

Тема: Физические основы механики

Содержание лекции:

1. Математическая справка:
§3. Элементы математического анализа.

2. Элементы кинематики
§1. Пространство, время, системы отсчета.
§2. Кинематика материальной точки.

Векторное произведение

- Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, модуль которого

$$|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

- а) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- б) из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ (первого сомножителя) к вектору $\vec{b}$ (второму сомножителю) виден против часовой стрелки. (Начала векторов предполагаются совмещенными).

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

§3. Элементы математического анализа

- **Производная.** Если $f(x)$ - непрерывная функция одной переменной, то ее производной называется

$$f'_x = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Пример: $(x^2)' = 2 \cdot x;$
 $(16x^3)' = 16 \cdot 3x^2 = 48x^2.$

- **Частная производная.** $f(x, y, z)$ - непрерывная функция нескольких переменных. Частной производной по одной из переменных называется:

$$\left(3x^2 + 2y^3\right)'_x = 6x; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x};$$

$$\left(3x^2 + 2y^3\right)'_y = 6y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

- Полная производная сложной функции $f(x, y, z, t)$,

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$,

t – параметр (время).

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Таблица производных

Функция	Производная
$y = C, \quad C = Const$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Правила дифференцирования

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(cu)' = cu', c = \textit{const}$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(f(u(x)))'_x = f'_u(u(x)) \cdot u'(x)$$

- ***Неопределенный интеграл***

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (U + V - W) dx = \int U dx + \int V dx - \int W dx$$

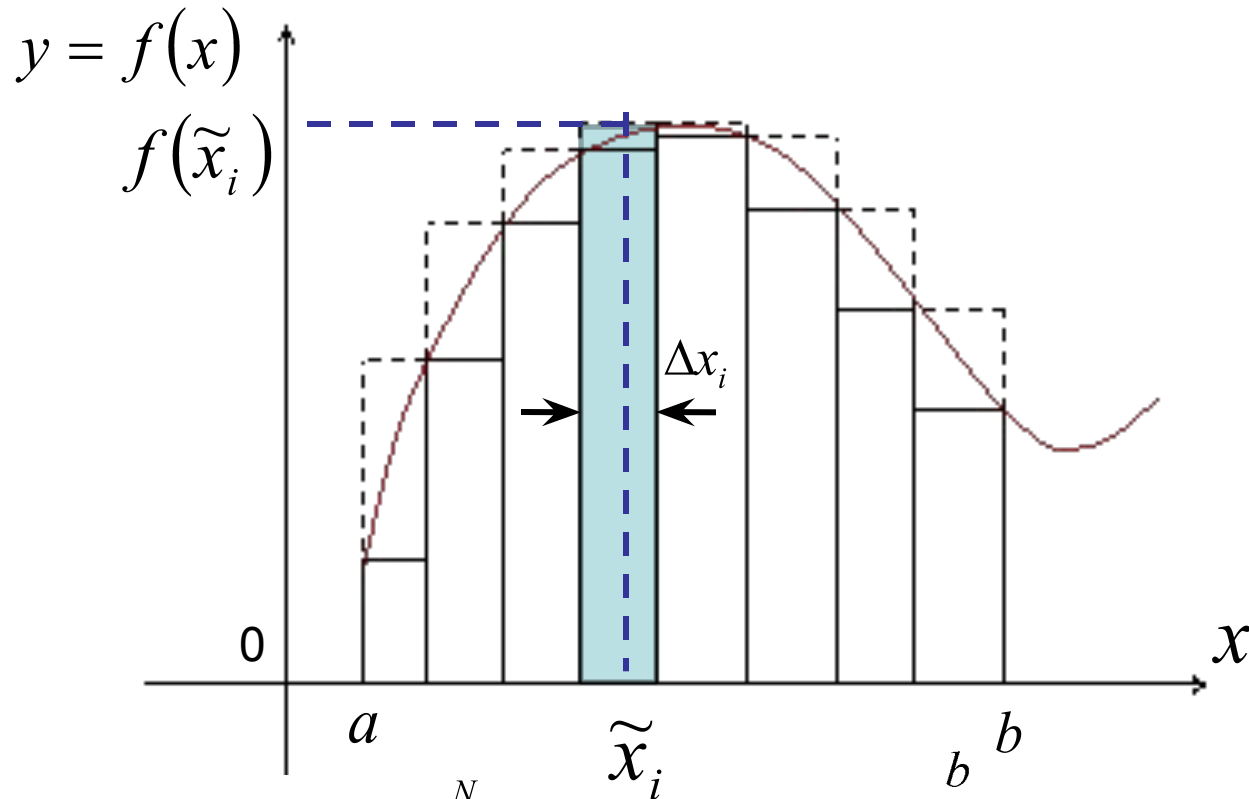
$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Определенный интеграл



$$S = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(\tilde{x}_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Элементы кинематики

§1. Пространство, время. Системы отсчета

Пространство и время - формы существования материи, органически связанные между собой:

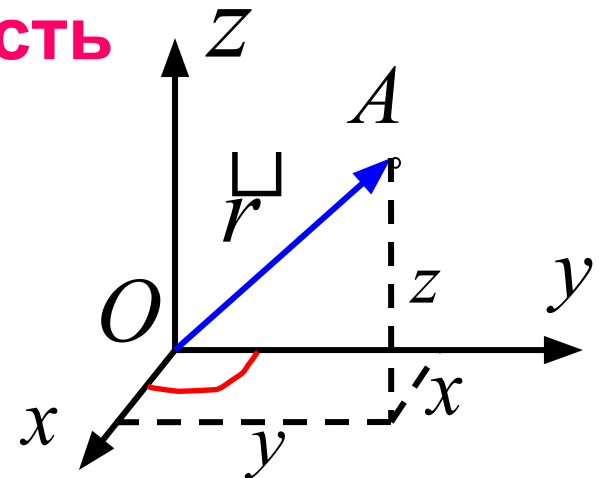
наблюдаемый мир четырехмерен.

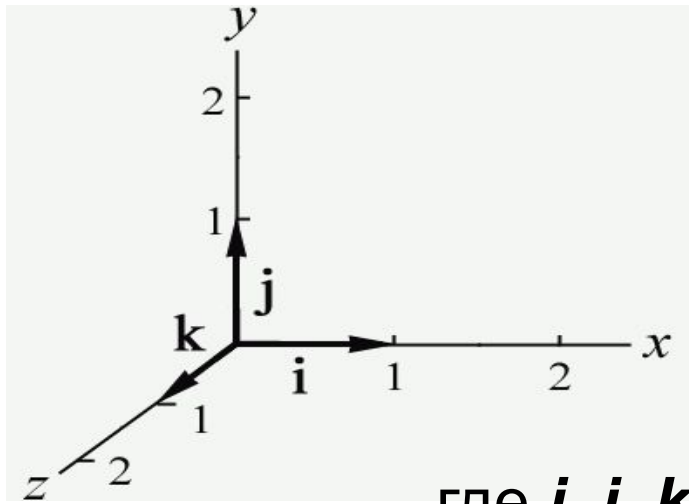
Пространство - порядок существования материальных объектов. **Время** - порядок смены явлений.

Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчета, поэтому *механическое движение относительно.*

Тело отсчета Произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел.

Система отсчета – **это совокупность** тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов.





$$\vec{k} = [\vec{i}, \vec{j}], \quad \vec{i} = [\vec{j}, \vec{k}], \quad \vec{j} = [\vec{k}, \vec{i}]$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы
(орты).

Число независимых координат, однозначно определяющих положение тела (или системы тел) в пространстве, называется **числом степеней свободы** тела (или системы тел).

Любые k величин $q_1, q_2, \dots, q_k$, однозначно определяющие положение системы, называются **обобщенными координатами**.

- **Свободная материальная точка:**

число степеней свободы $k = 3$;

- ***N-точек:*** $k = 3N$.

- **Точка не свободна, а движется по поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат**

Три координаты x, y, z связаны между собой соотношением

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

т.е. $k = 3 - n = 3 - 1 = 2$, где n – число связей.

Обобщенные координаты: $q_1 = x, q_2 = y$ или $q_1 = \alpha, q_2 = \Theta$.

- **Точка движется по заданной кривой например**, точка движется по окружности R в плоскости oxy , (две связи $n=2$):

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – уравнение сферы и $z = 0$ – уравнение плоскости

$$k = 3 - n = 3 - 2 = 1.$$

Обобщенные координаты $q = x$ или $q = \alpha$.

В общем случае число степеней свободы тела или системы тел, и, следовательно, обобщенных координат $k = 3N - n$, где N – число материальных точек входящих в состав тела.

- **«Жесткий» треугольник** $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$:
 $k = 3N - n = 6$,

где $n = 3$ – число связей на координаты. Уравнения связей:

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \text{const}$$

$$l_{13} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2} = \text{const}$$

$$l_{32} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2} = \text{const}$$

Моделирует абсолютно твердое тело, у которого тоже будет 6 степеней свободы. Из них 3 описывают поступательное движение, 3 – вращательное.

- Для определения положения необходимо задать:

1) x, y, z ; 2) $\Theta, \phi; \alpha$.

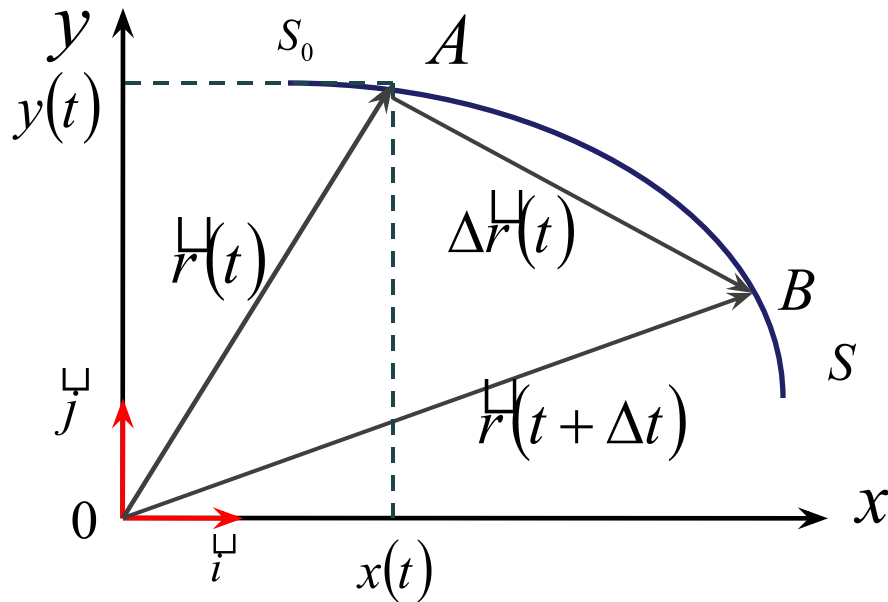
Если тело закреплено в точке (еще три дополнительные связи), то тело может лишь вращаться вокруг этой точки, остается только три степени свободы.

У твердого тела, которое может вращаться вокруг закрепленной оси, остается одна степень свободы, характеризуемая одной обобщенной координатой – углом поворота вокруг этой оси.

§2. Кинематика материальной точки

Имеем **материальную точку** – тело, размерами, формой и внутренним строением которого можно пренебречь.

Для описания механического движения введем СО:



S – линия, которую описывает при своем движении точка – **траектория**.

$\vec{r}(t)$ – радиус – вектор. $\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Кинематические уравнения движения - это уравнения, с помощью которых описываются изменения положения материальной точки в пространстве и времени

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Вектор перемещения - Вектор, соединяющий начальную $\vec{r}(t)$ и конечную $\vec{r}(t + \Delta t)$ точки движения с конечной (2).

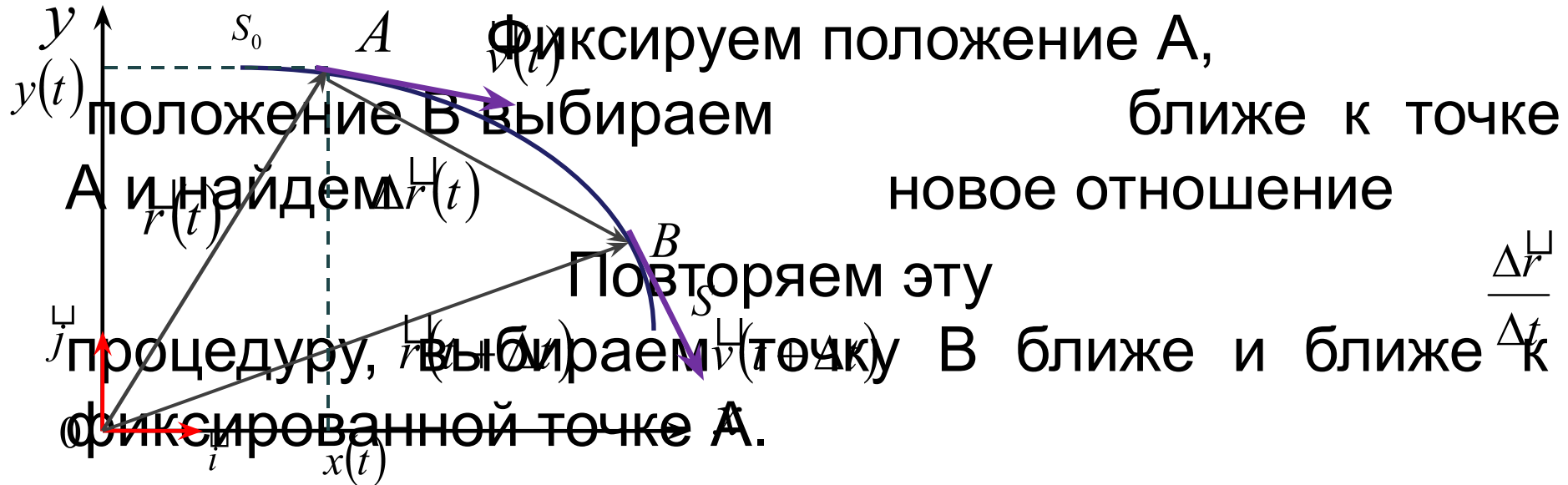
Путь S - расстояние, пройденное точкой вдоль траектории движения от начальной точки (1) до конечной (2), величина скалярная.

При **прямолинейном** движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения равен пройденному пути:

$$S = |\Delta \vec{r}|$$

Рассмотрим еще раз рисунок. Возьмем отношение

$$\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_{cp}(t, t + \Delta t) \quad \text{- вектор средней скорости перемещения между точками A и B.}$$



Предел последовательности указанного отношения дает мгновенную скорость материальной точки в положении A.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Из способа нахождения мгновенной скорости ясно, что она всегда **направлена по касательной к траектории.**

$$\vec{v} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x', \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y', \quad v_z = \frac{dz}{dt} = z'$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Вектор мгновенной скорости определяет быстроту изменения радиус-вектора $\mathbf{r}$ со временем, т.е. быстроту изменения положения точки в пространстве.

Аналогично определяется и вектор мгновенного ускорения.

Выберем два последовательных положения материальной точки A и B .

Найдем мгновенную скорость в этих

положениях и

1) Перенесем вектор параллельно самому себе из B в A .

2) Найдем разность $\Delta \vec{v}$ векторов $\vec{v}(t + \Delta t)$ и $\vec{v}(t)$.

Отношение $\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ представляет собой

вектор среднего ускорения между точками A и B .

3) Будем повторять процедуру, постоянно приближаясь к фиксированной точке A . Предел последовательности таких отношений (предел средних ускорений) – мгновенное ускорение материальной точки в положении A :

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Ускорение и его составляющие

Ускорение – Характеристика неравномерного движения, определяющая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение – векторная величина, равная отношению изменения скорости к промежутку времени, за которое это изменение произошло.

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение – векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{i} \frac{dv_x(t)}{dt} + \vec{j} \frac{dv_y(t)}{dt} + \vec{k} \frac{dv_z(t)}{dt} = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z$$

1 м/с^2 - ускорение прямолинейного
ускоренного движения точки, **при**
котором за 1 с скорость точки
изменяется на 1 м/с.



Тангенциальная составляющая Характеризует быстроту изменения скорости **по модулю**
 (направлена по касательной к траектории)

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$$

Нормальная составляющая Характеризует быстроту изменения скорости по направлению
 (направлена к центру кривизны траектории)

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Полное ускорение – геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n$$

- **Задача 1.** Уравнение движения материальной точки вдоль оси ОХ имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1,5$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Найти:
 1. Координату x , скорость v_x , ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с.
 2. Среднюю скорость и среднее ускорение за этот промежуток времени.

Решение:

$$x = \left(A + Bt + Ct^3 \right)_{t=2c} = 2м + 1,5м / с \cdot 2с + \left(-0,5м / с^3 \right) \cdot (2с)^3 = \\ = 2м + 3м - 4м = 1м$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1,5м / с + 3 \cdot \left(-0,5м / с^3 \right) \cdot (2с)^2 = \\ = 1,5м / с - 6м / с = -4,5м / с$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6Ct = 6 \cdot \left(-0,5м / с^3 \right) \cdot 2с = -6м / с^2$$

Средняя скорость – отношение всего пути, пройденного телом ко времени. Найдем значение времени, когда тело изменило направление движения на противоположное. В этот момент времени мгновенная скорость равна 0.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 0, \quad t_1^2 = -\frac{B}{3C},$$

$$t_1 = \sqrt{-\frac{B}{3C}} = \sqrt{\frac{1,5\text{ м/с}}{3 \cdot 0,5\text{ м/с}^2}} = 1\text{ с}$$

Определим путь за время 2 с:

$$S_1 = A + Bt + Ct^3 = 2\text{ м} + 1,5\text{ м/с} \cdot 1\text{ с} - 0,5\text{ м/с}^3 \cdot (1\text{ с})^3 = 3\text{ м},$$

$$S_2 = A + Bt_1 + Ct_1^3 = 2\text{ м} + 1,5\text{ м/с} \cdot (2\text{ с} - 1\text{ с}) - 0,5\text{ м/с}^3 \cdot (2\text{ с} - 1\text{ с})^3 = 3\text{ м}$$

$$S = \underset{\substack{\text{до} \\ \text{изменения} \\ \text{направления} \\ \text{движения} \\ \text{на обратное}}}{S_1} + \underset{\text{после}}{S_2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 6\text{ м}$$

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{6\text{ м}}{2\text{ с}} = 3\text{ м/с}$$

Среднее ускорение – $\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

v_2 - скорость в момент времени $t_2 = 2$ с.

v_1 - скорость в момент времени $t_1 = 0$ с.

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1,5 \text{ м/с} + 3 \cdot (-0,5 \text{ м/с}^3) \cdot (2\text{с})^2 = \\ = 1,5 \text{ м/с} - 6 \text{ м/с} = -4,5 \text{ м/с}$$

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2 = 1,5 \text{ м/с} + 3 \cdot (-0,5 \text{ м/с}^3) \cdot (0\text{с})^2 = \\ = 1,5 \text{ м/с} - 0 \text{ м/с} = 1,5 \text{ м/с}$$

$$\langle a_x \rangle = \frac{-4,5 \text{ м/с} - 1,5 \text{ м/с}}{2\text{с}} = -3 \text{ м/с}^2$$

Задача 2. Электрон движется в некоторой системе отсчета из начального положения, определяемого радиус-вектором $\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + z_0 \vec{k}$, где $x_0 = 3$ м, $z_0 = 1$ м с начальной скоростью $\vec{v}_0 = v_{0y} \vec{j}$, где $v_{0y} = 2$ м/с и ускорением $\vec{a}(t) = A t \vec{i} + B \vec{k}$, где $A = 12$ м/с², $B = 8$ м/с².

Найти:

1. Координату z электрона в момент времени $t = 0,5$ с.
2. Скорость электрона в момент времени $t = 1$ с,
3. Угол между радиусом-вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$ в момент времени $t = 0$ с.

Решение:

2) Модуль скорости, если ускорение зависит от времени определяется:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt$$

Модуль ускорения:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Кинематические уравнения скоростей:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x dt = v_{0x} + \int_0^t A t dt = v_{0x} + \frac{A t^2}{2};$$

$$v_y = v_{0y};$$

$$v_z = v_{0z} + \int_0^t a_z dt = v_{0z} + \int_0^t B dt = v_{0z} + B t;$$

Учитываем начальные условия $v_{0x} = v_{0z} = 0$, $v_{0y} = 2$ м/с

$$v_x = \frac{At^2}{2}; \quad v_y = v_{0y}; \quad v_z = Bt;$$

Вектор модуля скорости:

$$\vec{v} = \frac{At^2}{2} \vec{i} + v_{0y} \vec{j} + Bt \vec{k} = 6t^2 \vec{i} + 2 \vec{j} + 8t \vec{k},$$

Модуль скорости в момент времени $t = 1$ с:

$$v = \sqrt{\left(\frac{At^2}{2}\right)^2 + (v_{0y})^2 + (Bt)^2} = \sqrt{(6t^2)^2 + (2)^2 + (8t)^2} = 10,2$$

1) Координата z электрона в момент времени $t = 0,5$ с:

$$z = z_0 + \int_0^{0,5} Btdt = z_0 + \frac{Bt^2}{2} \Big|_0^{0,5} = 1 + \frac{8(0,5^2 - 0^2)}{2} = 1 + 1 = 2 \text{ м}$$

3) Угол между радиусом–вектором $\vec{r}$ и вектором скорости $\vec{v}$ в момент $t = 0$ с определим, используя скалярное произведение этих векторов:

$$\frac{(\vec{r}_0, \vec{v}_0)}{|\vec{r}_0| \cdot |\vec{v}_0|} = \cos \alpha, \quad \vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + z_0 \vec{k}, \quad \vec{v}_0 = v_{0y} \vec{j}.$$

$$\begin{aligned} (\vec{r}_0, \vec{v}_0) &= (x_0 \vec{i} + z_0 \vec{k}) \cdot (v_{0y} \vec{j}) = \\ &= x_0 v_{0y} (\vec{i}, \vec{j}) + z_0 v_{0y} (\vec{k}, \vec{j}) = \left\{ \begin{aligned} (\vec{i}, \vec{j}) &= 0 \\ (\vec{k}, \vec{j}) &= 0 \end{aligned} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha = \arccos(0) = \pi/2.$$

Задача 3. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $x(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0,5$ м/с².

Найти:

1. Скорость автомобиля v , его тангенциальное ускорение a_τ , нормальное a_n и полное ускорения a в момент времени $t = 5$ с.
2. Длину пути и модуль перемещения автомобиля за интервал времени $\tau = 10$ с, отсчитанный с момента начала движения.

Решение:

1) Мгновенная скорость – первая производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 2Ct = \{10 + 2 \cdot (-0,5) \cdot 5\} \text{ м/с} = 5 \text{ м/с}.$$

Тангенциальное ускорение найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = 2C, \quad a_{\tau} = 2 \cdot (-0,5) = -1 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{5^2}{50} = 0,5 \text{ м/с}^2$$

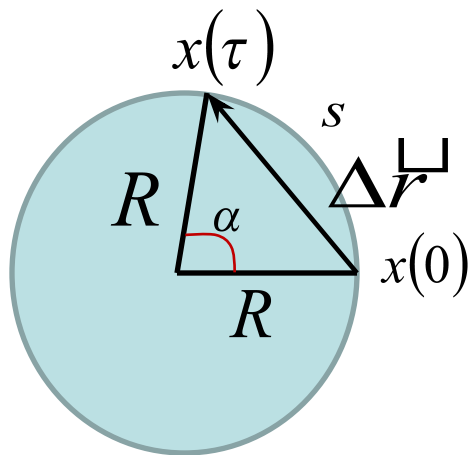
Полное ускорение $\vec{a} = \vec{a}_{\tau} + \vec{a}_n$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{(-1)^2 + (0,5)^2} = 1,12 \text{ м/с}^2$$

2) Путь, пройденный автомобилем в одном направлении, равен изменению координаты:

$$s = x(\tau) - x(t_0) = A + B\tau + C\tau^2 - (A + 0 + 0) = B\tau + C\tau^2 = 10 \cdot 10 + (-0,5) \cdot 10^2 = 50 \text{ м.}$$

Модуль перемещения:



$$|\Delta \vec{r}| = 2R \sin(\alpha/2),$$

$$\alpha = \frac{s}{R} (\text{рад})$$

$$|\Delta \vec{r}| = 2R \sin\left(\frac{s}{2R}\right) = 2 \cdot 50 \cdot \sin\left(\frac{50}{2 \cdot 50}\right) = 47,9 \text{ м.}$$

1. Средняя скорость

Задача 1. Первую четверть пути автомобиль двигался со скоростью 60 км/ч, остальной путь – со скоростью 20 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля.

Решение: Средняя скорость $v_{cp} = \frac{S}{t}$

Полное время движения равно сумме времен движения на отдельных участках:

$$t = \frac{s/4}{v_1} + \frac{3s/4}{v_2}.$$

Подставляем:

$$t = s/v_{cp}$$

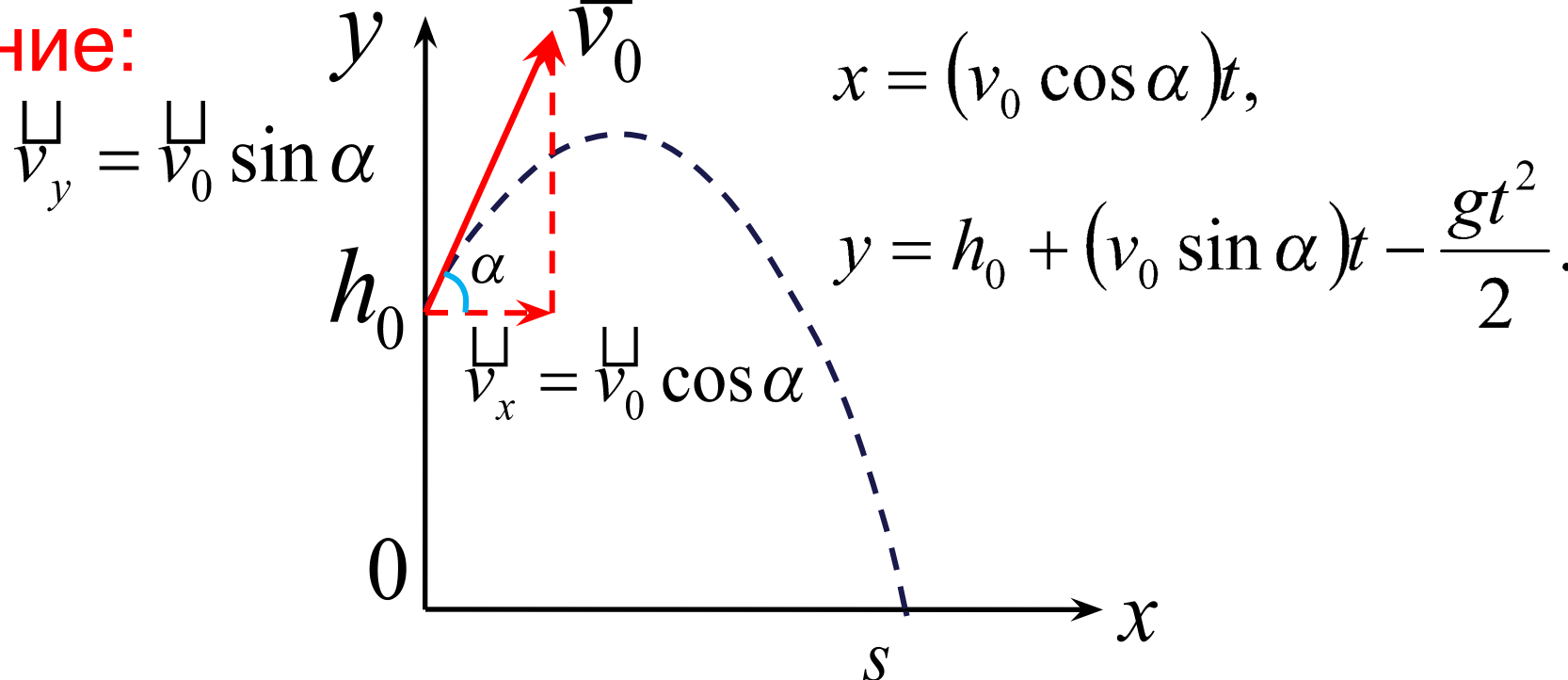
Получим:

$$v_{cp} = \frac{4v_1v_2}{3v_1 + v_2} = 24 \text{ км/ч.}$$

2. Бросок под углом

Задача 2. Из окна, находящегося на высоте $h_0 = 7,5$ м, бросают камень под углом 45° к горизонту. Камень упал на расстоянии $s = 15$ м от стены дома. С какой скоростью v_0 был брошен камень?

Решение:



Запишем зависимость координат камня от времени

Учтем, что в момент падения $x = s, \quad y = 0$.
Из первого уравнения выразим время

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

Подставим во второе уравнение

$$y = h_0 + (v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$
$$y = h_0 + stg\alpha - \frac{g}{2} \left(\frac{s}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 = 0$$
$$v_0 = \left(\frac{gs^2}{2 \cos^2 \alpha (h_0 + stg\alpha)} \right)^{1/2} = 10 \text{ м/с.}$$

3. Движение в поле тяжести

Задача 3. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 50$ м/с. Через сколько секунд его скорость будет равна $v = 30$ м/с и направлена вниз.

Решение: Формулы равноускоренного движения действуют все время равноускоренного движения.

- Направим ось ОУ вертикально вверх.
- Воспользуемся формулой: $v_y = v_{0y} + a_y t$.
- В данном случае $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$, $v_y = -v$.

Получаем:

$$-v = v_0 - gt, \quad t = \frac{(v + v_0)}{g} = 8 \text{ с.}$$

Проверка: за время $t_1 = v_0/g = 5$ с – поднимается вверх, а затем за $t_2 = t - t_1 = 3$ с набирает скорость $v = g t_2 = 30$ м/с.