

Содержание

■ Лекция 1.

Кинематика точки. Способы задания движения. Уравнения движения. Траектория. Закон движения точки. Связь между тремя способами задания движения. Скорость точки. Ускорение точки. Равнопеременное движение точки.

■ Лекция 2.

Кинематика твердого тела. Виды движений. Поступательное движение. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение. Скорость и ускорение точки тела при вращательном движении. Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Уравнения движения.

■ Лекция 3.

Теорема о сложении скоростей. Следствия из теоремы. Мгновенный центр скоростей (МЦС). Примеры использования МЦС для определения скоростей. Теорема о сложении ускорений. Сложное движение точки. Теорема о сложении ускорений точки при сложном движении. Ускорение Кориолиса.

Лекция 1



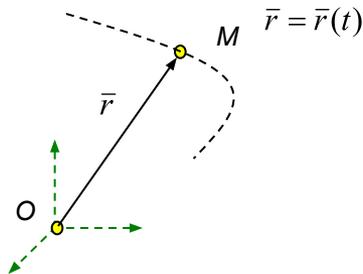
■ **Кинематика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение без учета сил, вызывающих это движение, состоит из двух отделов:

- **Кинематика точки** – изучает движение материальной точки, является базой для изучения движения точек твердого тела.
- **Задание движения точки** – необходимо иметь возможность определения положения точки в пространстве в любой момент времени (уравнения, геометрия механизма и известный закон движения ведущего звена).
- **Траектория движения точки** – совокупность положений точки в пространстве при ее движении.

Три способа задания движения точки:

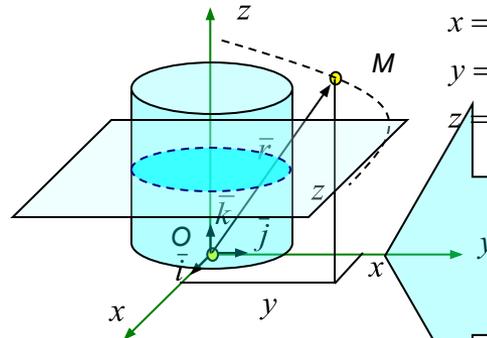
Векторный способ:

Задается величина и направление радиуса-вектора.



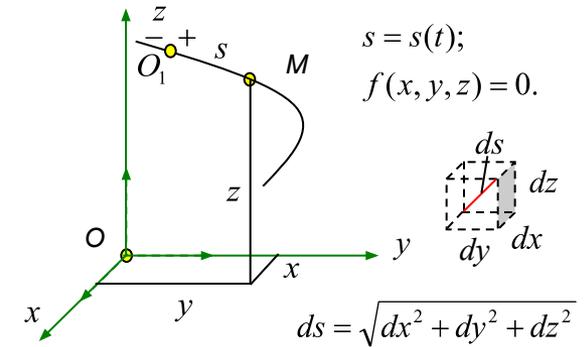
Координатный способ:

Задаются координаты положения точки.



Естественный способ:

Задаются закон движения точки и траектория.



$$\begin{aligned} x &= x(t); \\ y &= y(t); \\ z &= z(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= s(t); \\ f(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Все три способа задания эквивалентны и связаны между собой:

1. Векторный и координатный – **соотношением:**

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

3. Для получения уравнения траектории движения необходимо из уравнений движения координатного способа исключить время, т.к. траектория не зависит от времени:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \Rightarrow t = t(x); \\ y &= y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x); \\ z &= z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x). \end{aligned}$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения линейчатых поверхностей, линия пересечения которых и есть траектория движения точки.

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Например:

$$\begin{aligned} x &= t \Rightarrow t = x \\ y &= \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \text{ или } x^2 + y^2 = R^2; \\ z &= c. \end{aligned}$$

Последние два уравнения представляют собой **уравнения цилиндрической поверхности** радиуса R с образующей, параллельной оси z , и **плоской поверхности**, параллельной координатной плоскости Oxy и смещенной по оси z на величину c . Линия пересечения этих поверхностей (окружность радиуса R) - траектория движения точки.

2. Координатный и естественный – **соотношением:**

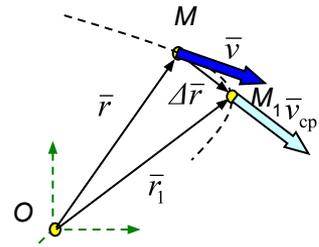
$$s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Лекция 1 (продолжение – 1.2)

- Скорость точки** – величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.

Три способа задания движения точки определяют способы определения скорости точки:

Векторный способ: Сравним два положения точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:



$$t \Rightarrow \vec{r}; \quad \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{cp} \quad \text{- вектор средней скорости в интервале времени } \Delta t, \text{ направлен по направлению вектора перемещения (хорде } MM_1).$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r} + \Delta \vec{r};$$

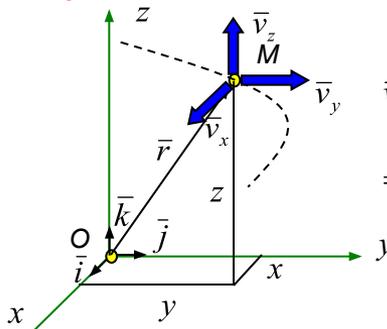
Устремим $\Delta t \rightarrow 0$ и перейдем к пределу: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}$ Предел отношения приращения функции к приращению аргумента есть производная функции (по определению): $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ - **вектор истинной скорости точки в момент времени t** , направлен по касательной к траектории (при приближении M_1 к M хорда занимает положение касательной).

Координатный способ: Связь радиуса-вектора с координатами определяется выражением:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Используем векторную форму определения скорости:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора скорости:

$$\vec{v}_x = \dot{x}(t)\vec{i};$$

$$\vec{v}_y = \dot{y}(t)\vec{j};$$

$$\vec{v}_z = \dot{z}(t)\vec{k}.$$

Проекция скорости на оси координат:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};$$

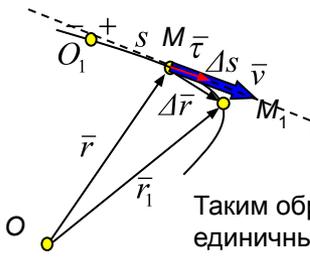
$$\cos(\vec{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v};$$

$$\cos(\vec{v}, y) = \frac{\dot{y}}{v}.$$

Естественный способ: Представим радиус-вектор как сложную функцию: $\vec{r}(t) = \vec{r}[s(t)]$.

Представим производную радиус-вектора как предел: $\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$.

Вектор приращения радиуса-вектора направлен по хорде MM_1 и в пределе занимает положение касательной.



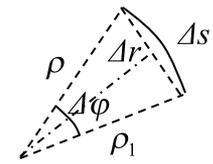
Величина производной радиуса-вектора по дуговой координате равна 1: $\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2\rho \sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\rho \Delta \phi} = 1$.

При $\Delta s \rightarrow 0$ радиус кривизны $\rho_1 \rightarrow \rho$, угол между радиусами кривизны $\Delta \phi \rightarrow 0$, числитель - основание равнобедренного треугольника, знаменатель - длина круговой дуги радиуса ρ .

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуговой координате есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Вектор скорости равен: $\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}$. **Проекция скорости на касательную:** $v_\tau = \dot{s}$

При $\dot{s} > 0$ вектор скорости направлен в сторону увеличения дуговой координаты, в противном случае - в обратную сторону.



Лекция 1 (продолжение – 1.3)

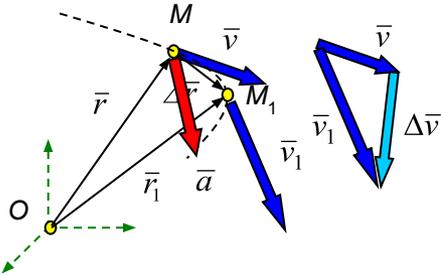
Ускорение точки – величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.

Три способа задания движения точки определяют способы определения ускорения точки:

Векторный способ: Сравним скорости точки в двух положениях точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \Rightarrow \vec{v};$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta \vec{v};$$



$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_{\text{cp}}$ – вектор среднего ускорения в интервале времени Δt , направлен в сторону вогнутости траектории.

Переходя к пределу получаем:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ – **вектор истинного ускорения точки в момент времени t** , лежит в соприкасающейся плоскости (предельное положение плоскости, проведенной через касательную в точке M и прямую, параллельную касательной в точке M_1 , при стремлении M_1 к M) и направлен в сторону вогнутости траектории.

Координатный способ: Используем полученное векторное выражение и связь радиуса-вектора с координатами $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$



$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}] = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:

$$\vec{a}_x = \frac{d^2 x}{dt^2};$$

$$\vec{a}_y = \frac{d^2 y}{dt^2};$$

$$\vec{a}_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

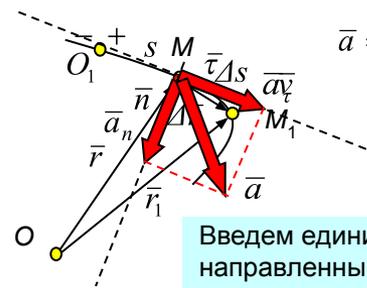
Проекция ускорения на оси координат:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos(\vec{a}, x) = \frac{a_x}{a};$$

$$\cos(\vec{a}, y) = \frac{a_y}{a};$$

Естественный способ: Используем векторное выражение



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\tau \dot{s}) = \dot{\tau} \dot{s} + \tau \frac{d\dot{s}}{dt}$$

Величина производной единичного касательного по дуговой координате:

Таким образом **полное ускорение точки есть векторная сумма двух ускорений: касательного**, направленного по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты, если $\dot{s} > 0$ (в противном случае – в противоположную) и **нормального ускорения**, направленного по нормали к касательной в сторону центра кривизны (вогнутости траектории):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

Введем единичный вектор \vec{n} , нормальный (перпендикулярный) к касательной, направленный к центру кривизны.

С использованием вектора \vec{n} и ранее определенных величин ускорение представляется как сумма векторов:

$$\vec{a} = \dot{\tau} \dot{s} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}.$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:

$$\vec{a}_\tau = \dot{\tau} \dot{s};$$

$$\vec{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{n}.$$

касательной к траектории.

Проекция ускорения на оси T и n :

$$a_{\tau\tau} = \dot{\tau} \dot{s}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Лекция 1 (продолжение 1.4)

- Равнопеременное движение точки** – движение точки по траектории, при котором касательное ускорение не изменяется по величине.

$$a_{\tau\tau} = \ddot{v} = \text{const}. \quad \text{Запишем выражение для касательного ускорения через проекцию скорости: } a_{\tau\tau} = \ddot{v} = \frac{d}{dt} \dot{v} = \frac{dv_{\tau}}{dt}$$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

$$dv_{\tau} = a_{\tau\tau} dt \quad \int_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} dv_{\tau} = a_{\tau\tau} \int_0^t dt; \quad v_{\tau} \Big|_{v_{\tau 0}}^{v_{\tau}} = a_{\tau\tau} t \Big|_0^t; \quad v_{\tau} - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau} t \quad v_{\tau} = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t$$

- скорость точки при равнопеременном движении

В свою очередь скорость точки также связывается с дуговой координатой дифференциальной зависимостью: $v_{\tau} = \frac{ds}{dt}$ или $ds = v_{\tau} dt$.

После подстановки выражения для скорости и интегрирования получаем: $\int_{s_0}^s ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau} t) dt; \quad s \Big|_{s_0}^s = (v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}) \Big|_0^t; \quad s - s_0 = v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}. \quad s = s_0 + v_{\tau 0} t + a_{\tau\tau} \frac{t^2}{2}$

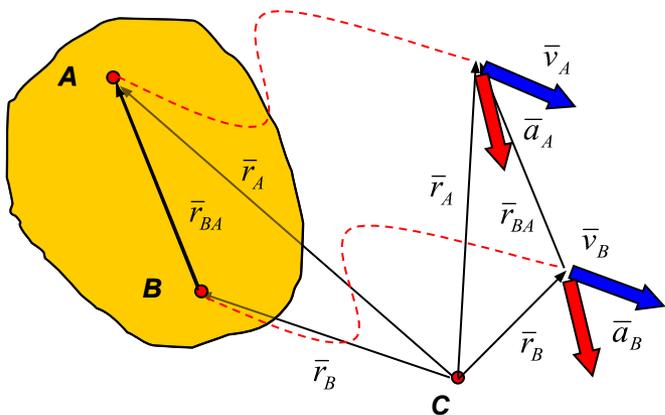
- дуговая координата точки при равнопеременном движении

- Классификация движений точки.**

№ пп	\bar{a}_{τ}	\bar{a}_n	Вид движения	
			Закон движения	Траектория
1	$= 0 [t, t_1]$	$= 0 [t, t_1]$	равномерное ($v = \text{const}$)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
2	$= 0 [t, t_1]$	$\neq 0 [t, t_1]$	равномерное ($v = \text{const}$)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
2.1	в момент времени t	$= 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$), в момент времени t $v = \text{max}$	прямолинейное ($\rho = \infty$)
2.2		$\neq 0 [t, t_1]$		криволинейное ($\rho \neq \infty$)
3	$\neq 0 [t, t_1]$	$= 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
3.1		$= 0$ в момент времени t	перемена направления движения ($v = 0$ при $t=t$)	любая траектория
3.2		$\neq 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$)	перегиб траектории ($\rho = \infty$ при $t=t$)
4	$\neq 0 [t, t_1]$	$\neq 0 [t, t_1]$	неравномерное ($v \neq \text{const}$)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
5	$= \text{const} [t, t_1]$	любое	равнопеременное	любая траектория

Лекция 2

- **Кинематика твердого тела** – изучает движение твердого тела, кинематика точки используется для получения новых зависимостей и формул.
- **Поступательное движение твердого тела** – такое движение при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе. Обычно поступательное движение отождествляется с прямолинейным движением его точек, однако это не так. Точки и само тело (центр масс тела) могут двигаться по криволинейным траекториям, см. например, движение кабины колеса обозрения.
- **Теорема о поступательном движении твердого тела** – При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения.



Проведем радиус-векторы к двум точкам A и B , а также соединим эти точки вектором r_{BA} .

В любой момент времени выполняется векторное равенство: $\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) + \vec{r}_{BA}$.

В любой момент времени вектор r_{BA} **остаётся постоянным по направлению** (по определению поступательного движения) **и по величине** (расстояние между точками не изменяется). Отсюда: $\vec{r}_A(t) = \vec{r}_B(t) + \overline{\vec{r}_{BA}}$, и это означает, что в каждый момент времени положение точки A отличается от положения точки B на одну и ту же величину $r_{BA} = \text{const}$, т.е. **траектории** этих двух точек **тождественны** (совпадают друг с другом при наложении).

Продифференцируем по времени левую и правую часть соотношения: $\frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_B(t)}{dt}$

и это означает, что в каждый момент времени **скорость точки A равна геометрически** (т.е. векторно) **скорости точки B** . $\vec{v}_A(t) = \vec{v}_B(t)$.

Второе дифференцирование по времени приводит к соотношению: $\frac{d^2\vec{r}_A(t)}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_B(t)}{dt^2}$

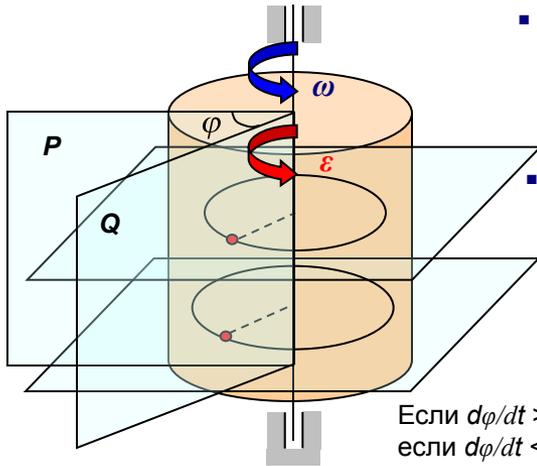
и это означает, что в каждый момент времени **ускорение точки A равно геометрически** (т.е. векторно) **ускорению точки B** . $\vec{a}_A(t) = \vec{a}_B(t)$.

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной точки, принадлежащей этому телу и выбранной произвольным образом. Все параметры движения этой точки (траектория, скорость и ускорение) описываются уравнениями и соотношениями кинематики точки.

Лекция 2 (продолжение – 2.2)



- **Вращательное движение твердого тела** – движение при котором все его точки движутся в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной прямой, и описывают окружности с центрами, лежащими на этой прямой, называемой **осью вращения**.



Если $d\varphi/dt > 0$, то вращение происходит в сторону увеличения угла поворота, если $d\varphi/dt < 0$, то вращение происходит в сторону уменьшения угла поворота.

- **Задание вращательное движения** – движение задается законом изменения двугранного угла φ (угла поворота), образованного неподвижной плоскостью P , проходящей через ось вращения, и плоскостью Q , жестко связанной с телом:

$$\varphi = \varphi(t) \quad \text{- уравнение вращательного движения}$$

- **Угловая скорость** – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота.

$$t \Rightarrow \varphi; \quad \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{\text{cp}} \quad \text{- средняя угловая скорость в интервале времени } \Delta t,$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi;$$

Устремим $\Delta t \rightarrow 0$ и перейдем к пределу: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ - истинная угловая скорость в момент времени t

Угловая скорость изображается дуговой стрелкой в сторону вращения.

- **Угловое ускорение** – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.

$$t \Rightarrow \omega; \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{cp}} \quad \text{- среднее угловое ускорение в интервале времени } \Delta t,$$

$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega;$$

Устремим $\Delta t \rightarrow 0$ и перейдем к пределу: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ - истинное угловое ускорение в момент времени t

Угловое ускорение изображается дуговой стрелкой в сторону увеличения угла поворота при $\ddot{\varphi} > 0$.

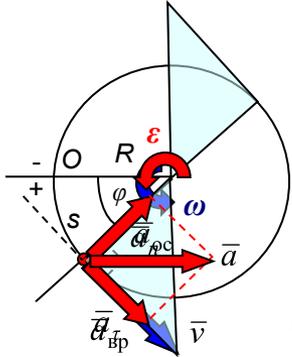
Если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ одного знака, то скорость увеличивается по модулю и вращение называется ускоренным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в одну сторону), если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ разного знака, то скорость уменьшается по модулю и вращение называется замедленным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в противоположные стороны).

- **Равномерное вращение** – угловая скорость не изменяется по величине. $\omega = const.$ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega t.$
- **Равнопеременное вращение** – угловое ускорение не изменяется по величине.

$$\varepsilon = const. \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt; \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \quad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Лекция 2 (продолжение 2.3)

- **Скорость точки при вращательном движении твердого тела** – траектория точки известна (окружность радиуса R – расстояние точки до оси вращения), можно применить формулу для определения скорости точки при естественном задании движения: $v_\tau = \dot{s}$



Дуговая координата связана с радиусом окружности:

$$s = \varphi R.$$

Тогда проекция скорости

$$\text{на касательную к окружности: } v_\tau = \frac{d}{dt}(\varphi R) = \frac{d\varphi}{dt} R = \omega R.$$

Поскольку далее работают с модулем угловой скорости после изображения ее в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для модуля скорости: $v = \omega \cdot R$ и вектор скорости направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки угловой скорости.**

Как следует из формулы **скорость точки пропорциональна расстоянию ее до оси вращения** (радиусу вращения).

- **Ускорение точки при вращательном движении твердого тела** – траектория точки известна, можно применить формулы для определения ускорений точки при естественном задании движения:

Тогда проекции ускорения на касательную к окружности и нормаль:

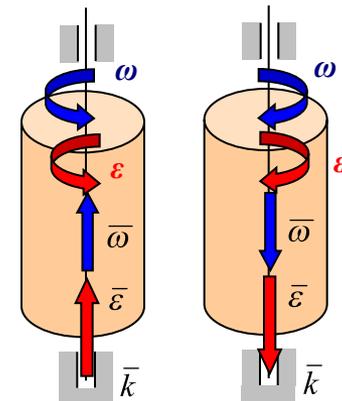
$$a_\tau = \varepsilon R. \quad a_n = \omega^2 R.$$

Поскольку далее работают с модулем углового ускорения после изображения его в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для касательного ускорения: $a_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot R$ и вектор этого ускорения, называемого **вращательным ускорением**, направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки углового ускорения.**

Нормальное ускорение теперь называется **осестремительным ускорением** $a_{\text{ос}} = \omega^2 \cdot R$, его направляют **по радиусу к оси вращения** независимо от направления дуговой стрелки угловой скорости, не говоря уж о направлении дуговой стрелки углового ускорения.

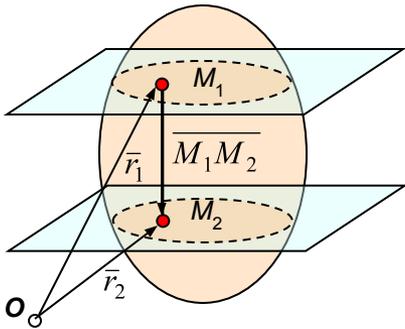
Как следует из формул **оба ускорения точки пропорциональны расстоянию ее до оси вращения** (радиусу вращения).

Полное ускорение точки, как и ранее, есть **векторная сумма** этих ускорений: $\bar{a} = \bar{a}_{\text{вр}} + \bar{a}_{\text{ос}}$.



Лекция 2 (продолжение 2.4)

- **Плоскопараллельное движение твердого тела** – движение при котором каждая точка тела движется в в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости. Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.



- **Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела** – плоскопараллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям:

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки O и свяжем их между собой вектором $\overline{M_1M_2}$:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

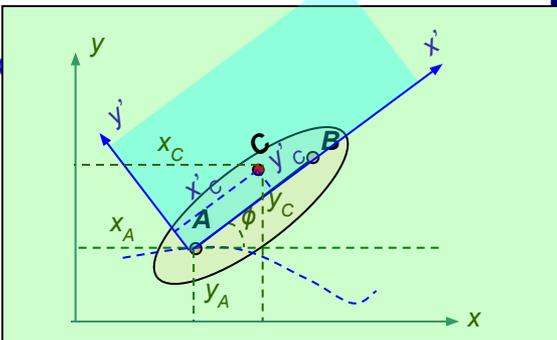
При плоском движении тела вектор $\overline{M_1M_2}$ не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = const); \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1, \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1.$$

Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

Следствие: Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то **плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями.**

- **Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения** – Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса:



Таким образом, **плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения.**

Уравнение движения плоской фигуры: Выбирая в качестве полюса любую точку, например, A , поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки. Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса:

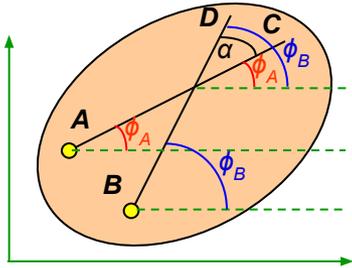
$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}$$

Уравнения движения любой точки плоской фигуры, положение которой задается координатами локальной системы отсчета, связанной с фигурой:

$$\begin{aligned} x_C &= x_A(t) + x'_C \cos \varphi(t) - y'_C \sin \varphi(t); \\ y_C &= y_A(t) + x'_C \sin \varphi(t) + y'_C \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

Лекция 3

- Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса** – Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках:



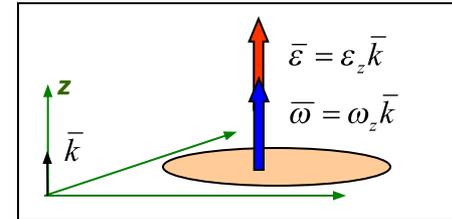
Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением: $\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha$.

Продифференцируем это соотношение: $\frac{d\varphi_B(t)}{dt} = \frac{d\varphi_A(t)}{dt}$, ($\alpha = const$).

Отсюда следует, что **угловые скорости** двух отрезков **равны**: $\omega_{CA} = \omega_{DB}$.

После повторного дифференцирования следует, что **угловые ускорения** двух отрезков также **равны**: $\frac{d\omega_{CA}}{dt} = \frac{d\omega_{DB}}{dt}$. $\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}$.

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры:



- Теорема о сложении скоростей** – Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Радиусы-векторы точек A и B связаны между собой соотношением:

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB}(t).$$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\vec{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}(t)}{dt}.$$

Второе слагаемое есть вращательная скорость точки B вокруг полюса A:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AB}(t); \quad |\vec{r}_{AB}| = const.$$

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{v}_{BA}(t)$$

Таким образом, скорость точки B равна геометрической сумме скорости полюса A и вращательной скорости точки B вокруг полюса:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}.$$

- Следствие 1** – Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны.

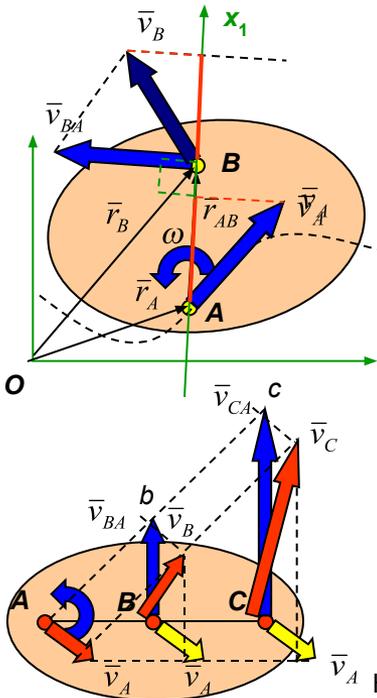
Спроецируем векторное соотношение на ось x_1 : $(x_1): v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\vec{v}_{BA} \perp x_1)$.

- Следствие 2** – Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.

Концы векторов вращательных скоростей точек B и A лежат на одной прямой и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

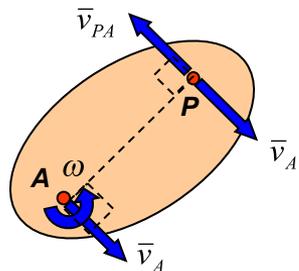
Концы векторов скоростей полюса A лежат, изображенных в точках B и C также лежат на одной прямой. $v_{BA} = \omega AB, \quad v_{CA} = \omega AC, \quad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}$.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов скоростей точек B и C также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.



Лекция 3 (продолжение 3.1)

- Мгновенный центр скоростей (МЦС)** – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю.



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки P согласно теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}. \quad \text{Зададим значение скорости этой точки } P \text{ равной нулю: } \vec{v}_P = 0.$$

Тогда получаем: $\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = -\vec{v}_A$. Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки A , параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

Это позволяет найти положение МЦС (точки P), а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки A , отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии:

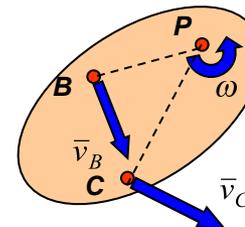
$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МЦС. В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BP}; \quad (\vec{v}_P = 0); \quad v_B = \omega \cdot BP;$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{v}_{CP}; \quad (\vec{v}_P = 0); \quad v_C = \omega \cdot CP;$$

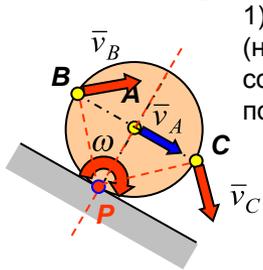
Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС.**



Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры** – Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1) Дано: \mathbf{v}_A , положения точек A, B, C , проскальзывание отсутствует.
Найти: $\mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору \mathbf{v}_A (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения).

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \frac{v_A}{AP}$.

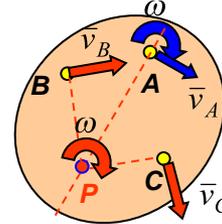
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости \mathbf{v}_A .

3) Соединяем точки B и C с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$v_B = \omega \cdot BP; \quad \text{Векторы линейных скоростей } \mathbf{v}_B \text{ и } \mathbf{v}_C \text{ направлены}$$

$$v_C = \omega \cdot CP. \quad \text{в сторону дуговой стрелки угловой скорости.}$$

2) Дано: \mathbf{v}_A, ω , положения точек A, B, C .
Найти: $\mathbf{v}_B, \mathbf{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору \mathbf{v}_A

2) Определяем расстояние до МЦС:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

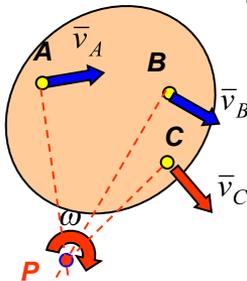
Расстояние AP откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС.

3) Соединяем точки B и C с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$v_B = \omega \cdot BP; \quad \text{Векторы линейных скоростей } \mathbf{v}_B \text{ и } \mathbf{v}_C \text{ направлены}$$

$$v_C = \omega \cdot CP. \quad \text{в сторону дуговой стрелки угловой скорости.}$$

3) Дано: $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, положения точек A, B, C .
Найти: \mathbf{v}_C



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP}$.

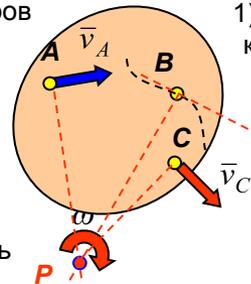
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$.

3) Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости \mathbf{v}_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4) Дано: \mathbf{v}_A , траектория точки B , положения точек A, B, C .
Найти: \mathbf{v}_C



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору \mathbf{v}_A и касательной к траектории точки B .

2) Определяем угловую скорость: $\omega = \frac{v_A}{AP}$.

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости \mathbf{v}_A .

3) Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

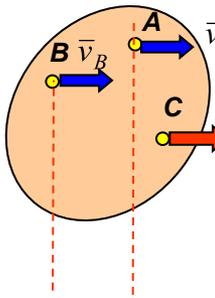
$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости \mathbf{v}_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Лекция 3 (продолжение 3.3)

Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры

5 Дано: $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, положения точек A, B, C .
Найти: \vec{v}_C



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров \vec{v}_A к векторам \vec{v}_A и \vec{v}_B . Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

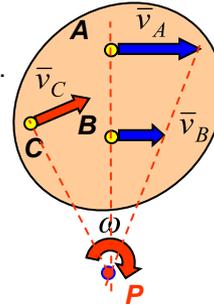
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Скорость точки C равна геометрически скоростям точек A и B :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

Вектор скорости точки C направлен параллельно векторам скоростей точек A и B (в ту же сторону).

6 Дано: $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$, положения точек A, B, C .
Найти: \vec{v}_C



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам \vec{v}_A и \vec{v}_B . Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС $\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}$. (проводим линию через концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B) и угловую скорость:

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей \vec{v}_A, \vec{v}_B .

3) Соединяем точку C с МЦС и определяем скорость этой точки:

$\vec{v}_C = \omega \cdot CP$. Вектор линейной скорости \vec{v}_C направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.

Скорости точек A и B связаны между собой соотношением:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}).$$

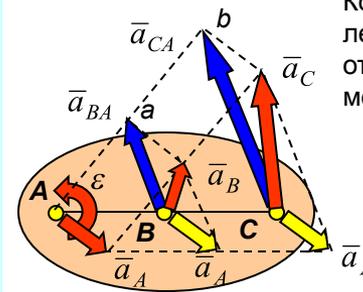
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осестремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{bp} + \vec{a}_{BA}^{oc} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.



Концы векторов ускорений точек \vec{a}_{BA} и \vec{a}_{CA} лежат на одной прямой abc и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AB,$$

$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AC.$$

Концы векторов ускорений полюса A , изображенных в точках B и C , лежат также лежат на одной прямой.

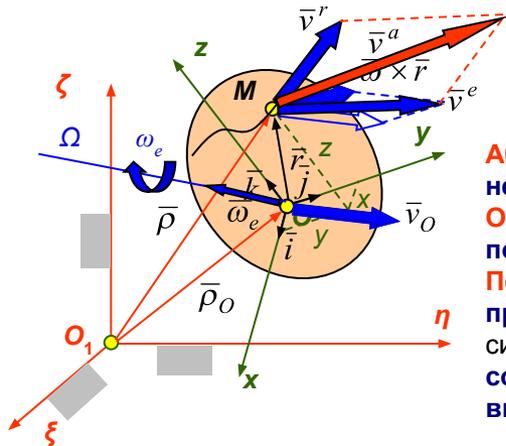
Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек B и C также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.

Лекция 3 (продолжение 3.4)

Сложное движение точки – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.

Примеры сложного движения точки (тела): лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору; камень подвижной кулисы, поршень качающегося цилиндра; шары центробежного регулятора Уатта.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются **неподвижная система отсчета $O_1\xi\eta\zeta$** , связанная с каким-либо условно неподвижным телом, например, с Землей, и **подвижная система отсчета $Oxyz$** , связанная с каким-либо движущимся телом.



Абсолютное движение (a) - движение точки, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета. **Относительное движение (r)** - движение точки, рассматриваемое относительно подвижной системы отсчета.

Переносное движение (e) - движение подвижной системы отсчета, рассматриваемое относительно неподвижной системы отсчета.

Абсолютная скорость (ускорение) точки v^a (a^a) - скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

Относительная скорость (ускорение) точки v^r (a^r) - скорость (ускорение) точки, вычисленная относительно подвижной системы отсчета.

Переносная скорость (ускорение) точки v^e (a^e) - скорость (ускорение) точки, принадлежащей подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, совпадающей с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и вычисленная относительно неподвижной системы отсчета.

Теорема о сложении скоростей – абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени имея в виду, орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

Здесь первое слагаемое (v_O) - скорость полюса O ; следующие три – **относительная скорость точки (v^r)**.

Для последних трех слагаемых следует определить производные по времени от ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{i});$$

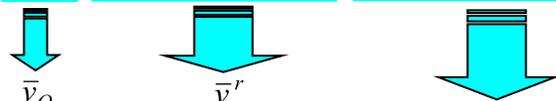
Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора ρ есть абсолютная скорость, получаем:

$$\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$|\bar{v}^a| = \sqrt{|\bar{v}^r|^2 + |\bar{v}^e|^2 + 2|\bar{v}^r||\bar{v}^e|\sin(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.$$

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$



Подставим векторные произведения

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) =$$

в последние три слагаемые: $= \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$

Сумма первого и последнего слагаемого

– скорость точки свободного тела есть **переносная скорость точки (v^e)**: $\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.$

Лекция 3 (продолжение 3.5)

Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) – абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.

Было получено ранее соотношение для скорости:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k} + x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\frac{d^2\bar{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{\rho}_O}{dt^2} + \bar{x}\bar{i} + \bar{y}\bar{j} + \bar{z}\bar{k} + \bar{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \bar{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \bar{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \bar{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \bar{z}\frac{d\bar{k}}{dt} + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}.$$

Здесь первое слагаемое (\bar{a}_O) - ускорение полюса O; следующие три – **относительное ускорение точки** (\bar{a}^r).

$$\bar{a}_O$$

$$\bar{a}^r$$

$$\bar{a}^c$$

$$\bar{a}^e$$

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{i});$$

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{j});$$

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{k}).$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2\left[\bar{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \bar{y}\frac{d\bar{j}}{dt} + \bar{z}\frac{d\bar{k}}{dt}\right] = 2\left[\bar{x}(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{i}) + \bar{y}(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{j}) + \bar{z}(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{k})\right] = 2(\frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times \bar{v}^r).$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем:

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки** (\bar{a}^e):

$$\begin{aligned} & \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times x\bar{i} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times x\bar{i}) + \\ & \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times y\bar{j} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times y\bar{j}) + \\ & \frac{d\bar{\omega}_e}{dt} \times z\bar{k} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times z\bar{k}) = \\ & = \bar{\varepsilon}_e \times \bar{r} + \bar{\omega}_e \times (\bar{\omega}_e \times \bar{r}). \end{aligned}$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **кориолисово ускорение** (\bar{a}^c):

$$\bar{a}^c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}^r).$$

Таким образом, с учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора $\bar{\rho}$ есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\bar{a}^a = \bar{a}^r + \bar{a}^e + \bar{a}^c.$$

Величина и направление ускорения Кориолиса:

Модуль вектора кориолисова ускорения:

Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

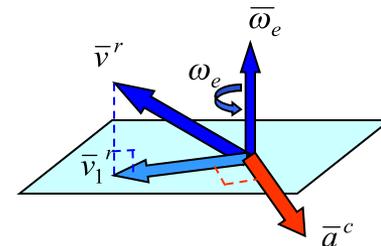
1. Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
2. Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

а) Спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости.

Направление вектора кориолисова ускорения:

Определяется по одному из трех правил:

1. По определению векторного произведения.
2. По правилу правой руки.
3. **По правилу Жуковского:**



б) Повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.