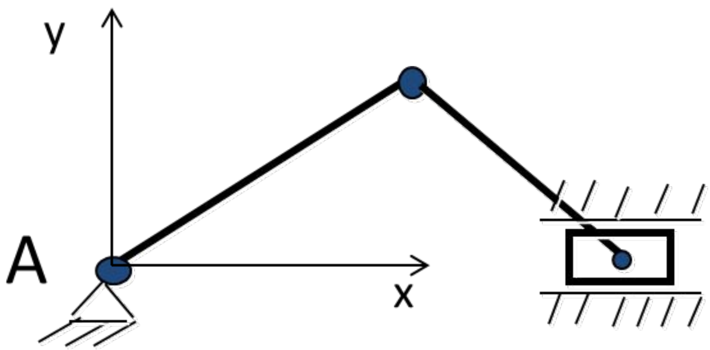


$$y^2 + x^2 - R^2 \leq 0$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Двусторонние** (удерживающие, неосвобождающие) – связи, которые задаются уравнением:

$$\boxed{f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0}$$



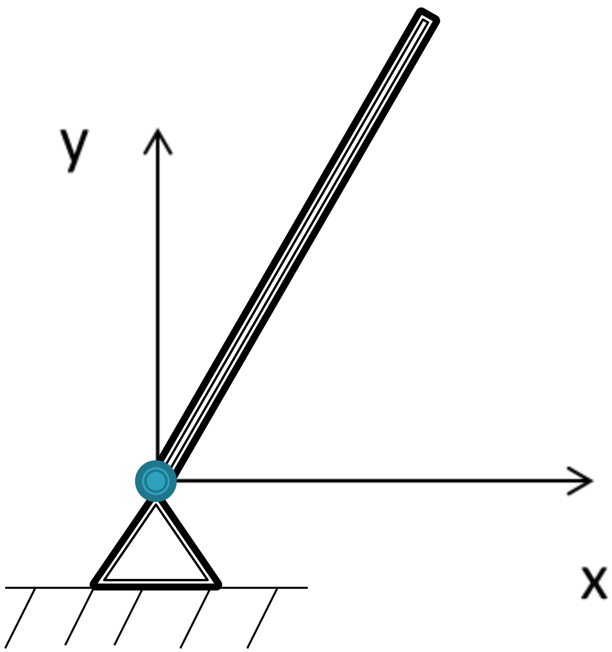
$$y_A = 0$$

$$x_A = 0$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Стационарные связи** - связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде:

$$\boxed{f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0}$$



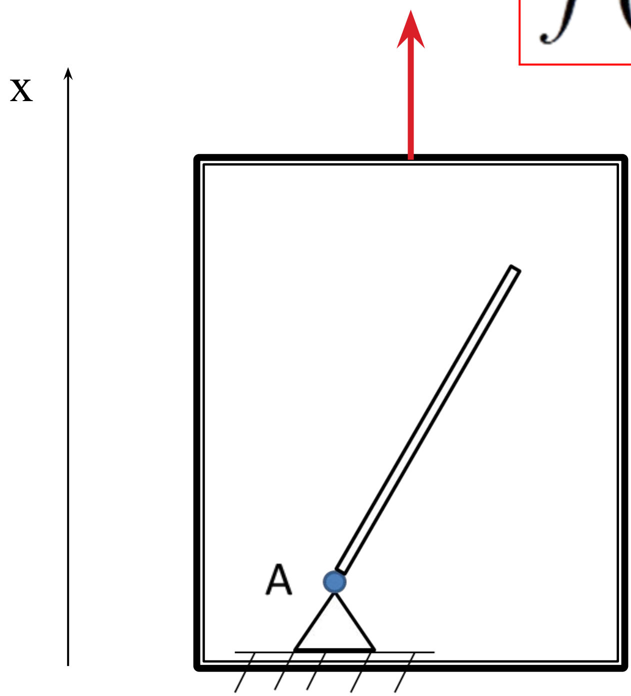
$$y_A = 0$$

$$x_A = 0$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Нестационарные** связи - связи, уравнения которых содержат время в явном виде:

$$\boxed{f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0}$$

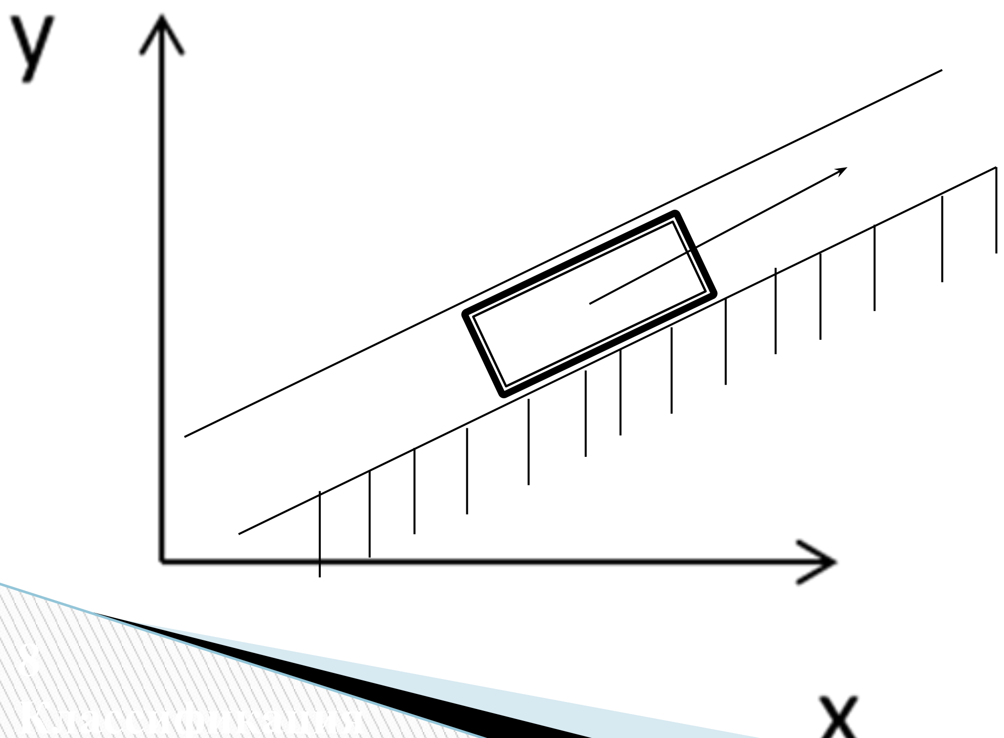


$$x = A \sin pt$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- Если уравнение связи не содержит в явном виде скорости, то связь называют **голономной (геометрической)**:

$$\boxed{f(t, x, y, z) = 0}$$

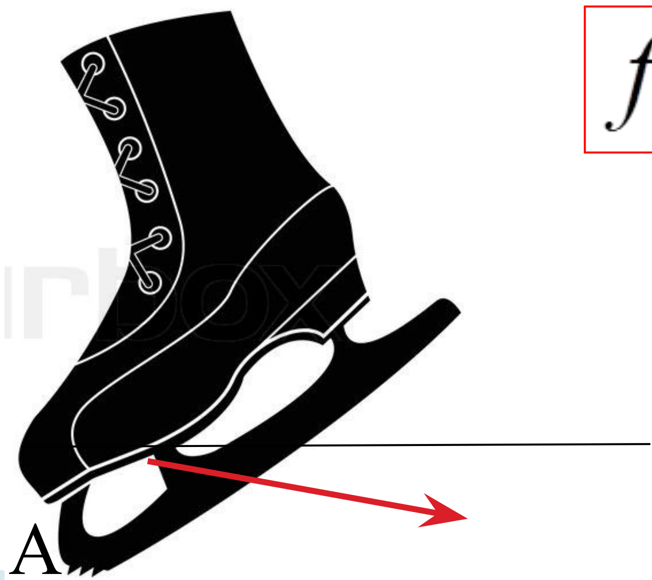


$$y = ax + b$$

КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- Если уравнение связи содержит в явном виде скорость, то связь называют **неголономной**:

$$\boxed{f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0}$$



ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

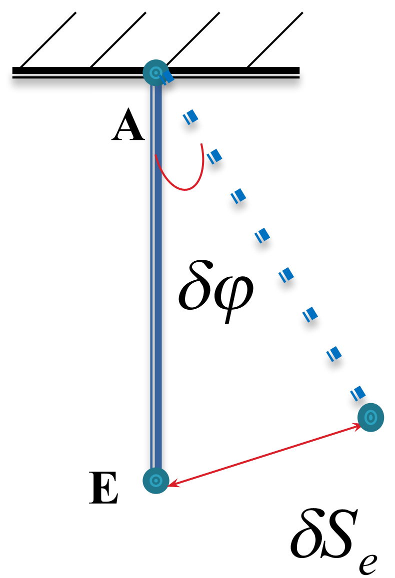
Далее будем рассматривать

двусторонние, голономные, стационарные связи

$$f(x, y, z) = 0$$

ВОЗМОЖНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

- **Возможное перемещение механической системы (δs, δx)** – любая совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.



ВОЗМОЖНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

- **Возможные перемещения характеризуются тем, что они:**
- могут и не происходить (они воображаемые);
- бесконечно малые;
- происходят с сохранением всех наложенных на систему связей;
- не связаны с реальным времененм ($\delta t = 0$).

Для стационарных связей действительное перемещение *dr* можно представить как набор возможных

ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА

- **Возможная работа** – это элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки:

$$\boxed{\delta A^{r} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}}$$

- Связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются **идеальными связями** :

$$\boxed{\sum_{k} \delta A^{r}{}_{k} = 0}$$

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

- Устанавливает общее условие равновесия механической системы в целом
- При идеальных связях позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей
- Выполняется в инерциальных системах отсчета

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\boxed{\sum_{k} \delta A_k{}^{a} = 0}$$

$\delta A^a = \overrightarrow{F^a} \cdot \delta\vec{r}$ - возможная работа активной силы $\overrightarrow{F^a}$.

Необходимость:

Пусть механическая система находится под действием внешних активных сил,
главный вектор которых: $\vec{F}^{a} = \sum \vec{F}^{a}_{k}$

На неё наложены голономные, стационарные связи: $\vec{R} = \sum_{k} \vec{R}_{k}$

Тогда, поскольку каждая из точек системы находится в равновесии:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k = 0 \Rightarrow \vec{F}_k \cdot \delta\vec{r}_k + \vec{R}_k \cdot \delta\vec{r}_k = 0 \Rightarrow \delta A_k^{a} + \delta A_k^{r} = 0$$

Просуммируем по всем точкам системы: $\sum_k \delta A_k^{a} + \sum_k \delta A_k^{r} = 0$

По определению идеальных связей: $\sum_k \delta A^{r}_{k} = 0$

$$\boxed{\sum_k \delta A_k{}^{a} = 0}$$

Достаточность:

Пусть механическая система с идеальными связями, удовлетворяющая неравенству $\sum_k \delta A_k{}^a = 0$ совершает действительное перемещение $d\vec{r_k}$

Тогда: $dT = \sum_k dA^a{}_k = \vec{F_k}^a \cdot d\vec{r^k}$ $\quad \sum_k dA_k{}^a > 0 \quad dT > 0$

При стационарных связях действительные перемещения совпадают с какими-либо возможными перемещениями:

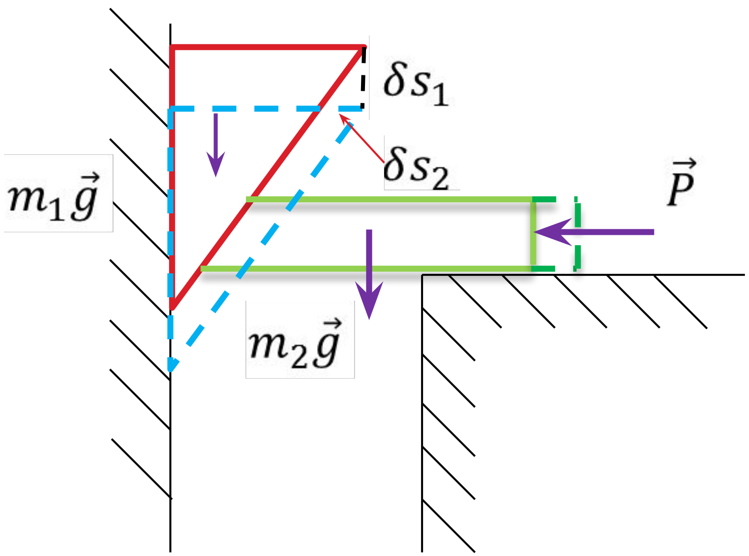
$$\sum_k \delta A_k{}^a = \sum_k dA_k{}^a \neq 0$$

Но это противоречит условию: $\sum_k \delta A_k{}^a = 0$

Когда приложенные силы к системе удовлетворяют этому условию, система из состояния покоя выйти не может, следовательно, это условие является достаточным условием равновесия системы.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- **Пример:** Найти величину силы P, удерживающей тяжелые гладкие призмы с массами m1 m2 в состоянии равновесия. Угол скоса призм равен α .



$$\delta A^a = \delta A(m_1\vec{g}) + \delta A(m_2\vec{g}) + \delta A(\vec{P})$$

$$\delta A^a = m_1 g\delta s_1 - P\delta s_2$$

$$\delta s_2 = \delta s_1 tg\alpha$$

$$(m_1 g - Ptg\alpha)\delta s_1 = 0$$

$$m_1 g - Ptg\alpha = 0$$

$$\boxed{P = \frac{m_1 g}{tg\alpha}}$$

- Принцип возможных перемещений позволяет решать самые разнообразные задачи на равновесие механических систем – находить неизвестные **активные силы**, определять **реакции связей**, находить положения равновесия механической системы под действием приложенной системы сил.

- **Пример:** Найти реакции, действующие на составную конструкцию