Электричество и магнетизм

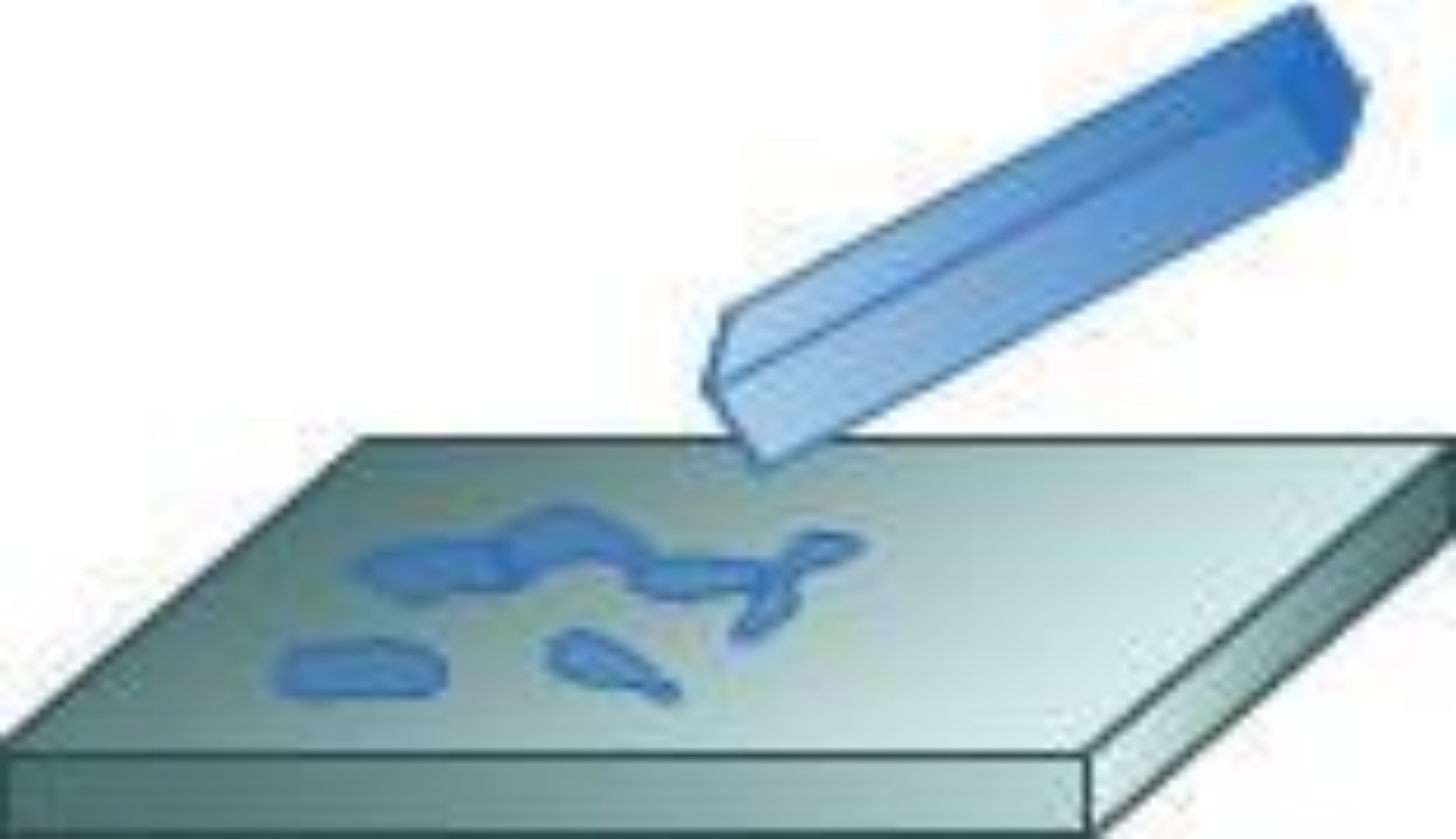
Закон Кулона. Напряженность. Электрический диполь. Потенциал.

электростатика

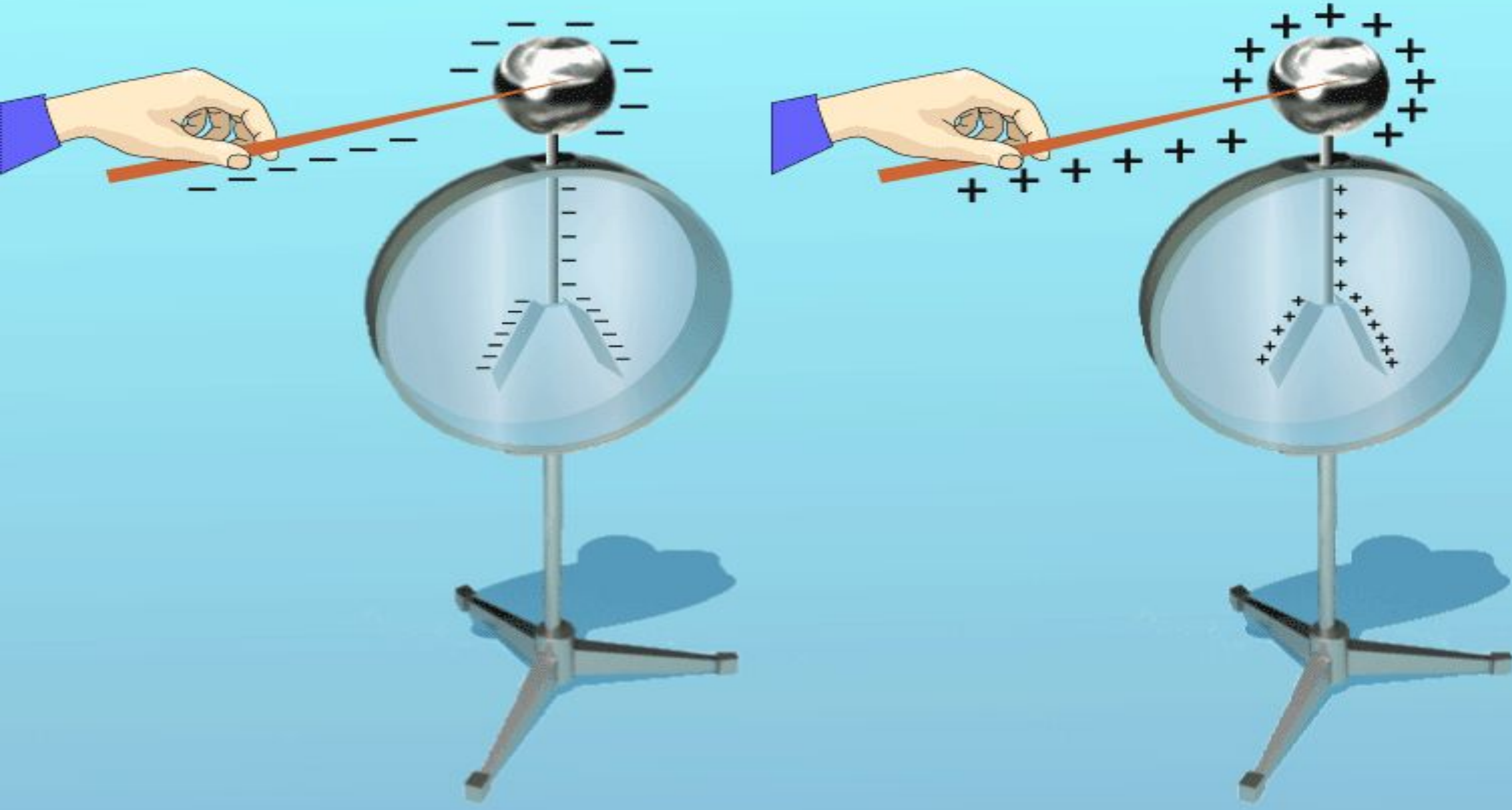
План лекции

- Электрический заряд и его свойства
- Закон сохранения заряда. Закон Кулона.
- Напряжённость электростатического поля.
- Линии напряжённости электростатического поля. Поток вектора напряжённости.
- Принципы суперпозиции. Поле диполя.
- Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме.
- Циркуляция вектора напряжённости электростатического поля.

Электризация



Электроскоп



Закон сохранения заряда

- Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы остаётся неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри данной системы.

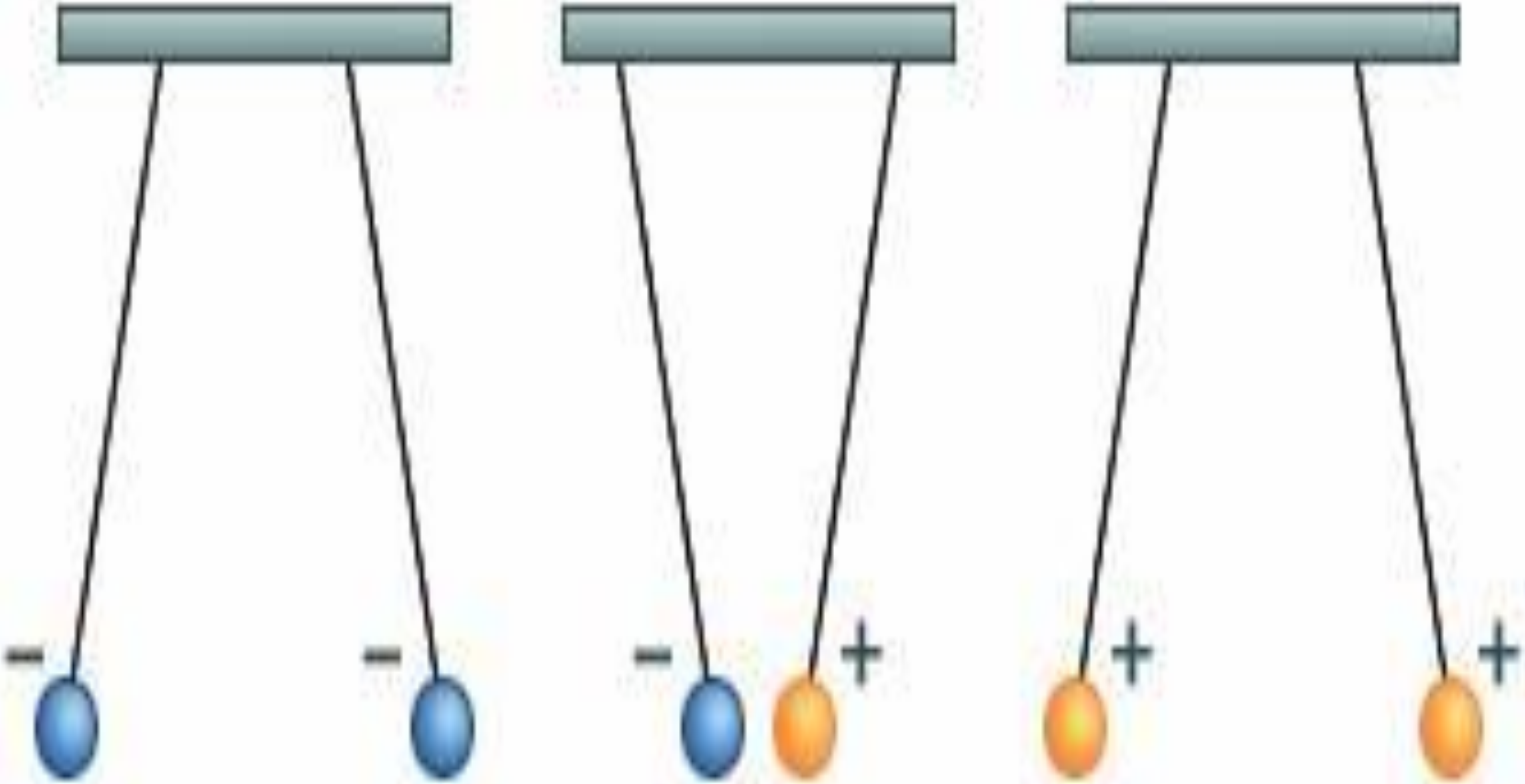
- Замкнутая система – система, не обменивающая зарядами с внешними телами

Закон сохранения электрического заряда

В электрически изолированной системе, т. е. в системе, которая не обменивается зарядами с внешними телами, алгебраическая сумма электрических зарядов является величиной постоянной:

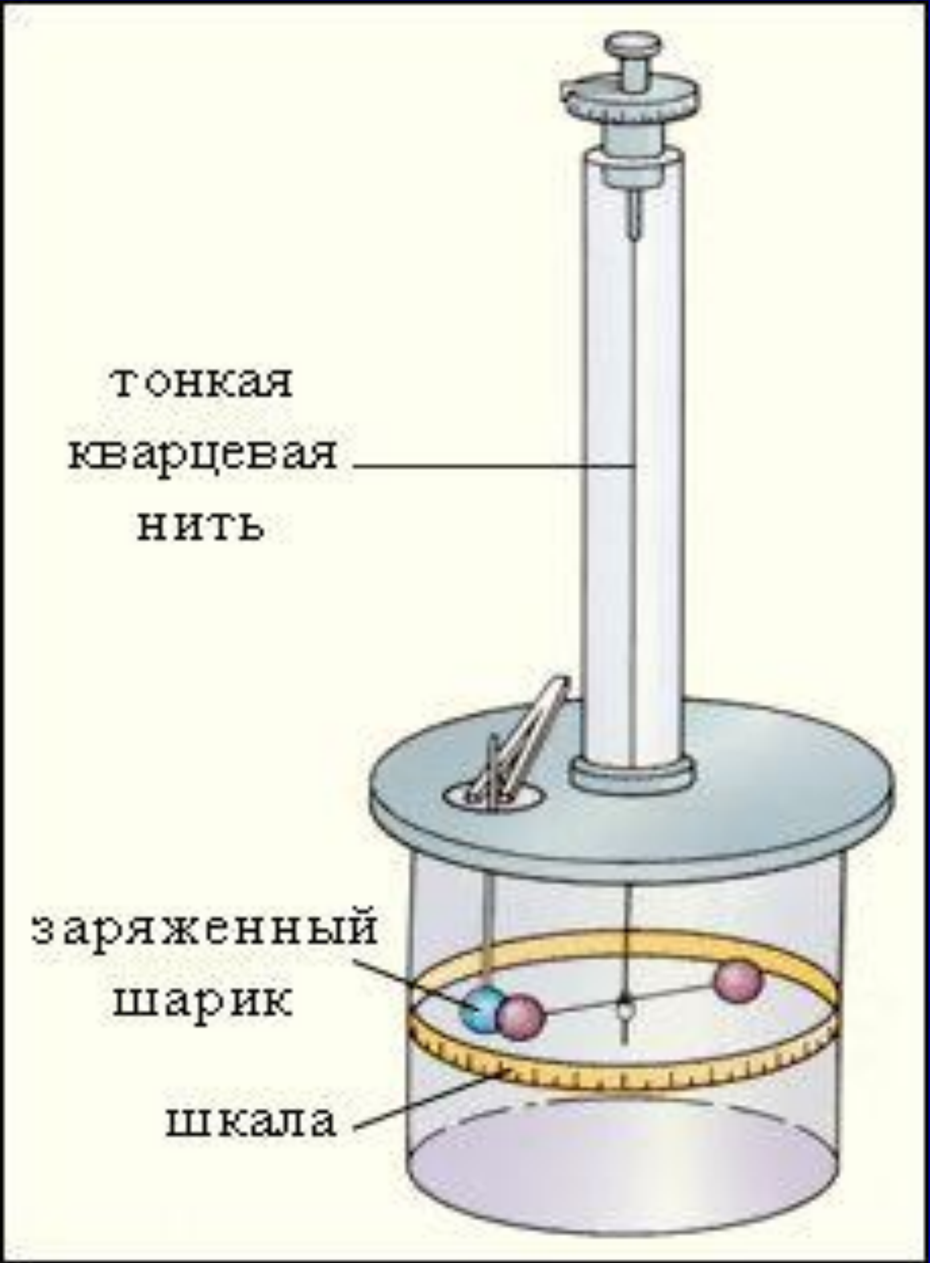
$$\sum_{i=1}^{n} q_i = const$$

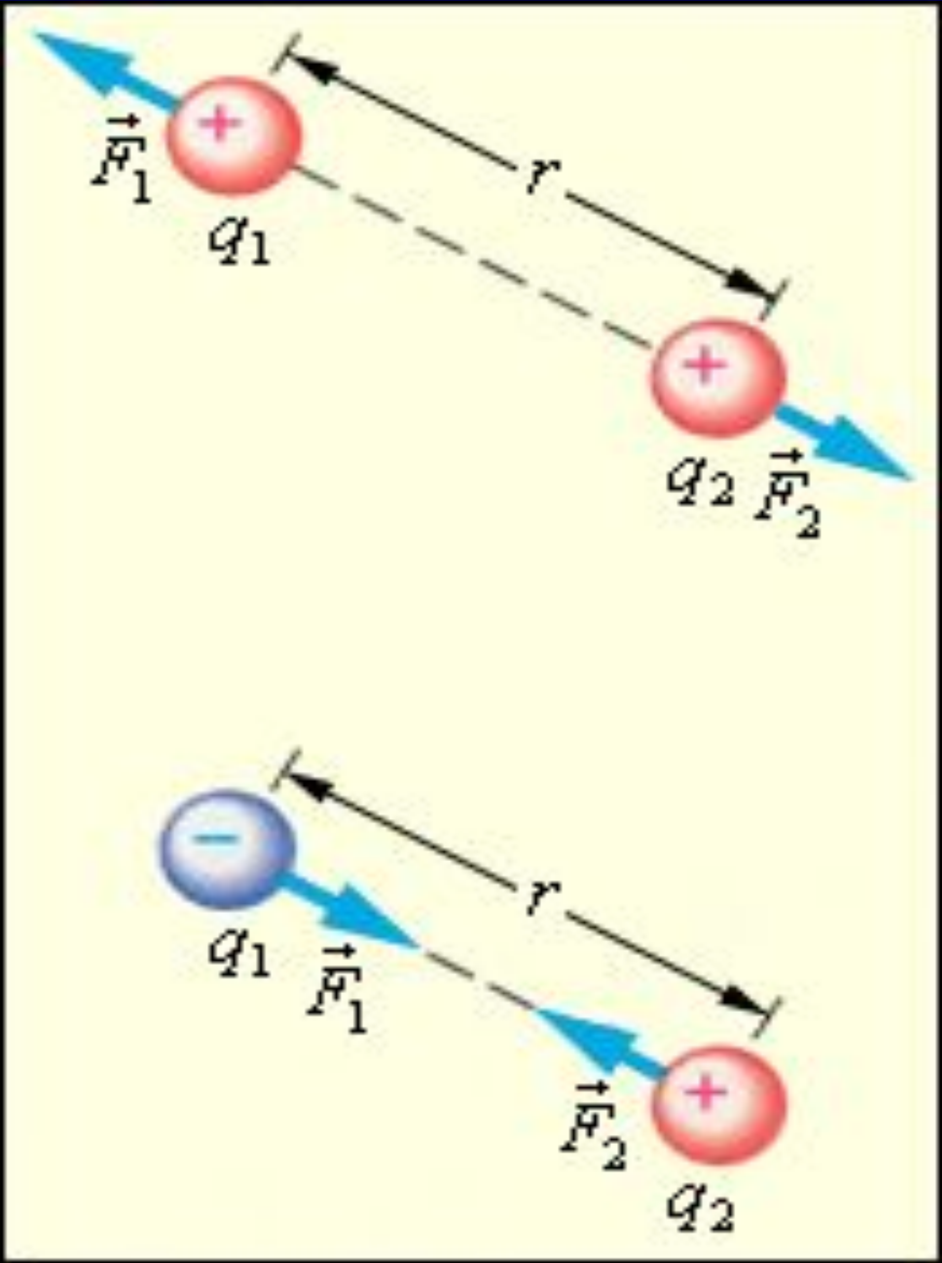
Взаимодействие зарядов



Закон Кулона

Закон Кулона





Закон Кулона

- Сила взаимодействия между неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

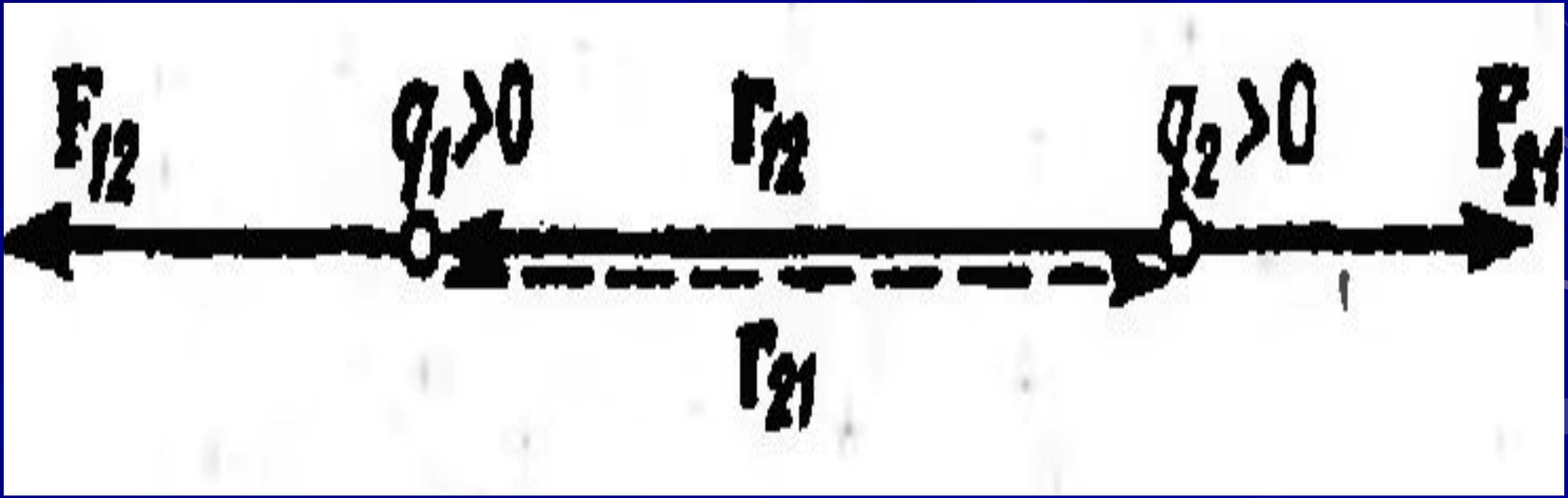
$$F = \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{\varepsilon\cdot r^2}$$

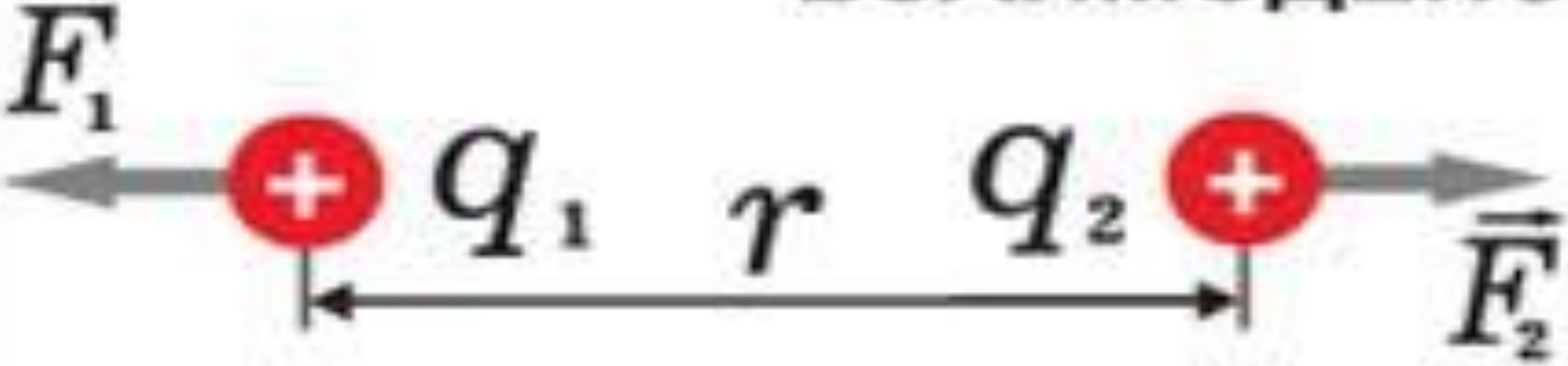
$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \text{Ф}/\text{м}$

$\dfrac{1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0} = 9\cdot10^9\ \text{м}/\text{Ф}$

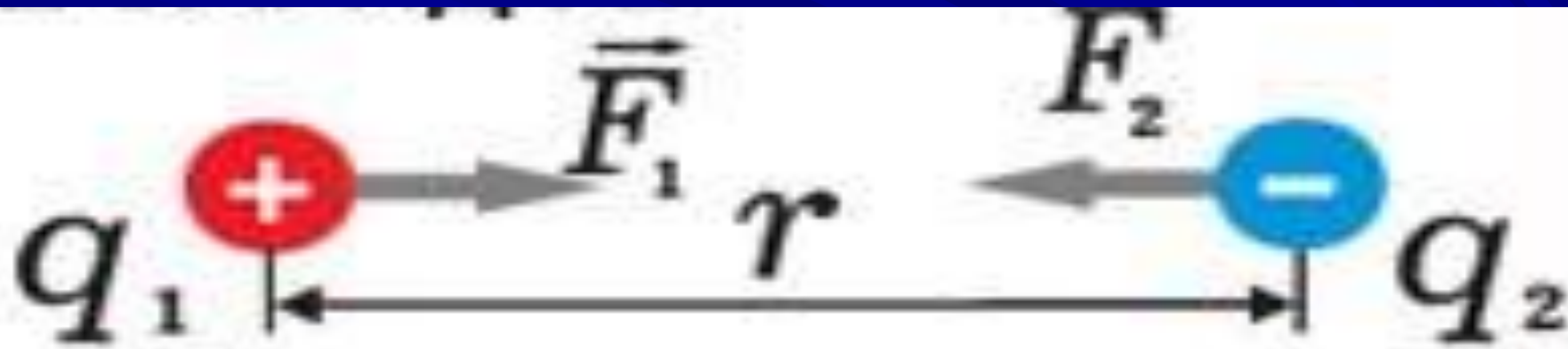
$$\vec{F}_{12} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{12}}{r}$$

$$\vec{F}_{21} = k\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}_{21}}{r}$$

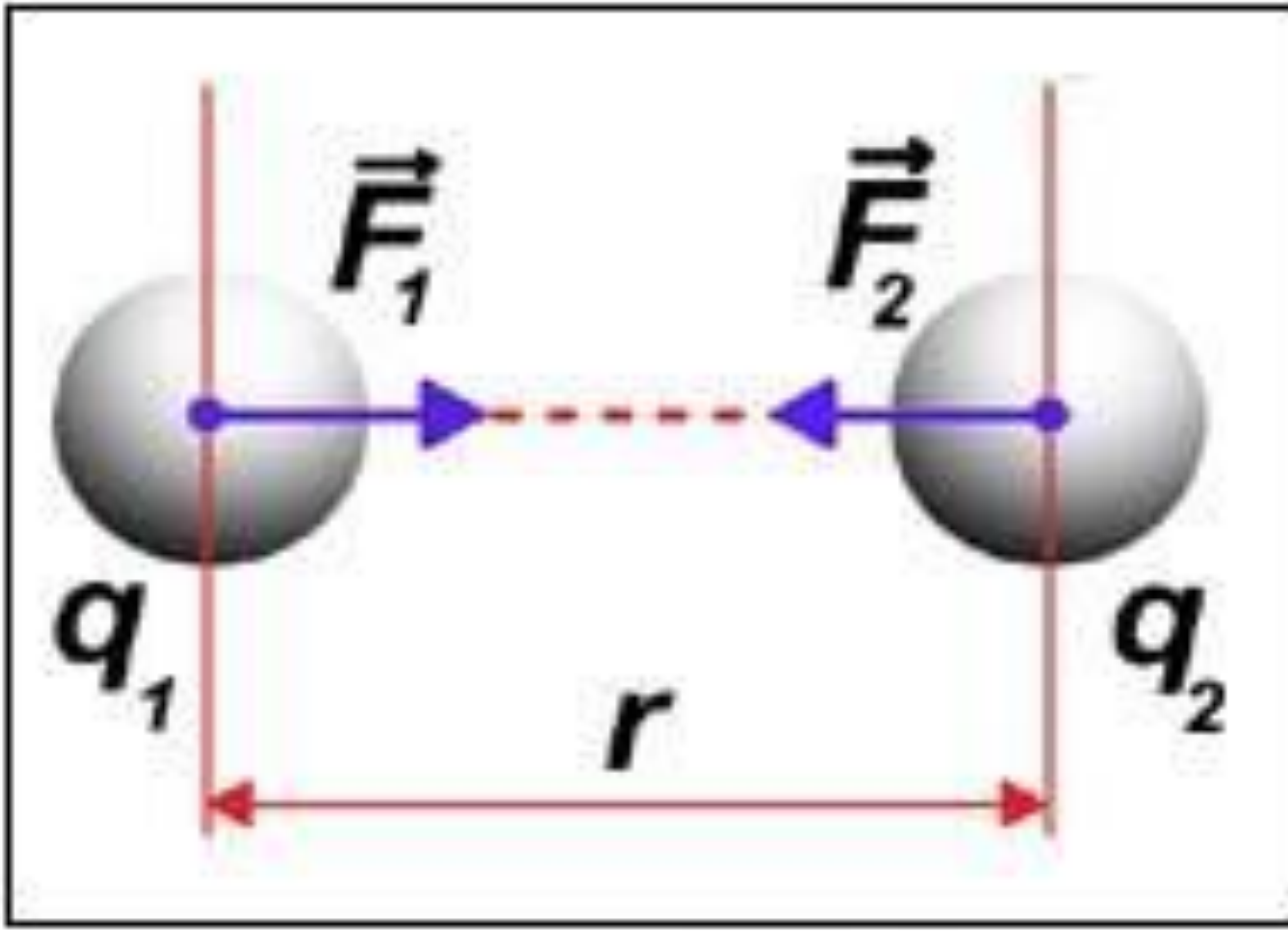




$1/4\pi\varepsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Нм}^2/\text{Кл}^2$



$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/\text{Нм}^2$



$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
q_1
q_2
r

Кулоновская сила

- Сила $\vec{F}$ направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т.е. является центральной.

- В случае разноимённых зарядов $F < 0$ - соответствует притяжению.
- В случае одноимённых зарядов $F > 0$ - соответствует отталкиванию.

- Эта сила называется **кулоновской силой**.

Распределение электрических зарядов

Линейная плотность электрических зарядов

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

Поверхностная плотность электрических зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

Объемная плотность электрических зарядов

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

Напряженность электрического поля

Электростатическое поле

- **Напряжённость электростатического поля** – физическая величина, определяемая силой, действующей на единичный положительный заряд, помещённый в данную точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- Напряжённость электростатического поля – силовая векторная характеристика электростатического поля.

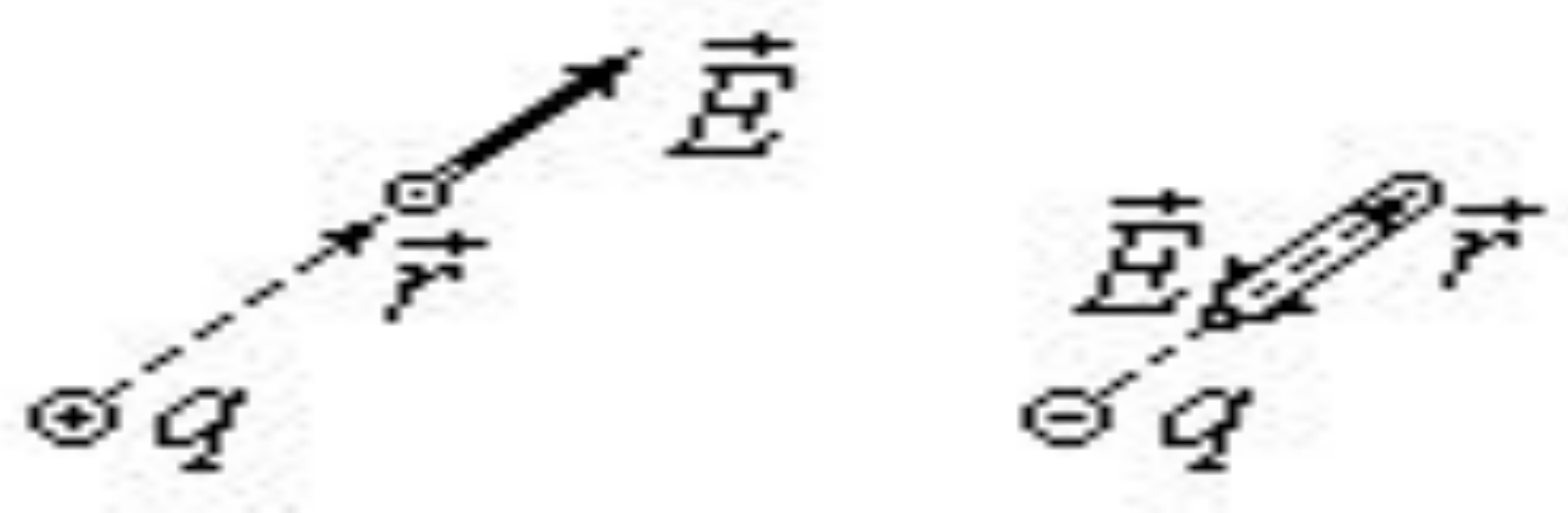
Напряженность поля точечного заряда

$$\vec{F} = K\frac{qq_{пр}}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = K\frac{qq_{пр}}{r^2 q_{пр}}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

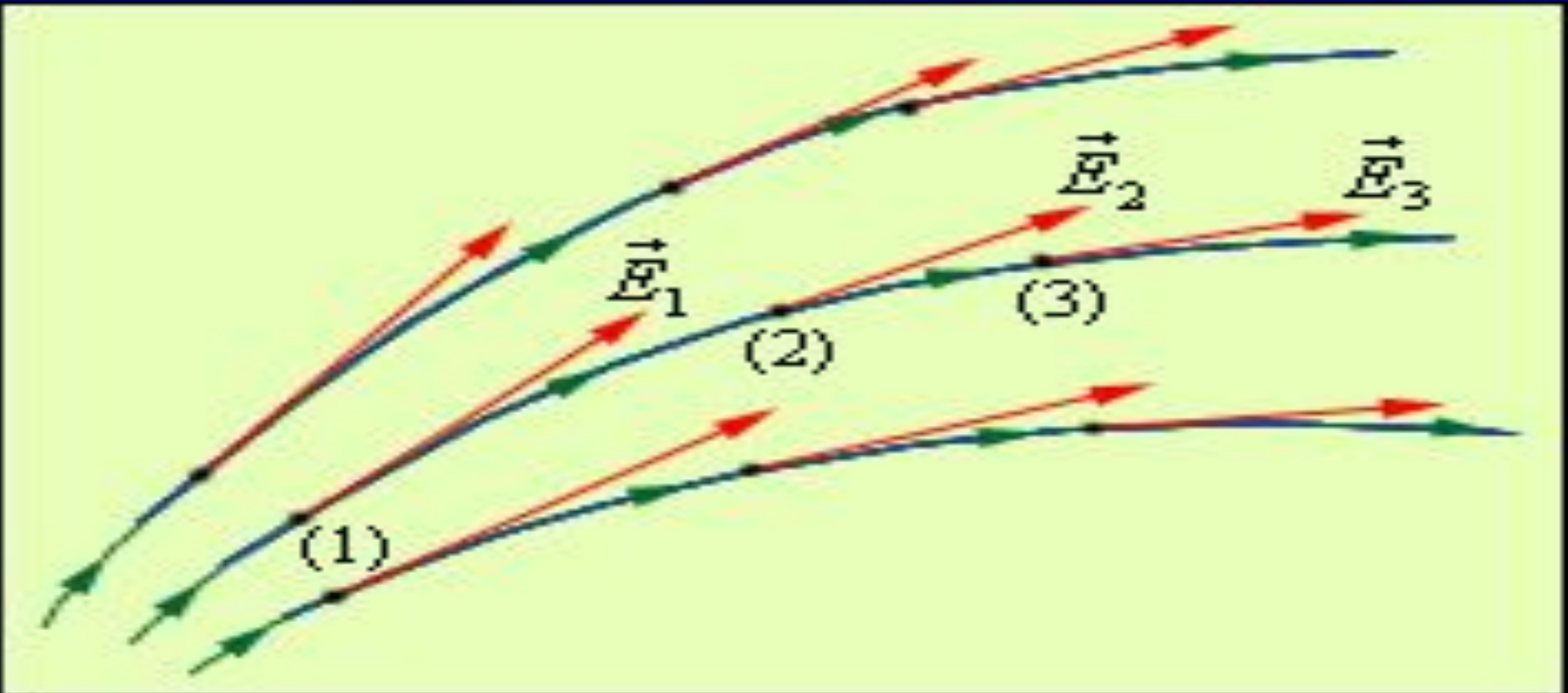
$$\vec{E} = K\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r} \qquad E = K\frac{|q|}{r^2}$$

Вектор напряженности во всех точках поля направлен

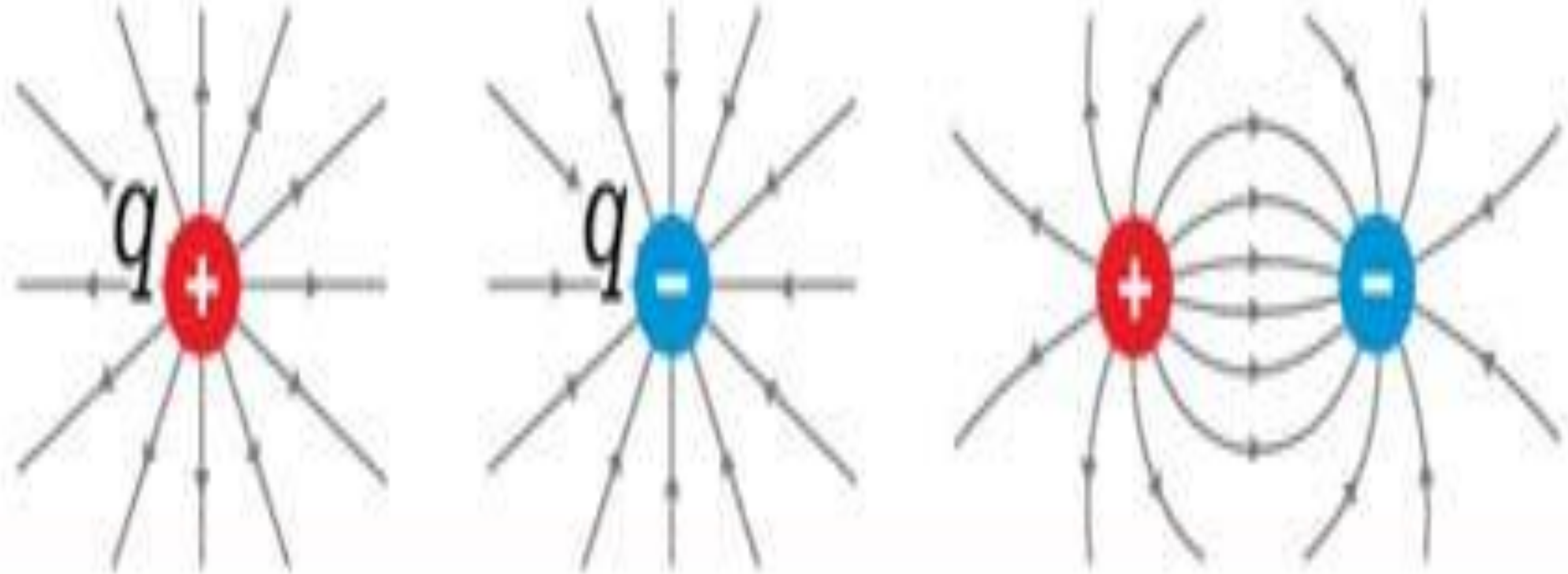
- **радиально от заряда, если он положителен,**
- **и радиально к заряду, если отрицателен**

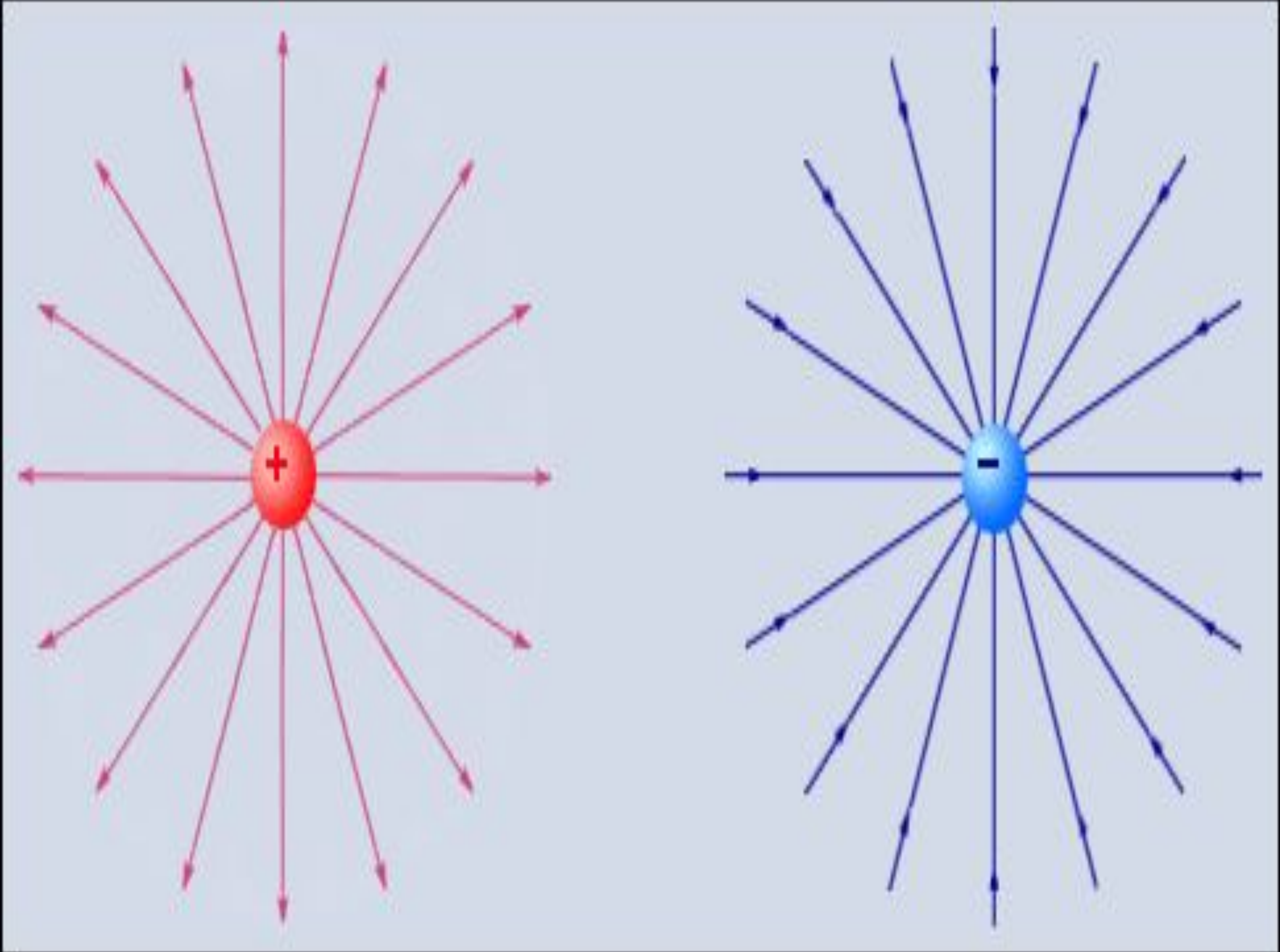


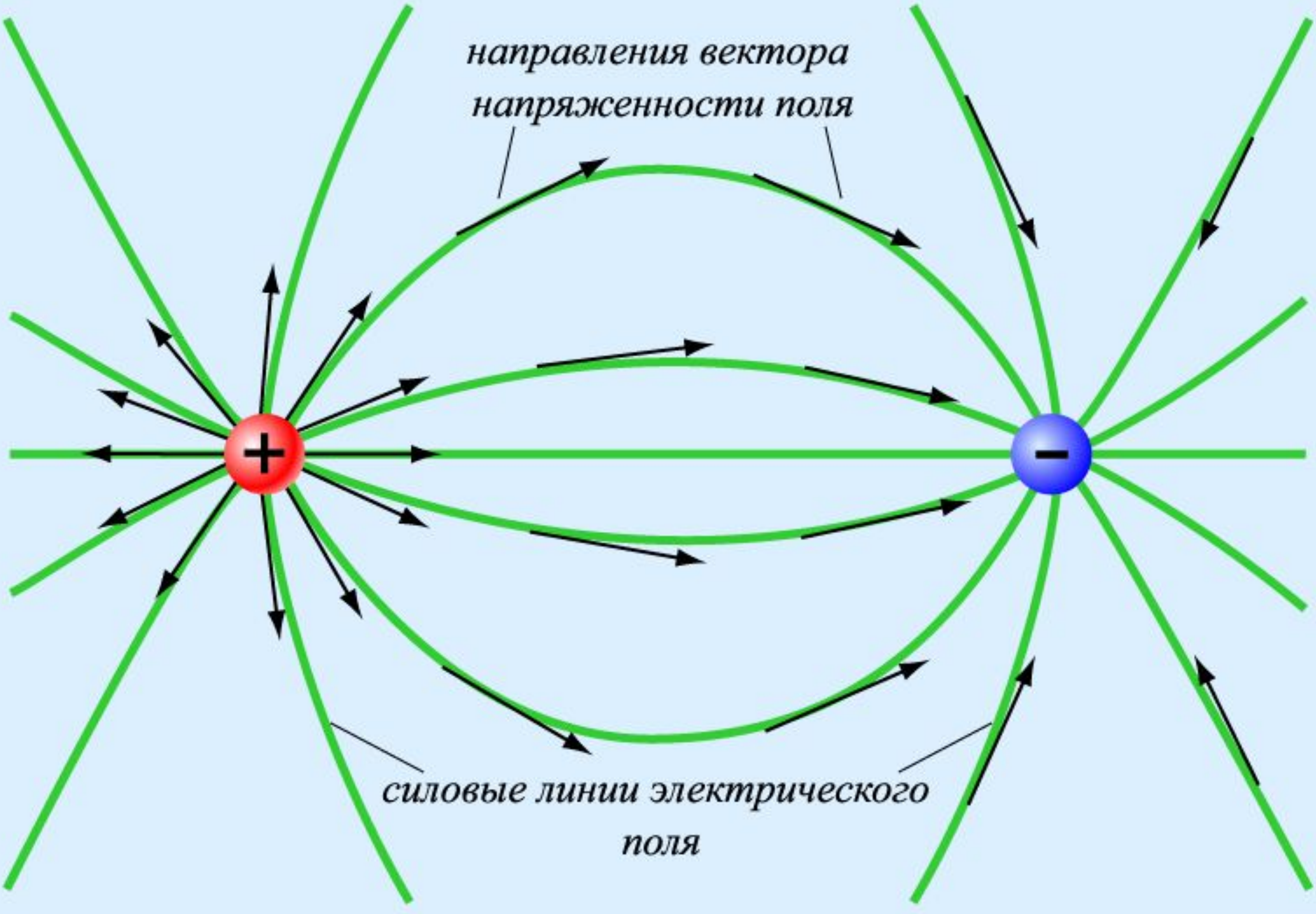
Линия напряженности - линия, в каждой точке которой *вектор напряженности направлен по касательной к этой линии*



ЛИНИИ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ





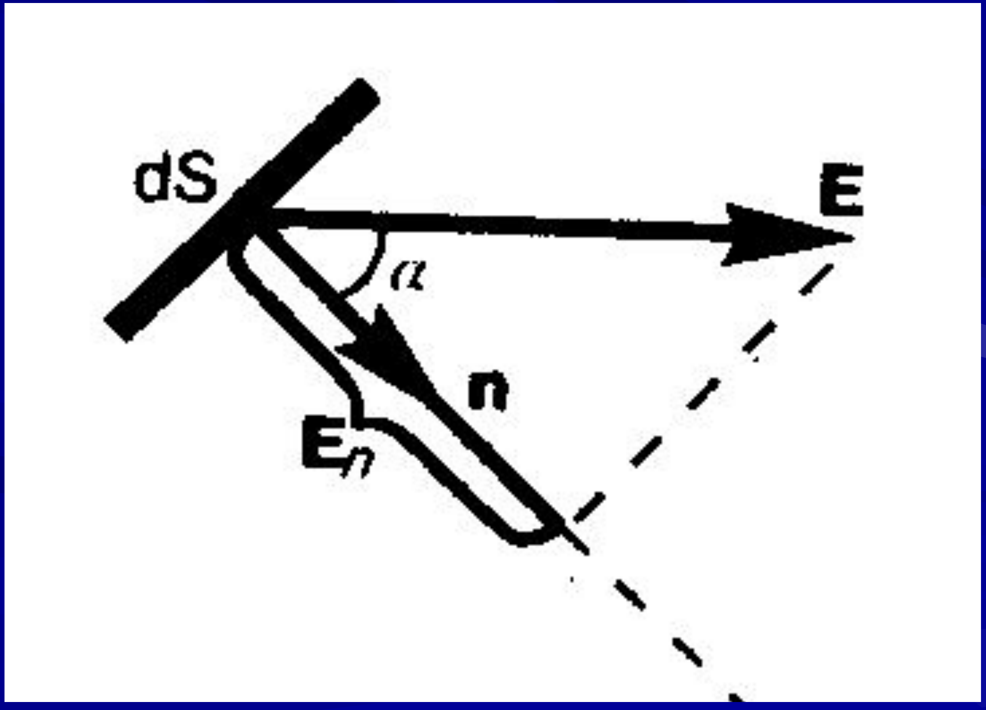

направления вектора
напряженности поля
+
−
силовые линии электрического
поля

Поток вектора напряженности электрического поля.

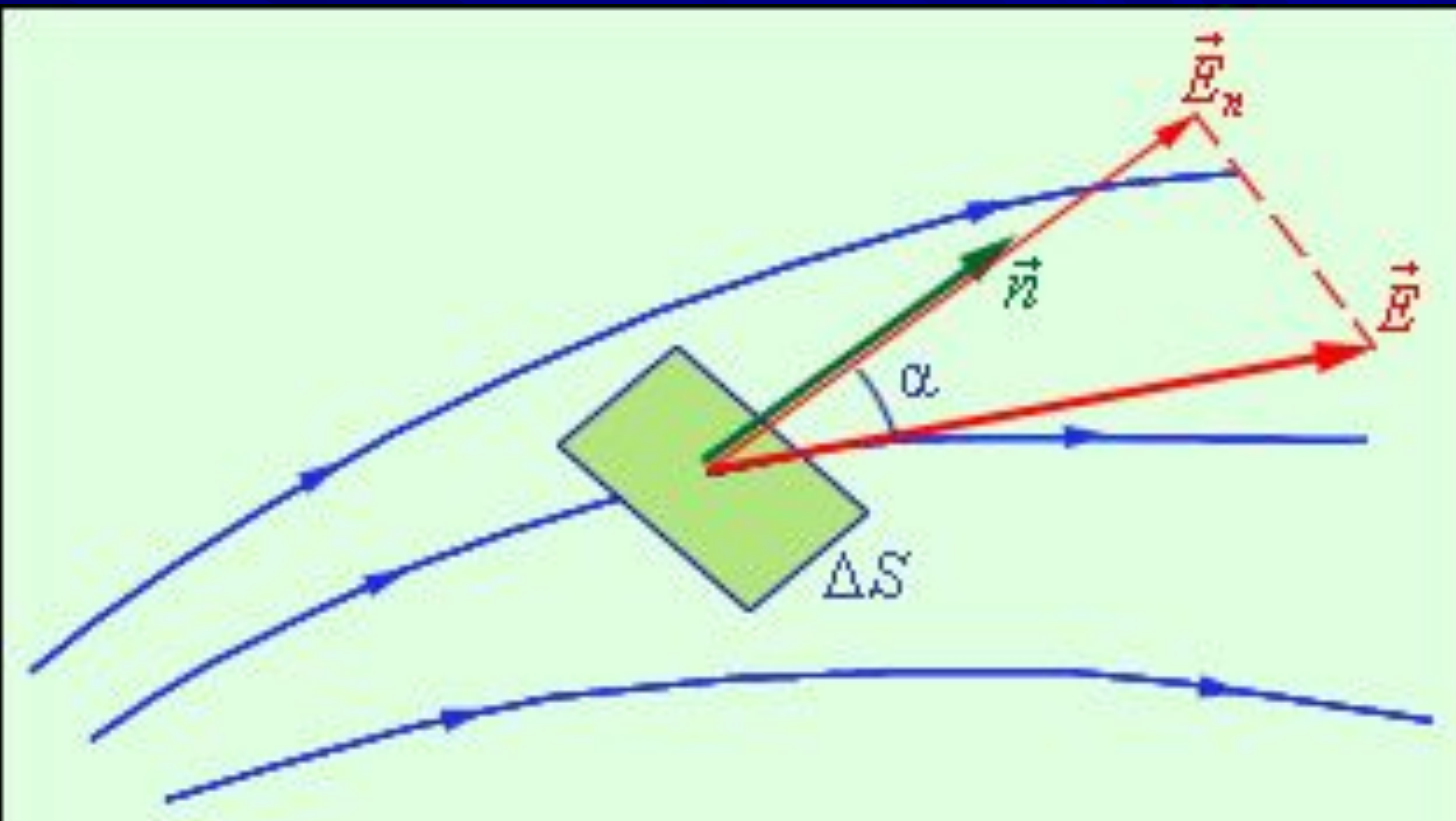
Поток вектора E электрического поля Φ_E через поверхность S измеряется числом силовых линий пронизывающих данную поверхность.

Поток вектора напряжённости электростатического поля

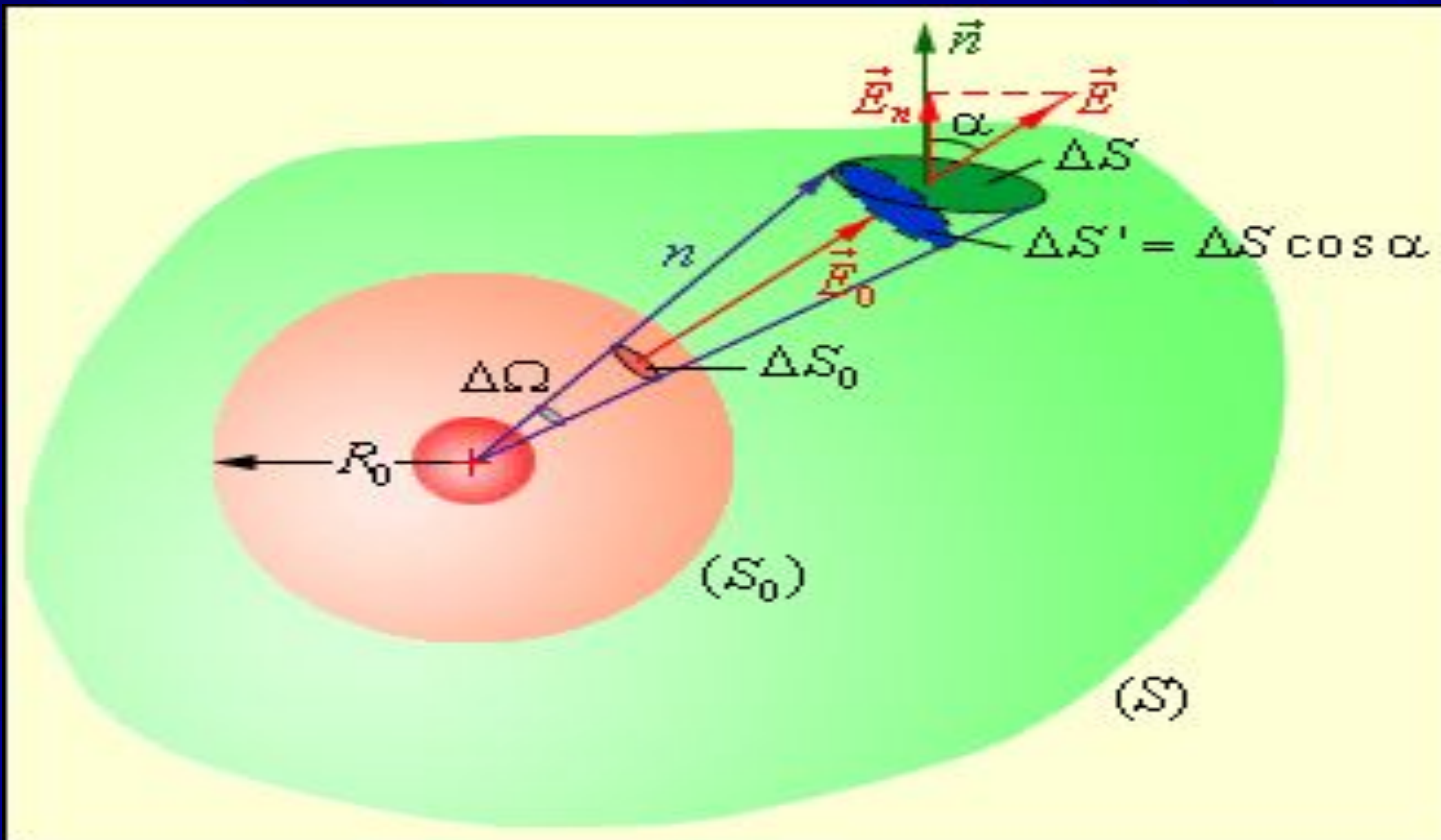
$$\Phi_E = \oint_S E_n \cdot dS = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

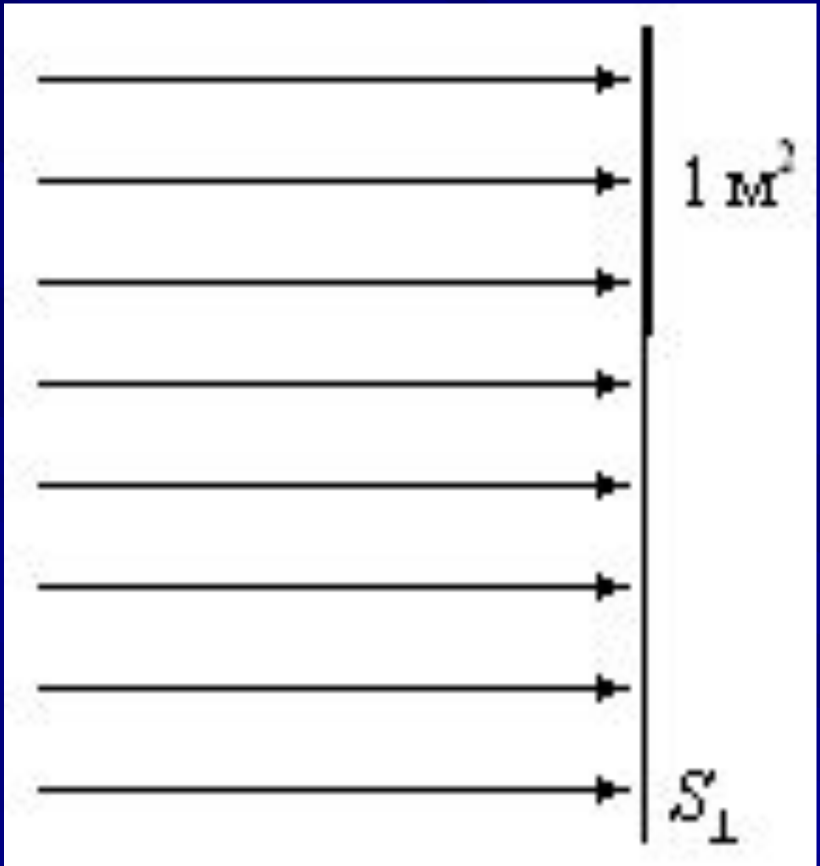


Элементарный поток



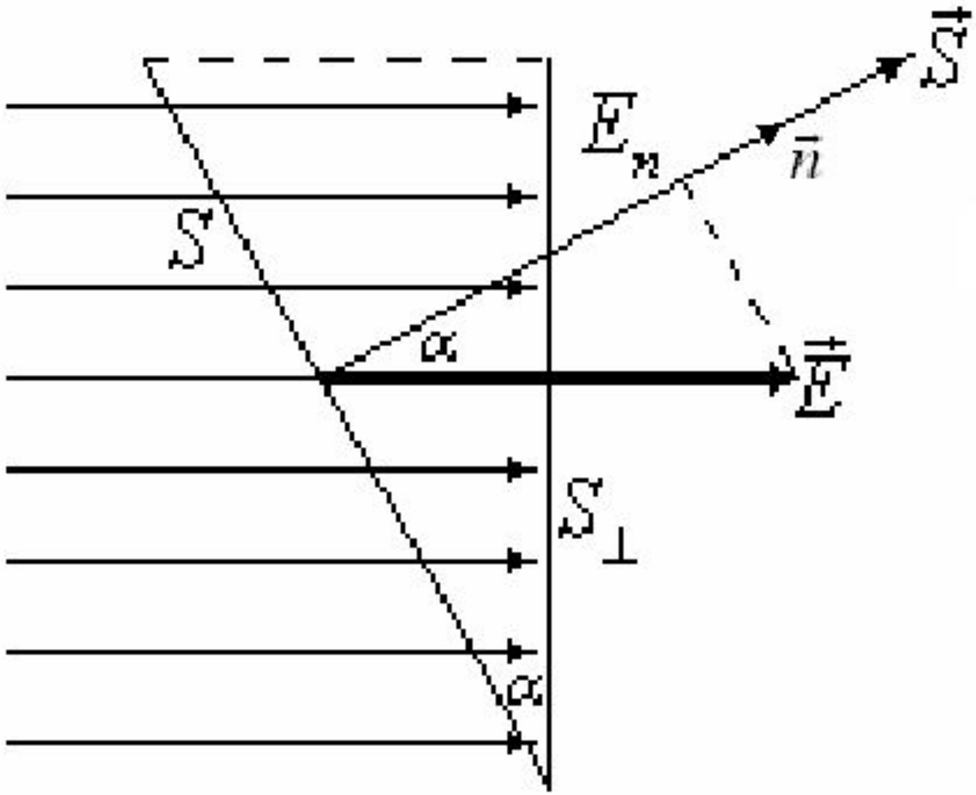
Поток вектора напряженности через произвольную поверхность, окружающую заряд





В случае однородного поля, *перпендикулярного к плоской поверхности* число линий, пронизывающих *1 м²* равно *E*, а через всю поверхность $S_\perp$ поток вектора напряженности будет равен

$$\Phi_E = ES_\perp$$



$$S_\perp = S\cos\alpha,$$

$$\Phi_E = ES\cos\alpha.$$

$E cos\alpha = E_n$ **есть проекция вектора на направление нормали к поверхности S. В этом случае**

$$\Phi_E = E_n \cdot S$$

Введем понятие вектора площади $\vec{S}$,

сонаправленного с единичным вектором $\vec{n}$

нормали к поверхности S , а по модулю

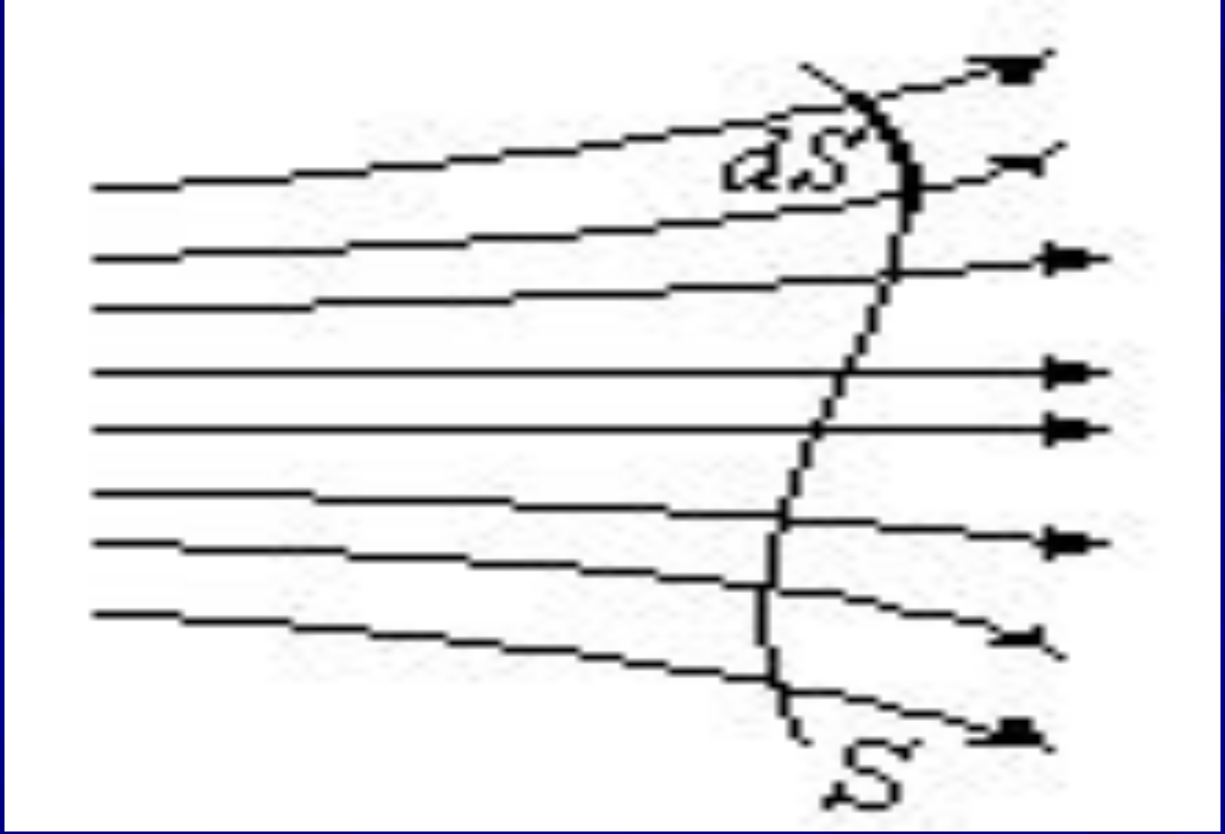
равного площади этой поверхности $\vec{S} = S\vec{n}$.

Тогда поток через поверхность будет равен

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Произвольная поверхность

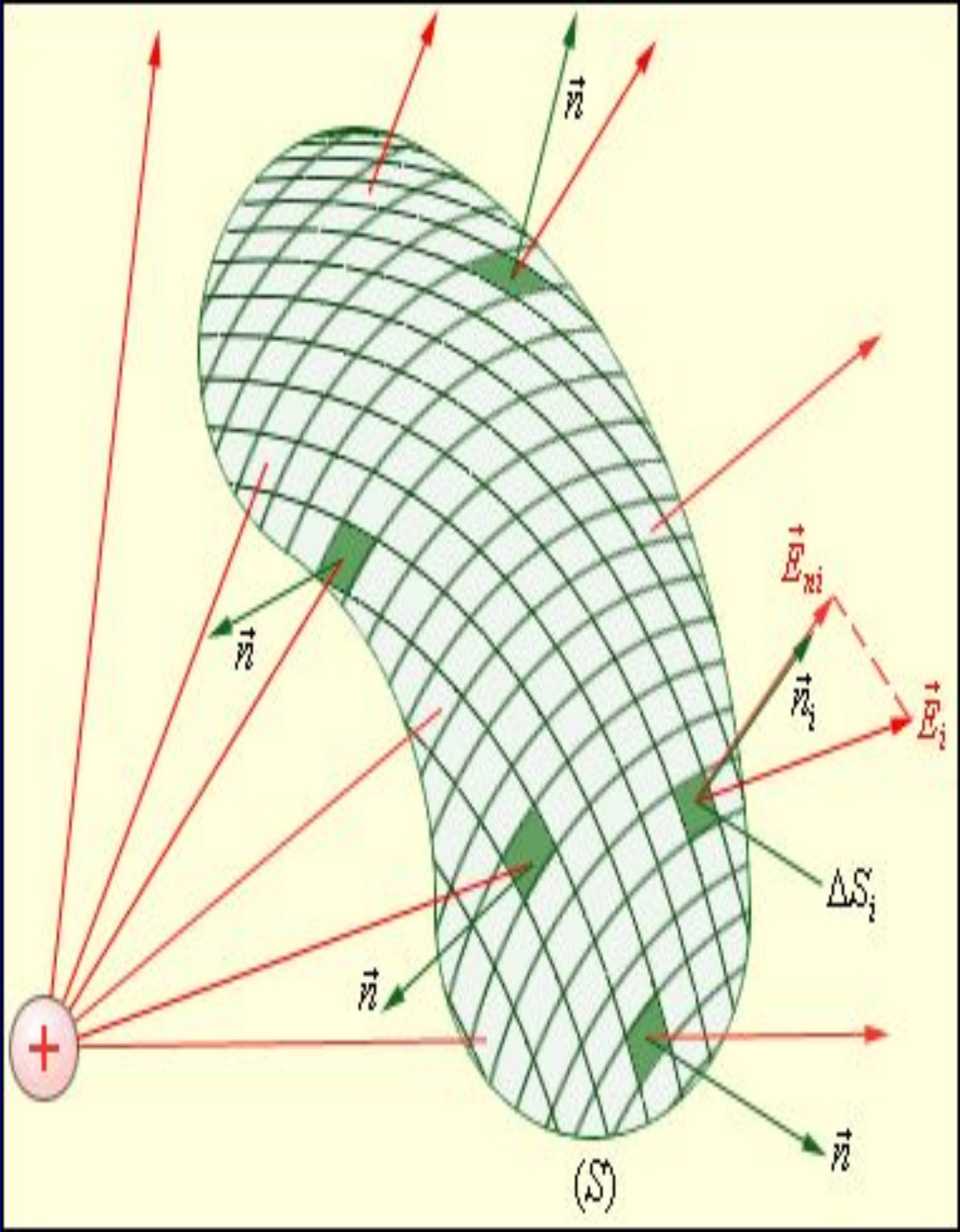
неоднородного поля

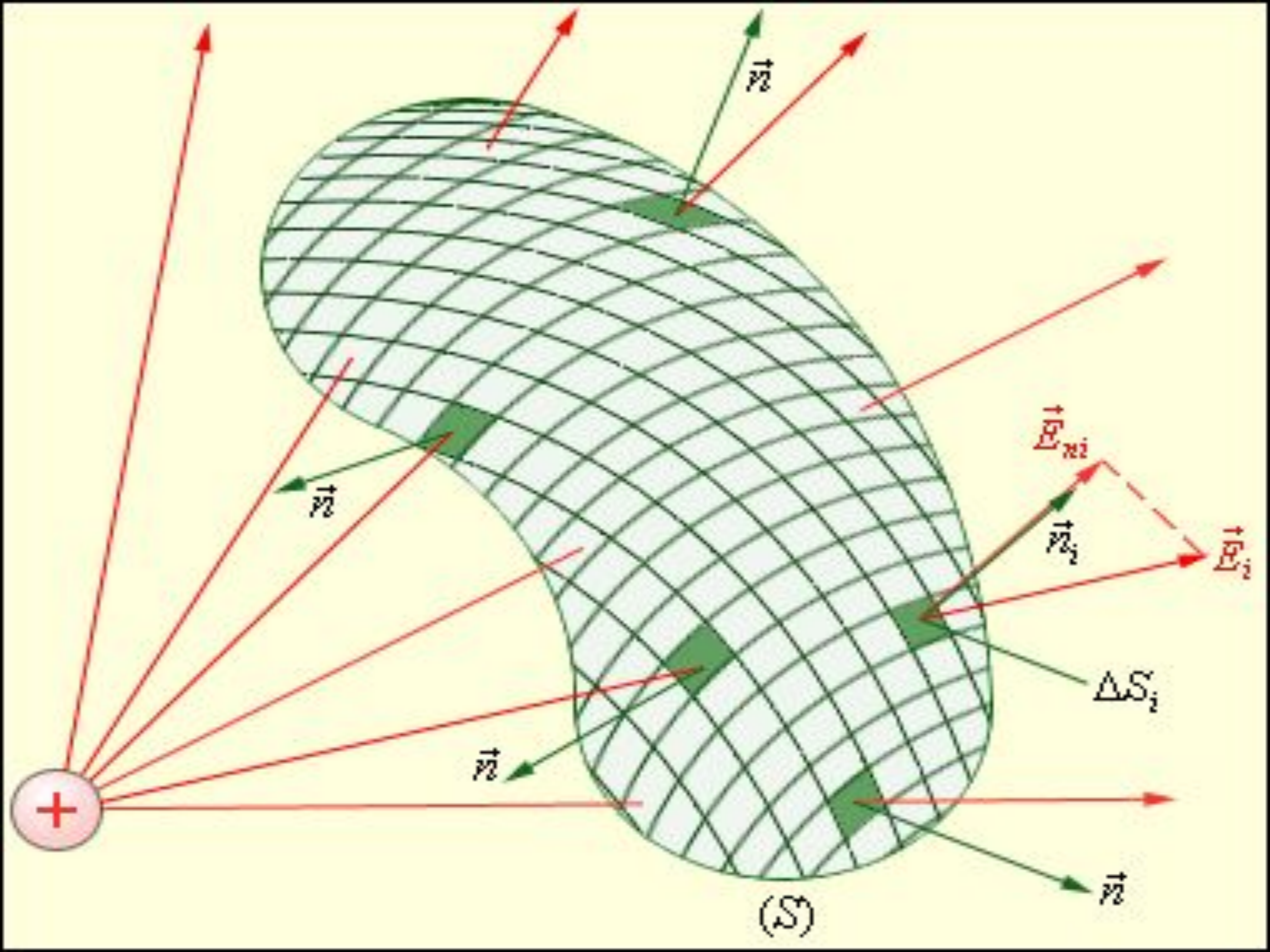


$$\Phi_{E} = \int\limits_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\limits_{(S)} E_{n} \cdot dS$$

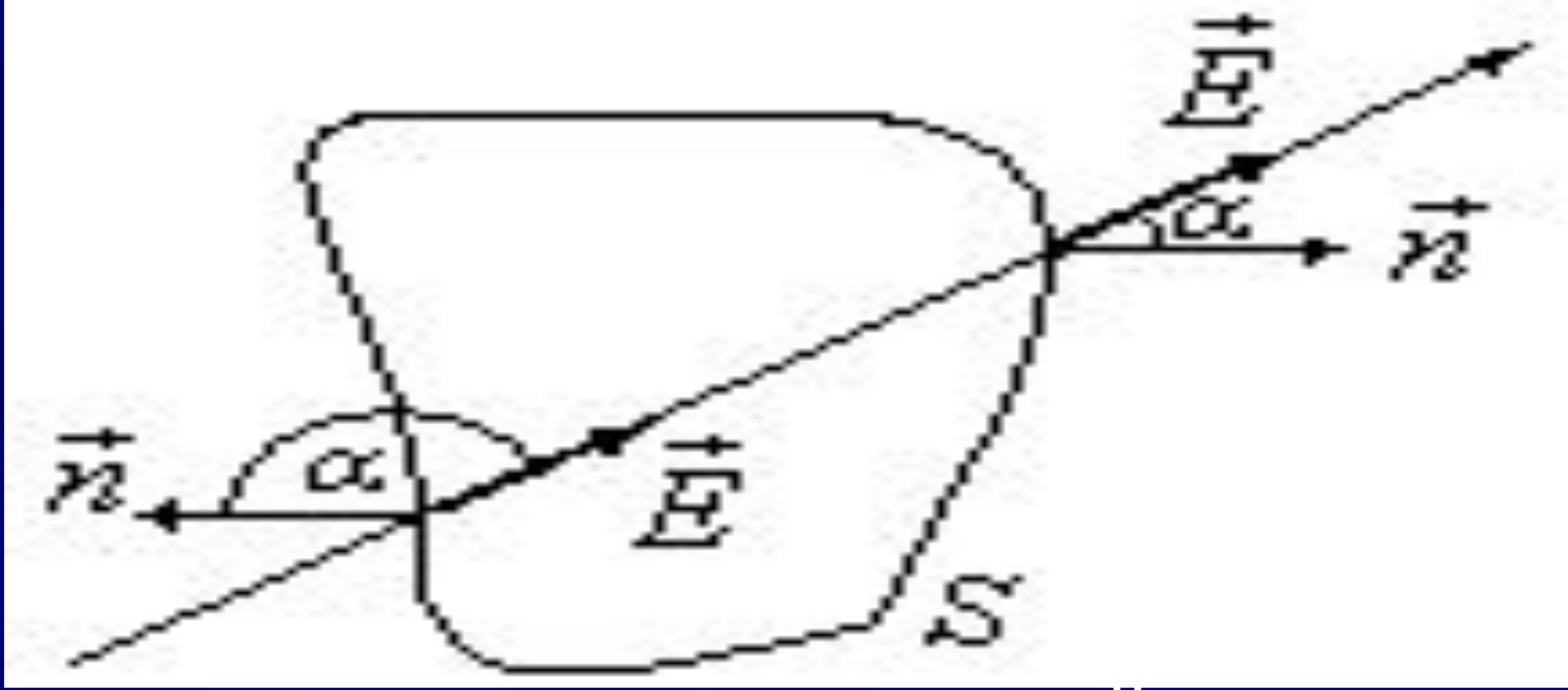
$$\left[\Phi_{E}\right] = 1\frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \text{м}^{2} = 1\,\text{В} \cdot \text{м}$$

- Вычисление потока через произвольную замкнутую поверхность





$\vec{n}$
$\vec{n}$
$\vec{E}_{ni}$
$\vec{n}_i$
$\vec{E}_i$
ΔS_i
$\vec{n}$
$\vec{n}$
(S)

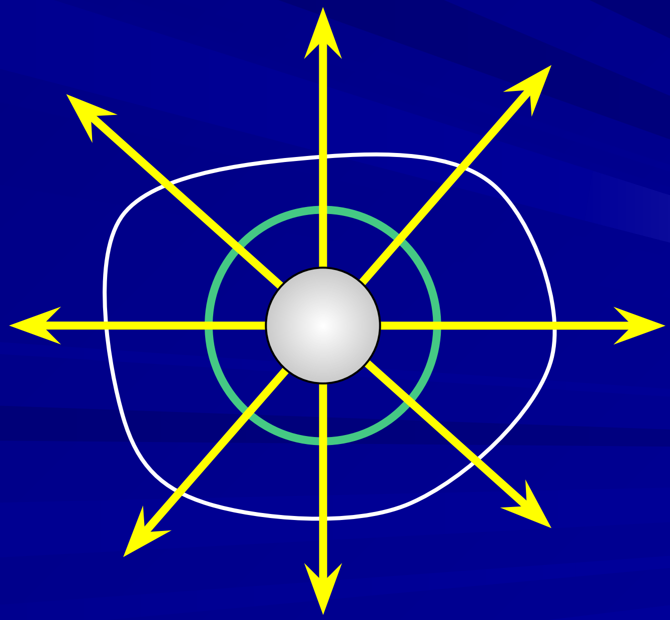


У замкнутых поверхностей внешняя нормаль - положительная

Входящие во внутрь силовые линии создают отрицательный поток, а выходящие из поверхности положительный поток.

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса *R*

$$\Phi_E = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2} \cdot 4\pi \cdot R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

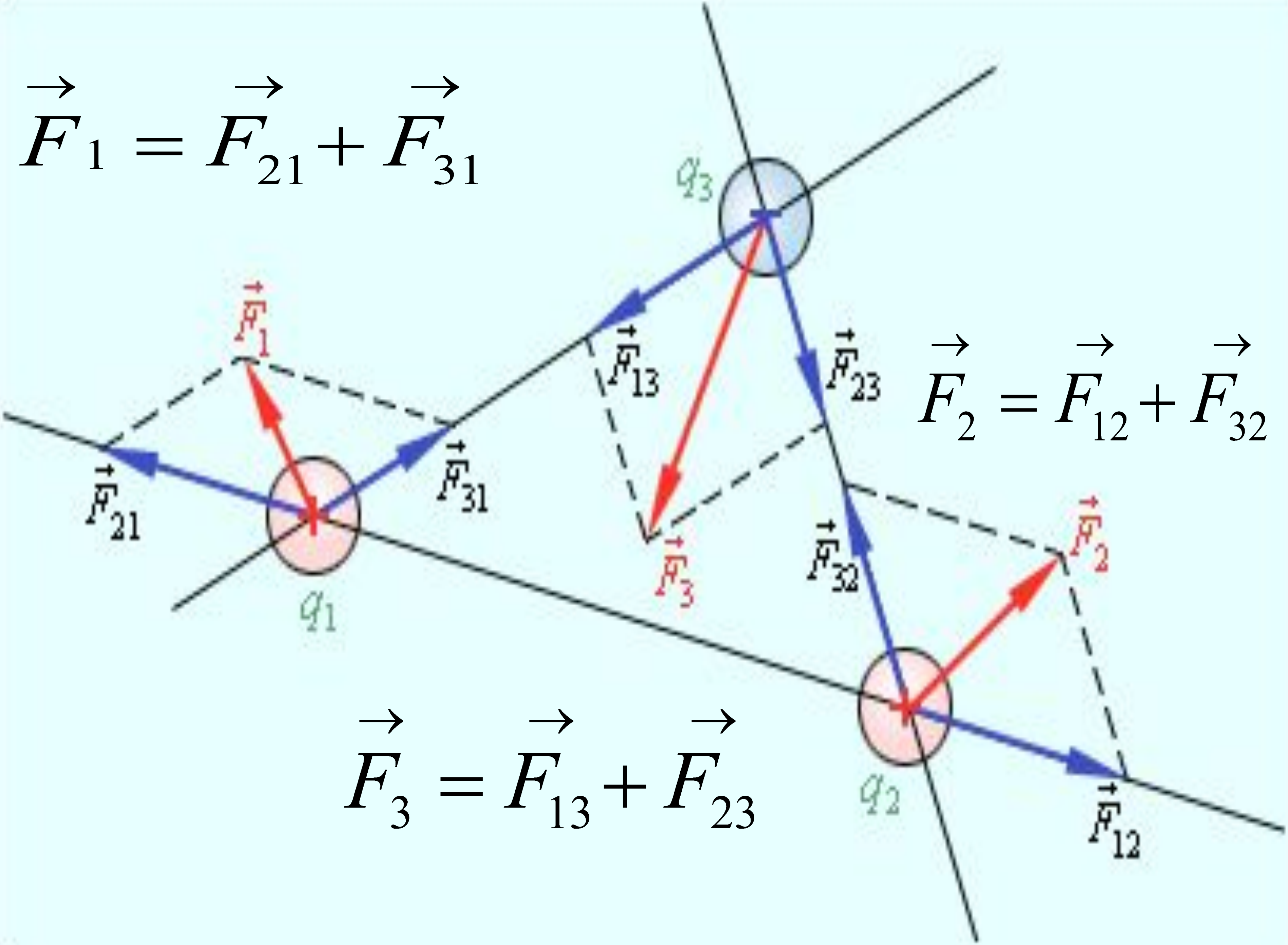


Принцип суперпозиции электростатических сил

- Результирующая сила, действующая на пробный заряд в любой точке поля равна *геометрической сумме* сил, приложенных к этому заряду со стороны неподвижных точечных зарядов

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$$



$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

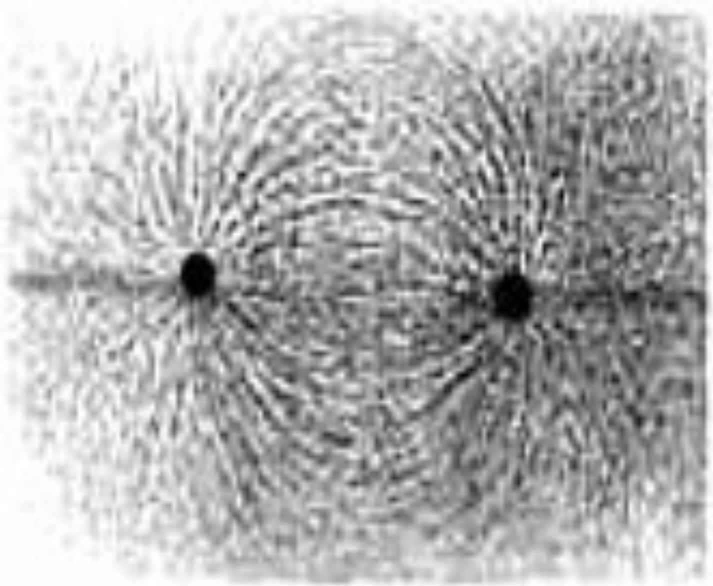
$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$$

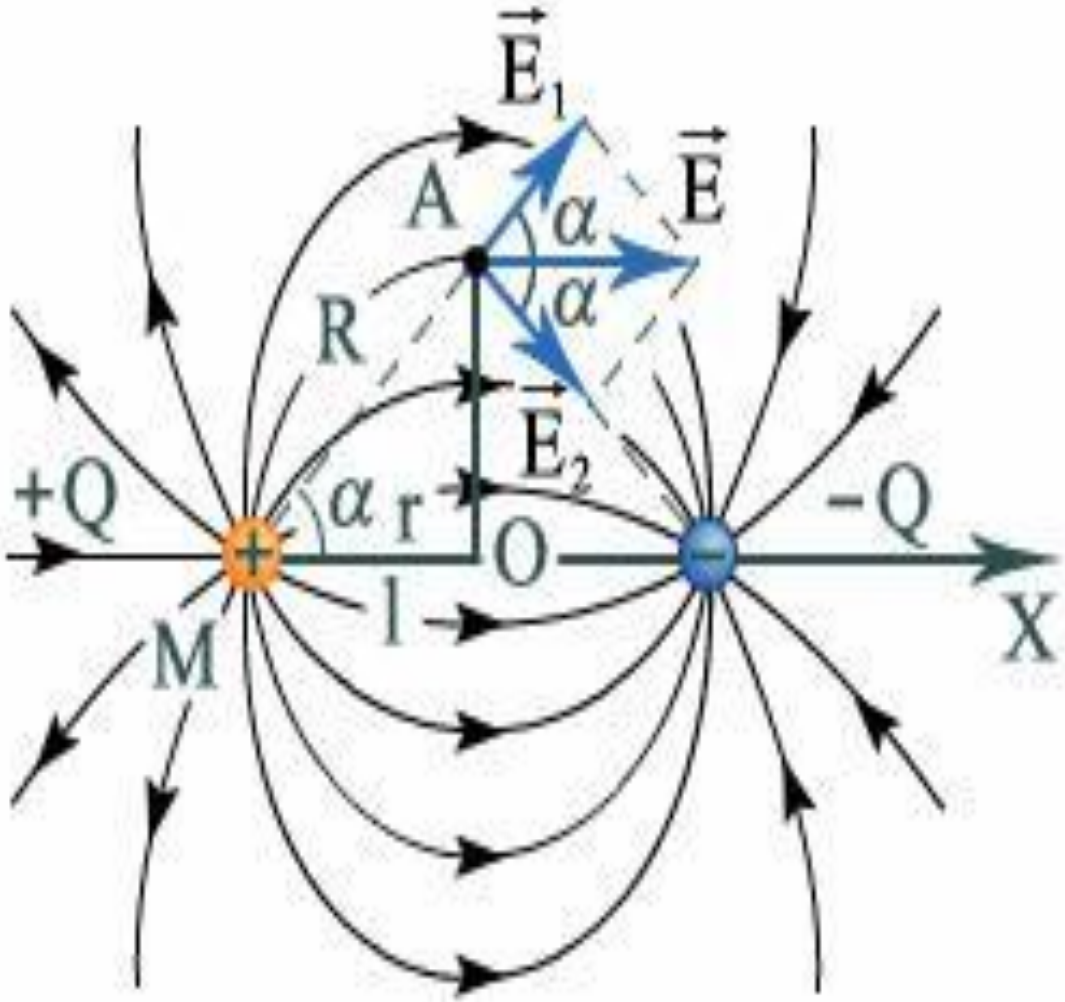
Принцип суперпозиции полей

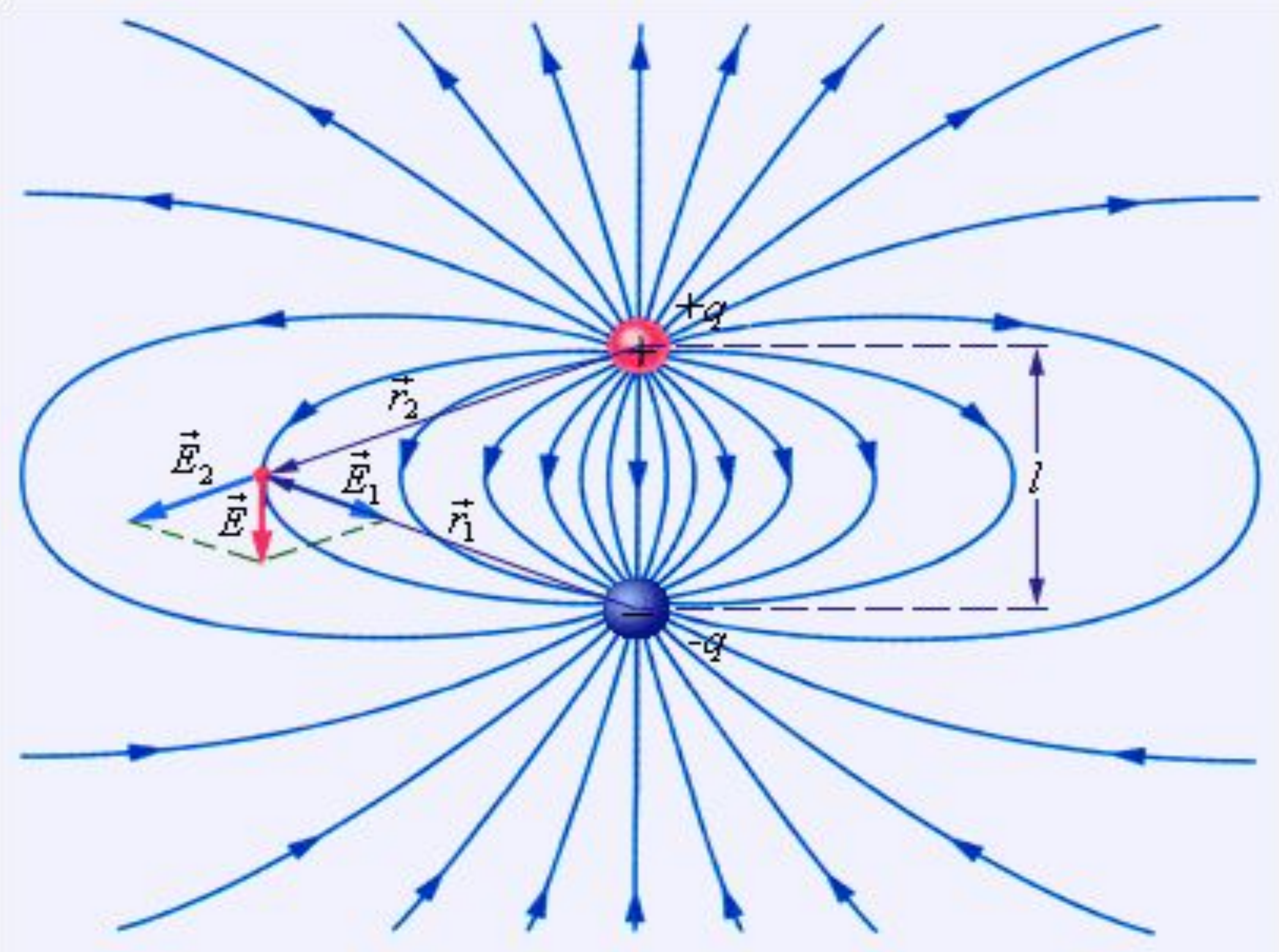
- напряженность результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности*

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$$

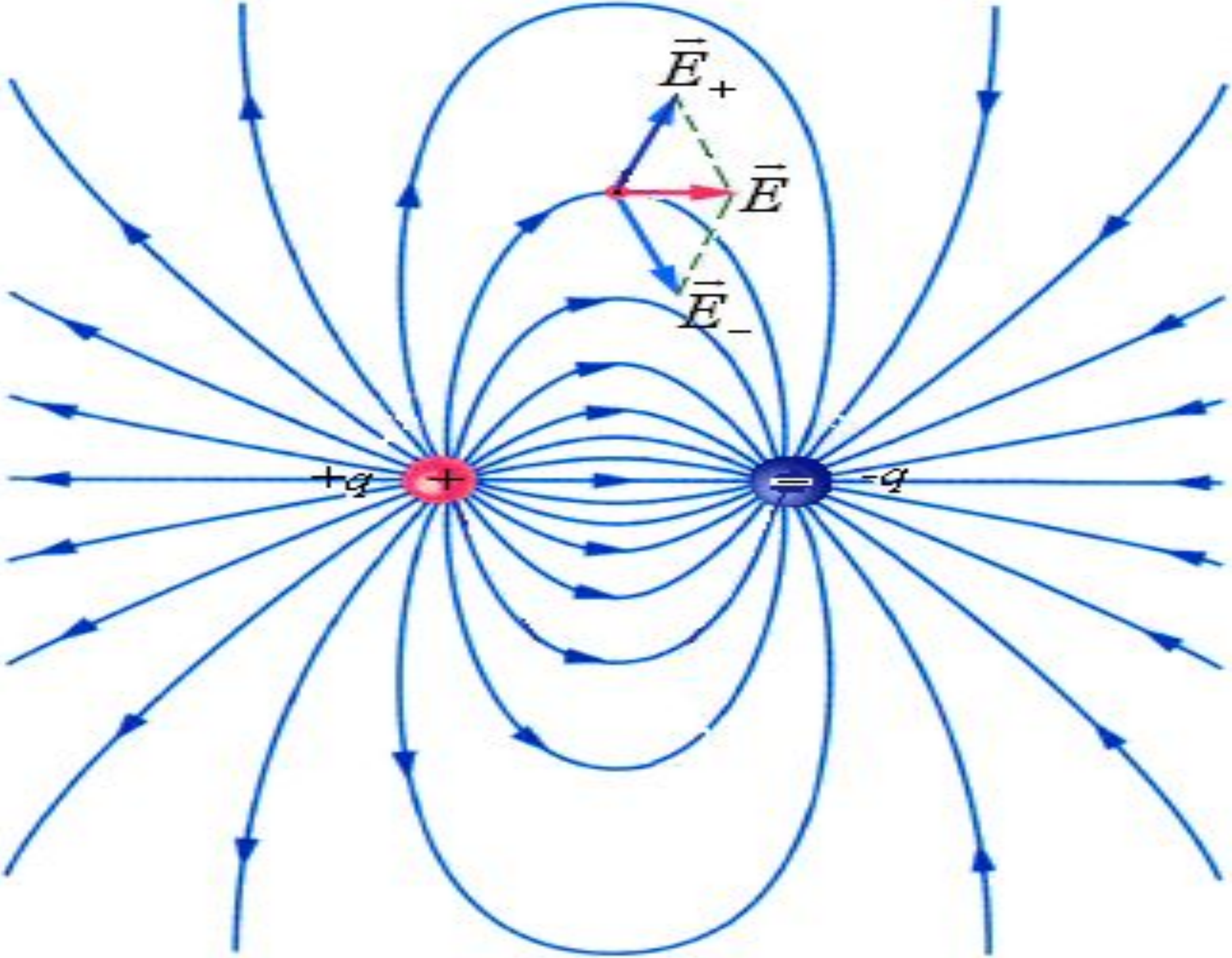
Напряженность электростатического поля







$+q$
$\vec{r}_2$
$\vec{E}_2$
$\vec{E}_1$
$\vec{E}$
$\vec{r}_1$
l
$-q$



$\vec{E}_+$
$\vec{E}$
$\vec{E}_-$
+q
-q

Электрический диполь

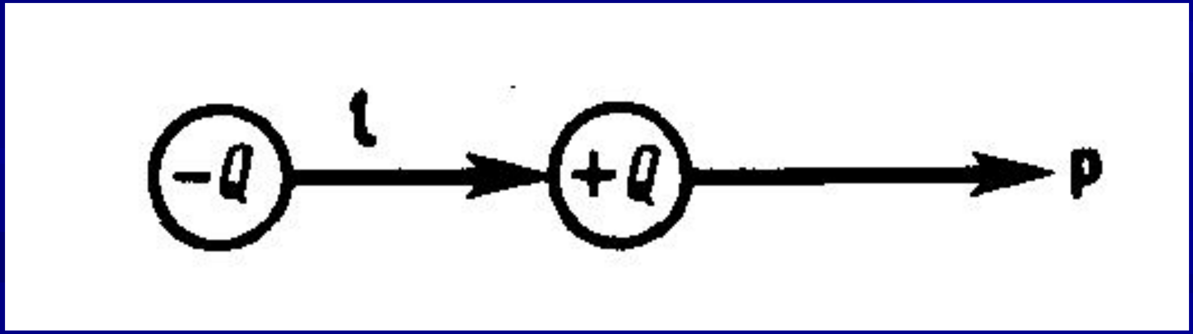
- система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

Электрический диполь

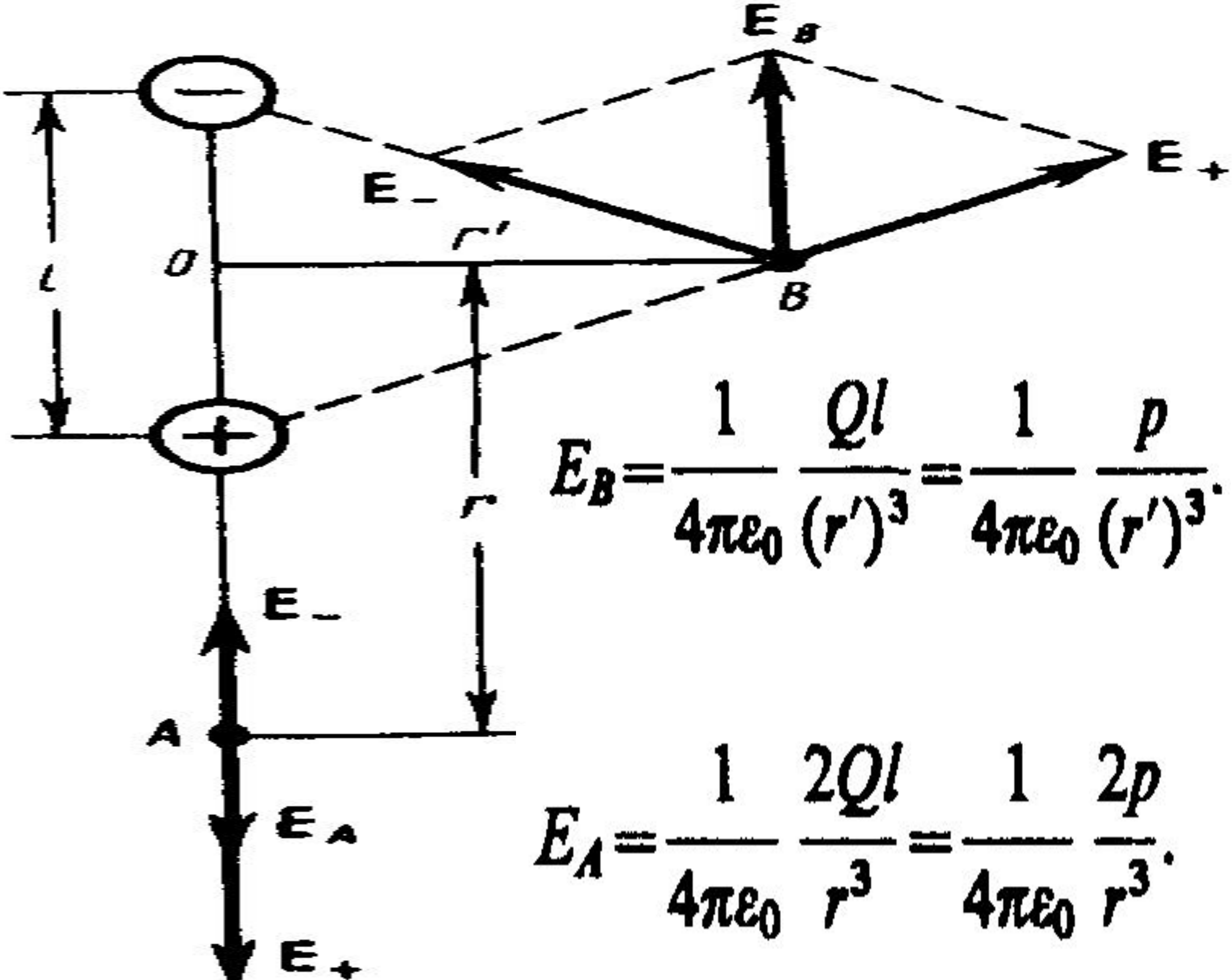
- Вектор, направленный по оси диполя (*прямой, проходящей через оба заряда*) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя** l.

Электрический диполь

- Вектор совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда на плечо l, называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом**



$$p = |q| \cdot l$$



$$E_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql}{(r')^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{(r')^3}.$$

$$E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3}.$$

Непрерывное распределение системы зарядов в пространстве

- Напряженность поля этой системы в вакууме, согласно принципу суперпозиции полей

$$\vec{E} = k \int\limits_{(Q)} \frac{dQ}{r^3} \vec{r}$$

- Электростатическое поле точечного заряда – центральное и поэтому **потенциальное**.
- На точечный заряд в этом поле действует сила, работа этой силы на любой замкнутой траектории равна нулю

$$\oint_{(L)} q\mathbf{E}_l\, d\mathbf{r} = 0$$

$$\oint_{(L)} \mathbf{E}_l\, d\mathbf{r} = 0.$$

Циркуляция вектора напряженности вдоль замкнутого контура

- Циркуляция вектора напряженности электрического поля точечного заряда вдоль произвольного замкнутого контура, проведенного в поле равна нулю.

$$\oint\limits_{(L)} \mathbf{E}_l d\mathbf{r} = 0.$$

Напряженность электрического поля

произвольной системы точечных зарядов

$$\oint\limits_{(L)} \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = \oint\limits_{(L)} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i\,d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \oint\limits_{(L)} \mathbf{E}_i\,d\mathbf{r}.$$

$$\oint\limits_{(L)} \mathbf{E}\,d\mathbf{r} = 0.$$

- Это соотношение подтверждает то, что **любое электростатическое поле потенциально**

Циркуляция вектора напряжённости

- Интеграл $\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l \cdot dl$ называется

циркуляцией вектора напряжённости.

- Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_l \cdot dl = 0$$

- Силовое поле, обладающее таким свойством, называется потенциальным.

Работа перемещения заряда в поле

- Работа при перемещении заряда q_0 из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \left(\frac{q \cdot q_0}{r_1} - \frac{q \cdot q_0}{r_2} \right)$$

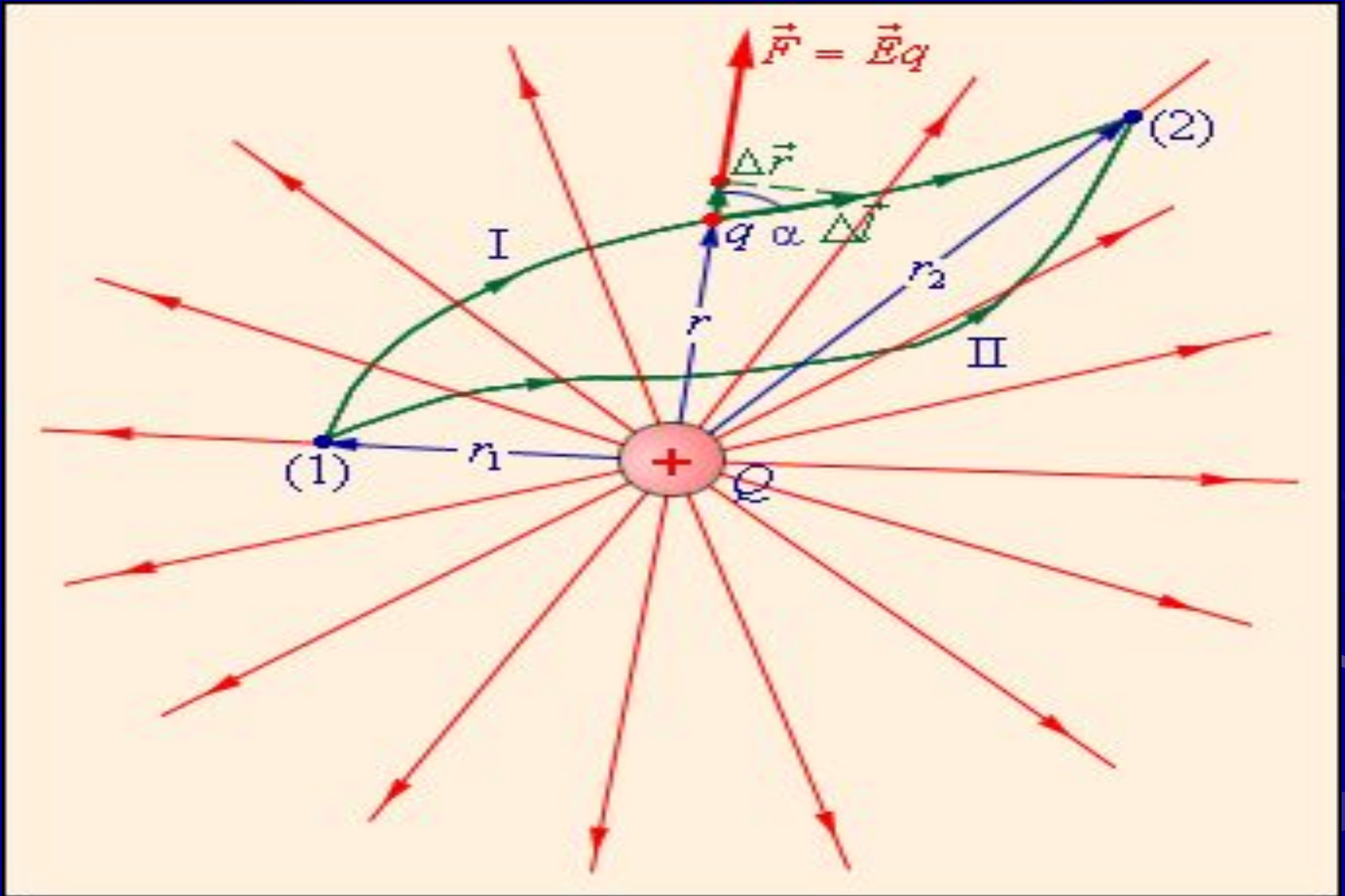
- A_{12} не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек.
- Электростатическое поле точечного заряда является потенциальным, а электростатические силы – консервативными.

Работа перемещения заряда в поле

- Работа перемещения заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому контуру L будет равна:

$$\oint_L dA = 0$$

Работа кулоновских сил зависит только от начальной и конечной точки



- **Работа**, совершаемая силами электростатического поля при малом перемещении точечного заряда в этом поле, **равна убыли потенциальной энергии** заряда в рассматриваемом поле

$$\delta A = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r} = -dW_n$$

- Для поля системы из ***n*** точечных зарядов

$$dW_n = -q\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{r} = -q\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \cdot d\vec{r}_i$$

$$W_n = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + C$$

- При непрерывном распределении зарядов в пространстве, потенциальная энергия заряда в поле равна

$$W_n = q \int\limits_{(Q)} \frac{dQ}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} + C$$

Потенциал электростатического поля

- **Потенциалом** электростатического поля называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии пробного точечного электрического заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля, к этому заряду

$$\varphi = \frac{W_n}{q}$$

$$\boxed{\varphi = K\frac{q}{r}}$$

Принцип суперпозиции электростатических полей

- Если поле создаётся несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

- При наложении электростатических полей их потенциалы складываются алгебраически

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$$

Работа перемещения заряда в поле

- Работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

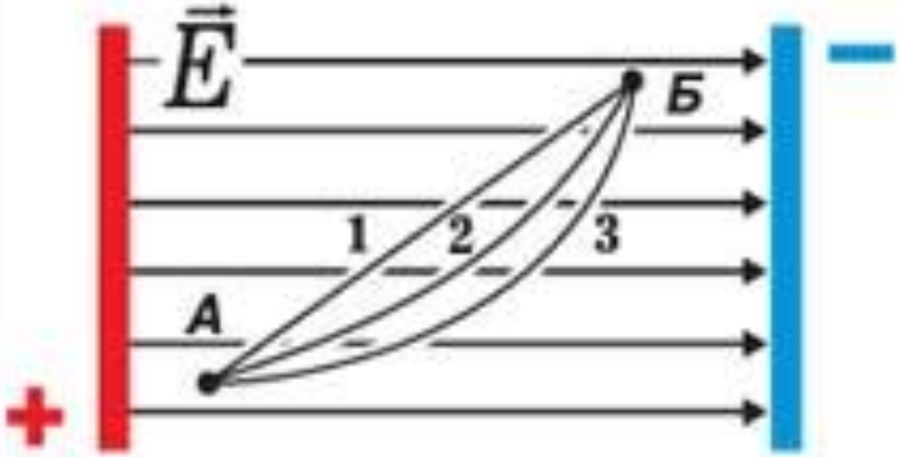
- т.е., равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

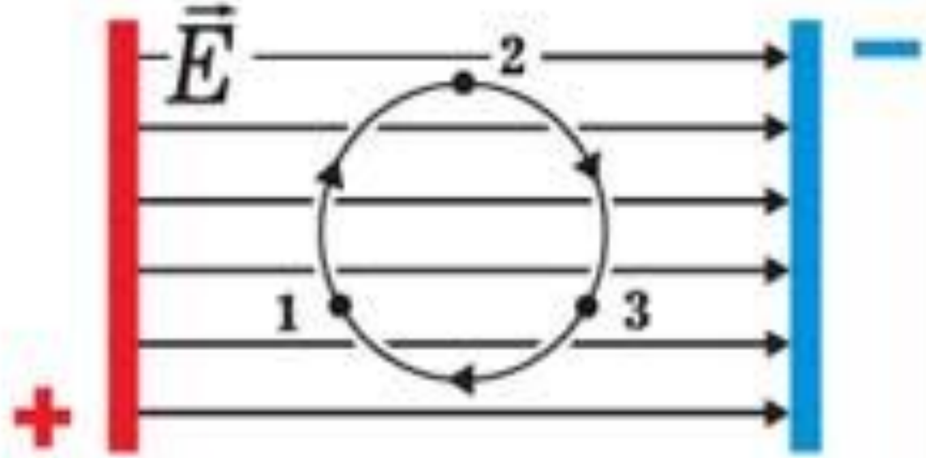
Разность потенциалов

- Разность потенциалов двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q_0}$$

ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ





$$A_1 = A_2 = A_3 \qquad A_{1231} = 0$$

Потенциал

$$\varphi = \frac{W_п}{q}$$

Потенциал поля

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q}$$

Напряжение

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

Работа поля по перемещению

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad A = qU$$

Потенциал

- Потенциал – физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}$$

- Напряжённость как градиент потенциала

$$\vec{E} = -grad\varphi$$

Связь между потенциальной силой и потенциальной энергией

$$\vec{F} = -grad \cdot W_n$$

- Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).$$

Эквипотенциальные поверхности

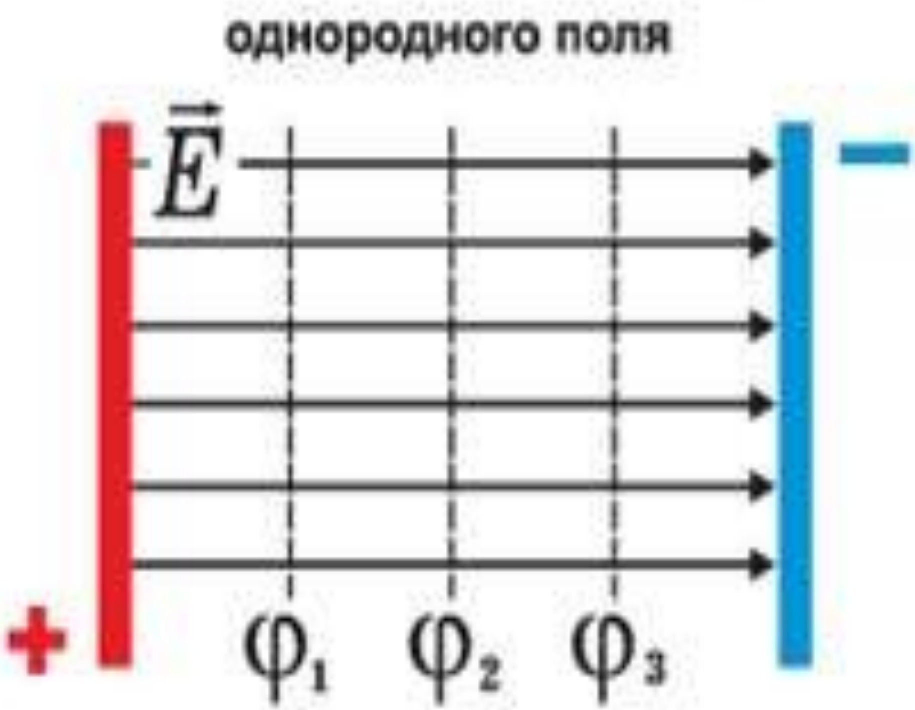
- Геометрическое место точек электростатического поля, в которых значения потенциала одинаковы

Эквипотенциальная поверхность это поверхность, в каждой точке которой потенциал имеет одно и то же значение.

Для всех точек поверхности выполняется условие

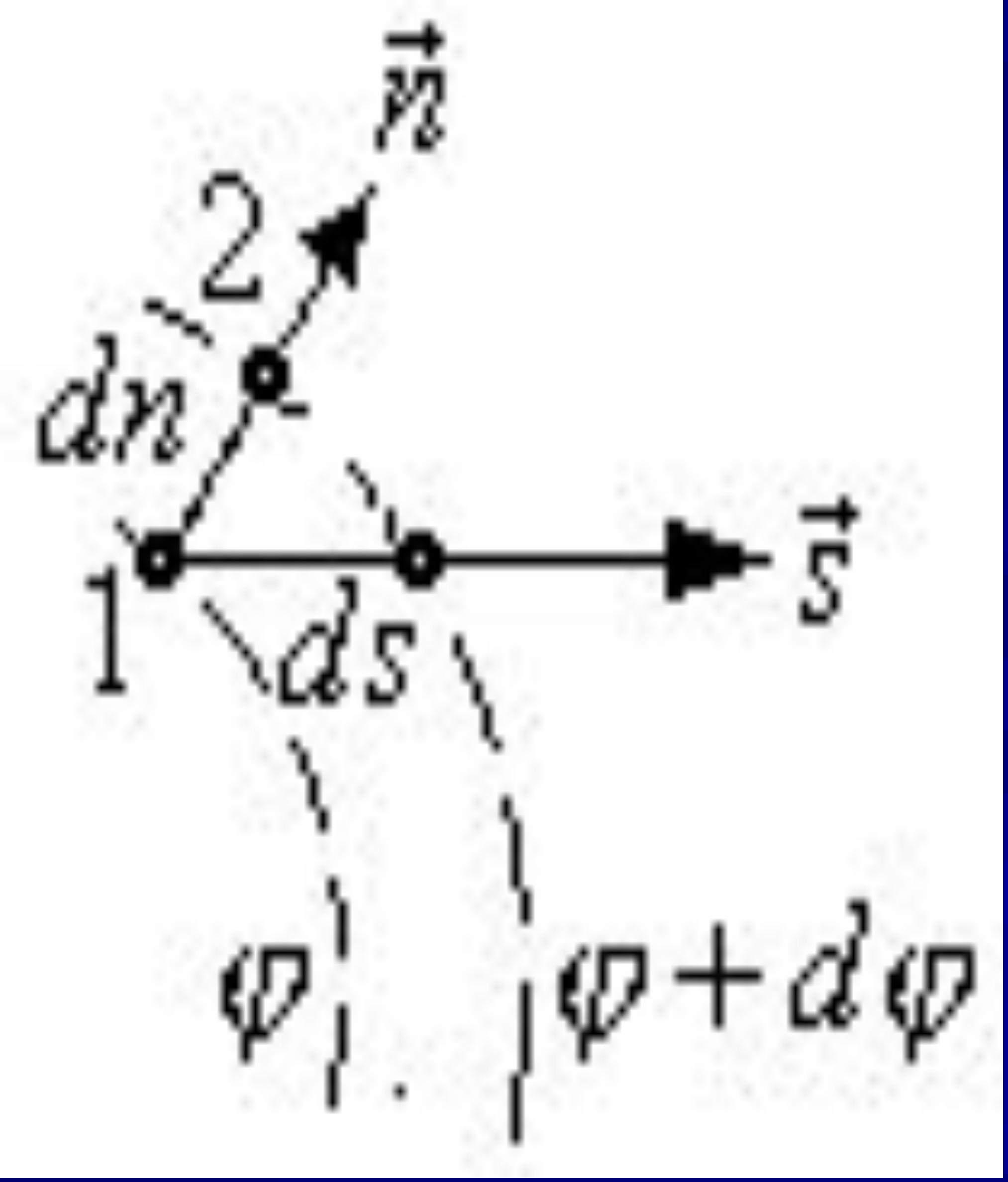
$$\varphi(x, y, z) = const$$

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



Связь напряженности с разностью потенциалов

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \qquad E = \frac{U}{d}$$



$$\frac{d\varphi}{dn} > \frac{d\varphi}{ds}$$

т.к.

$$dn < ds$$

$$grad\,\varphi = \frac{d\varphi}{dn}\vec{n}$$

. Единица измерения градиента — *В/м*.

Теорема Гаусса для поля в вакууме

Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности зарядов, делённых на ε_0

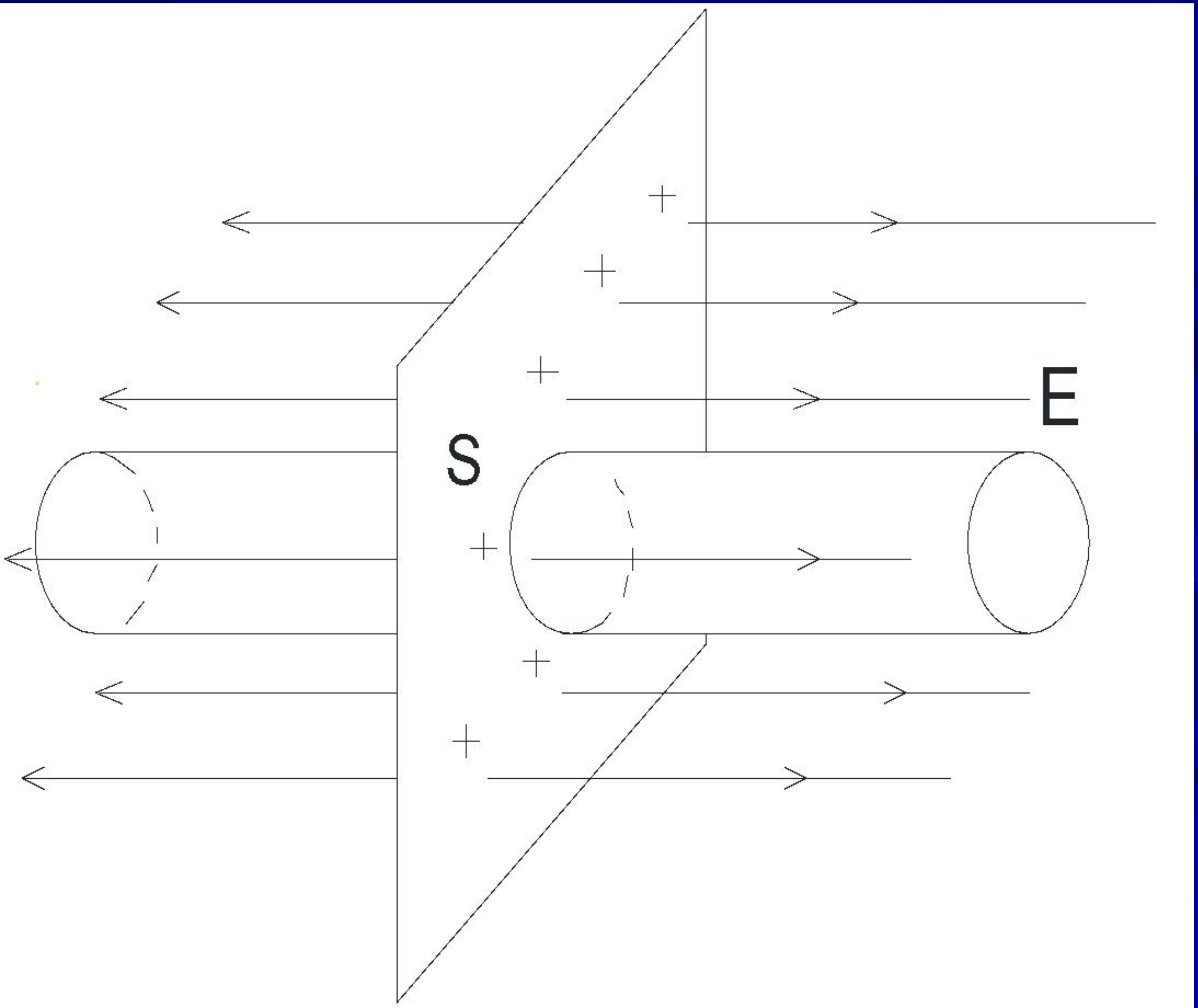
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i$$

Теорема Гаусса для поля в вакууме

- Если заряд распределён в пространстве с объёмной плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$, то
- теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме будет иметь вид

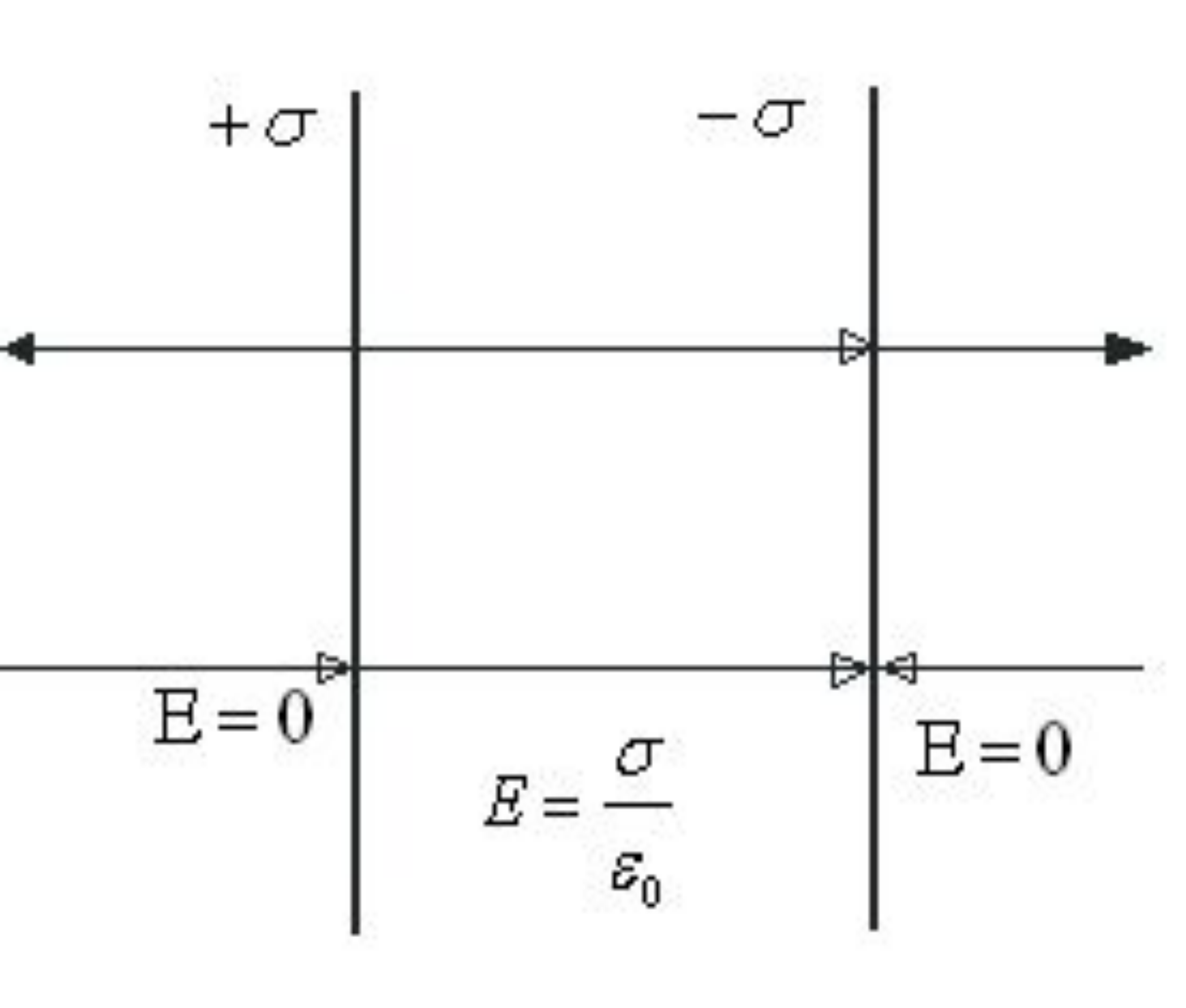
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n \cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$$

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

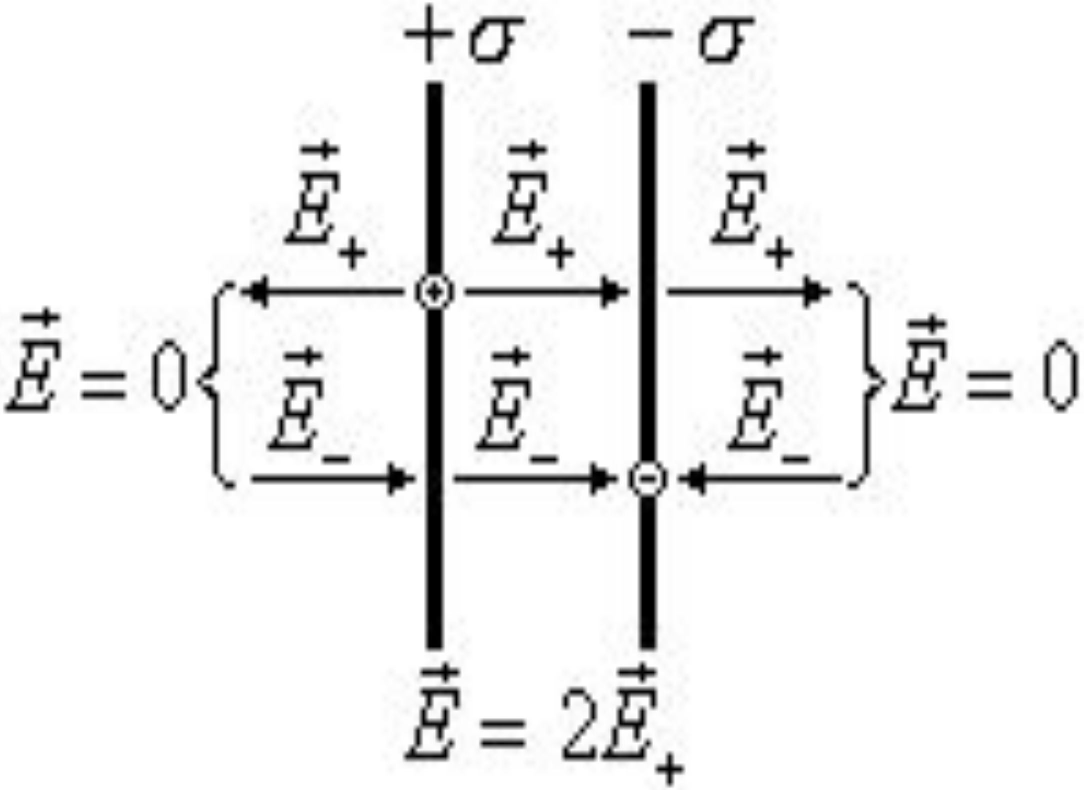
Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

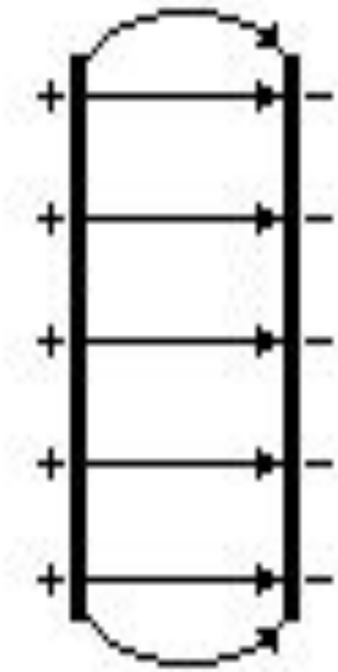


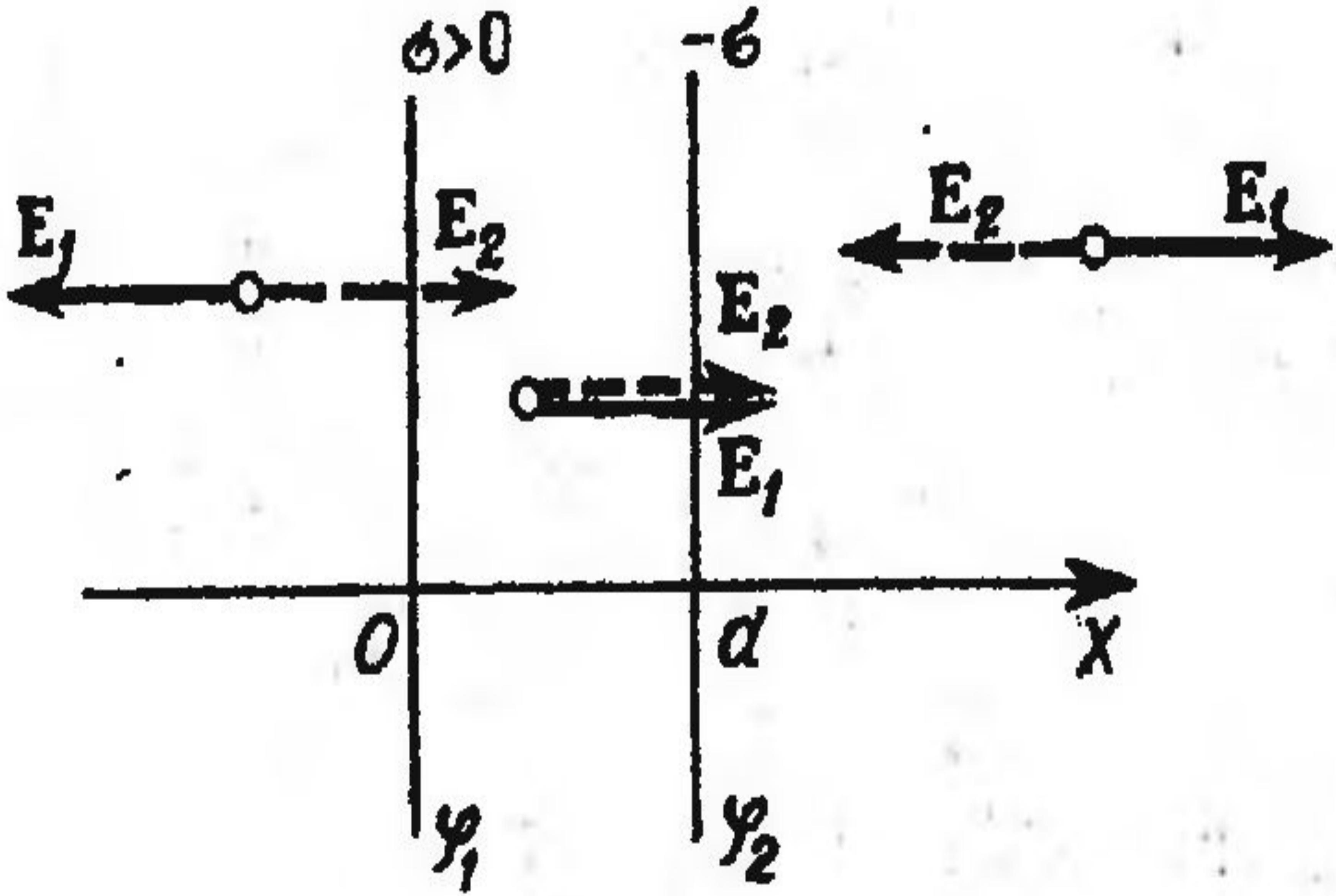
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Поле двух плоскостей

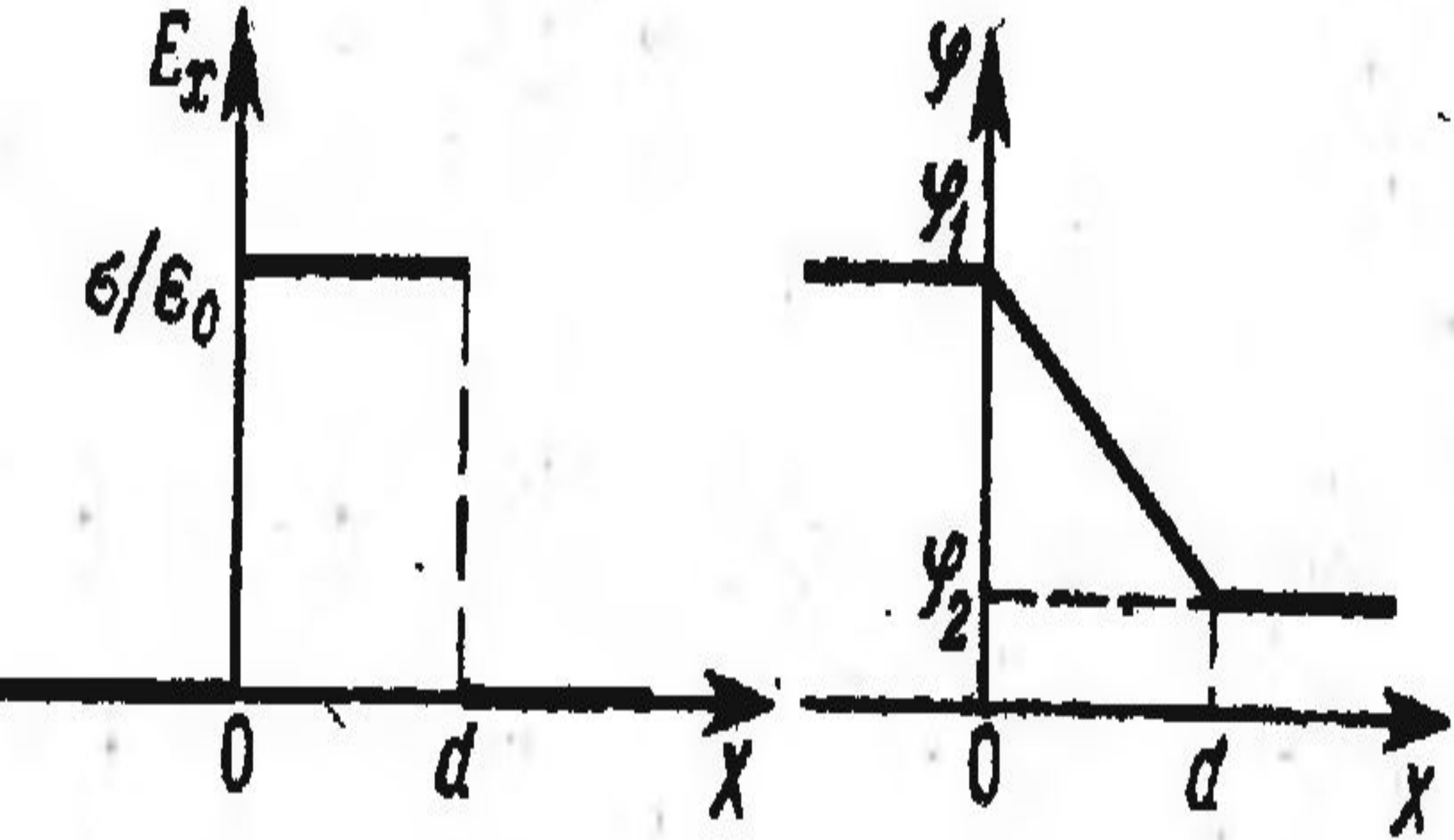
$$\vec{E} = \vec{E}_{+} + \vec{E}_{-}; \quad E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}; \qquad E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0}$$



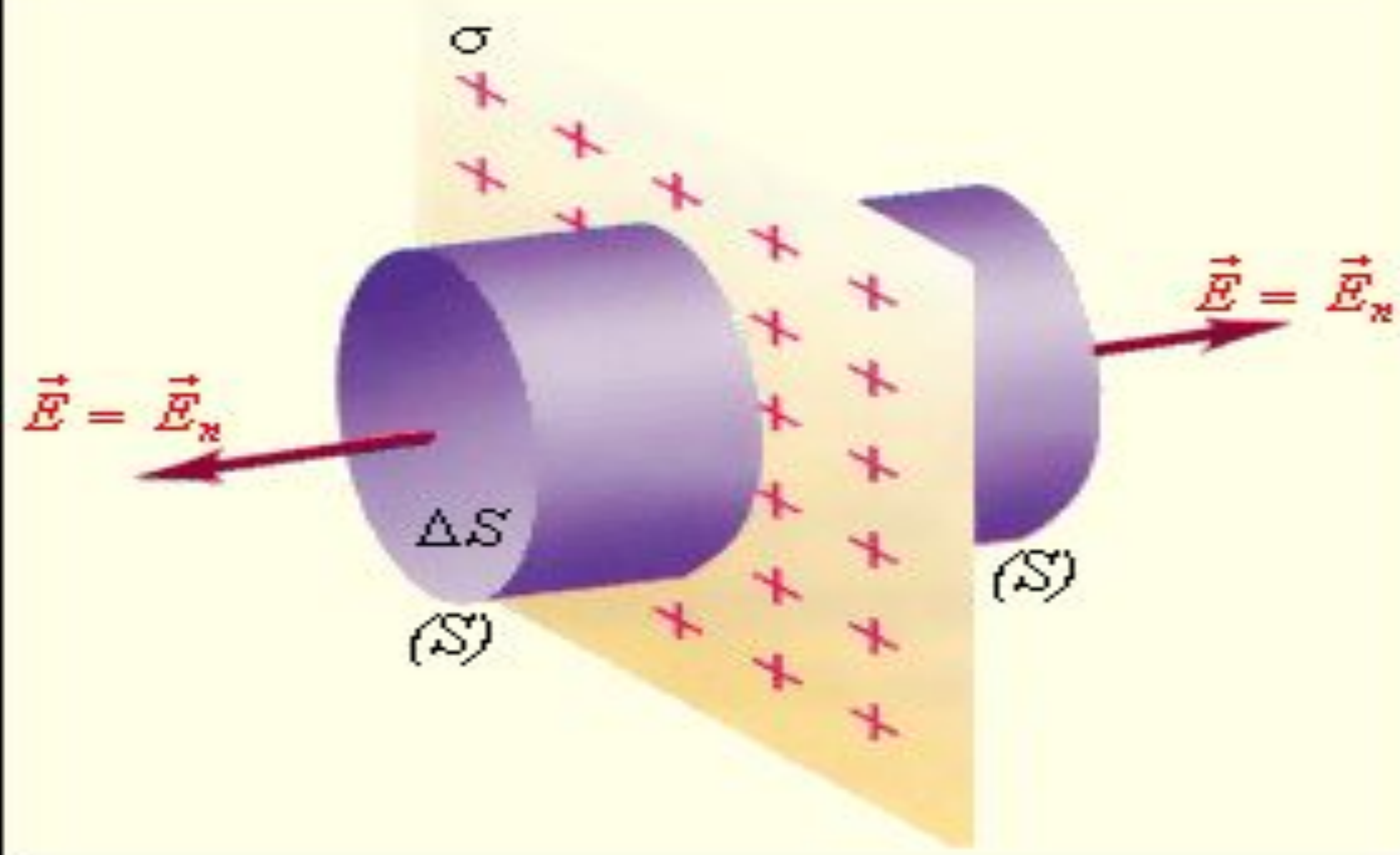


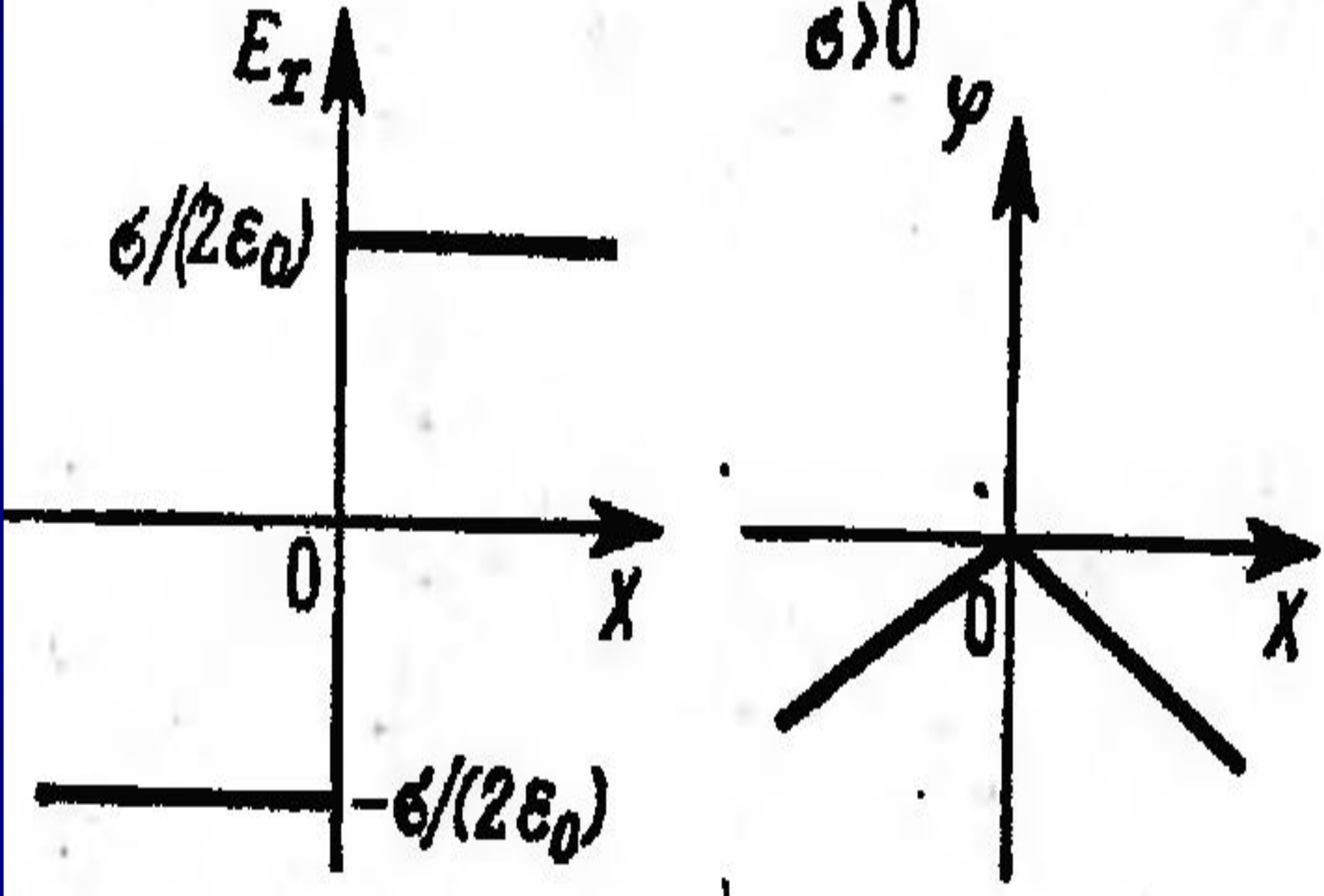


σ>0
-σ
E1
E2
E2
E1
E2
E1
O
d
X
φ1
φ2


E_x
σ/ε_0
0
d
x
φ
φ_1
φ_2
0
d
x

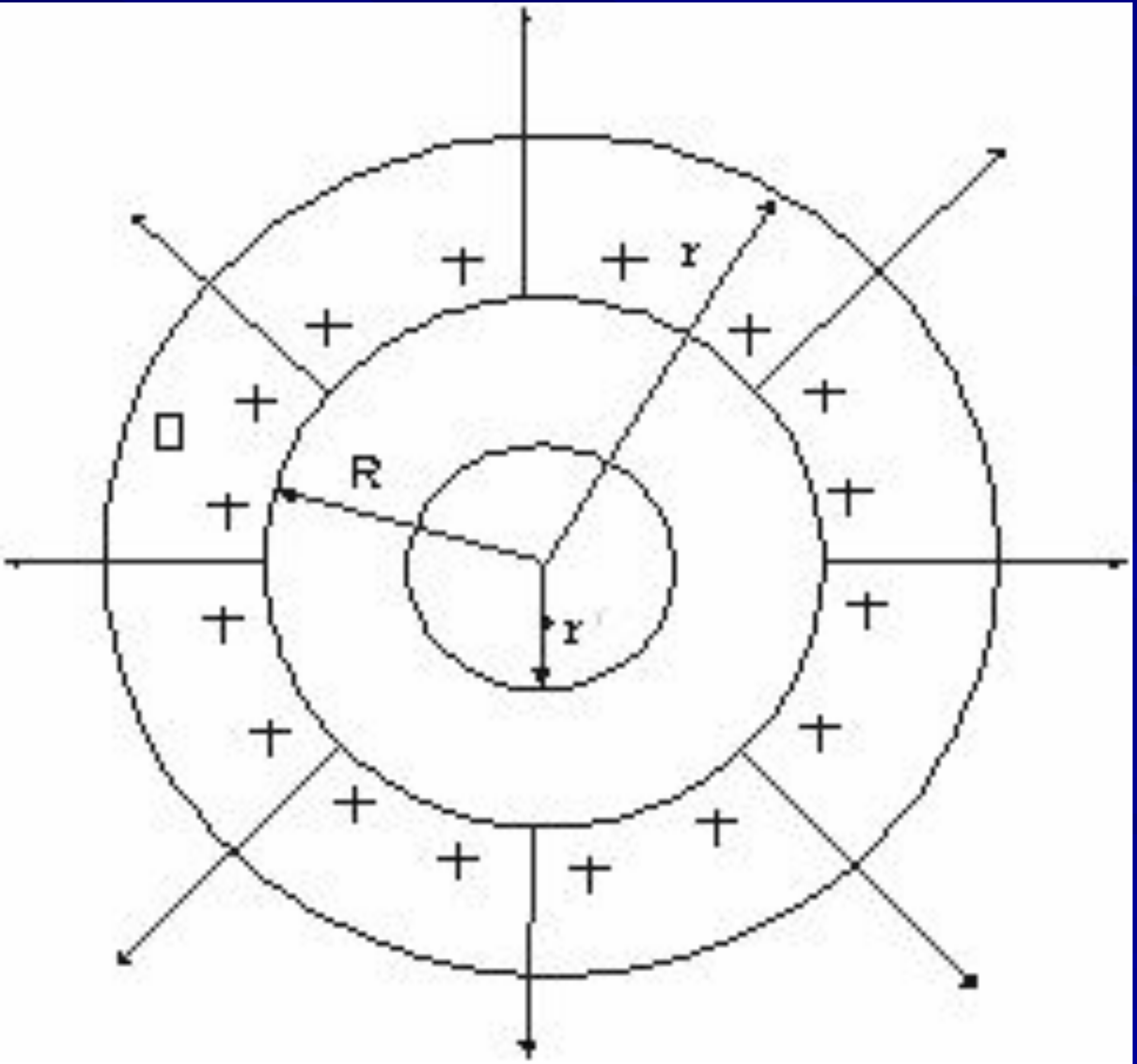
Поле равномерно заряженной плоскости





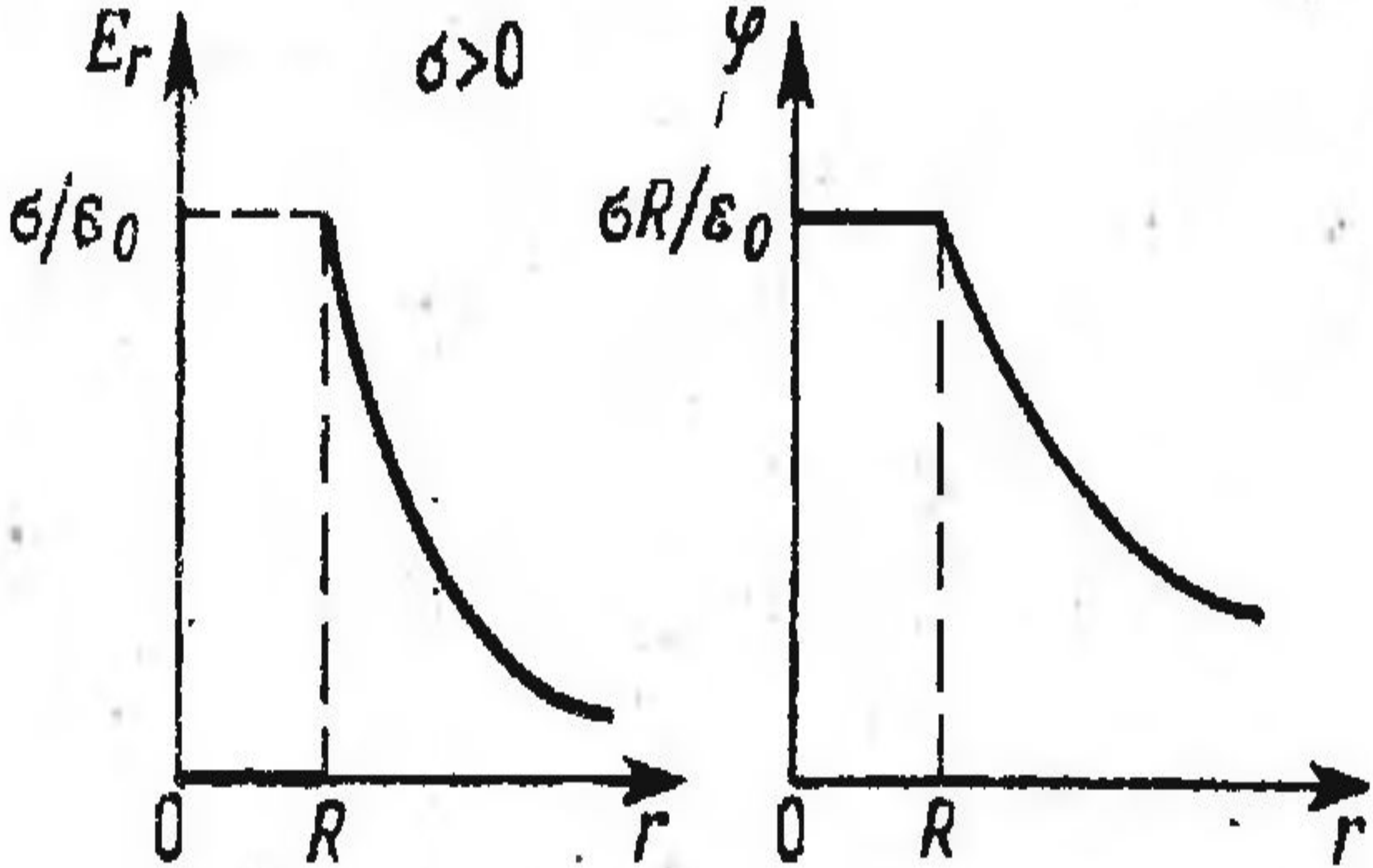
E_x
$\sigma/(2\varepsilon_0)$
0
x
$-\sigma/(2\varepsilon_0)$
$\sigma>0$
φ
0
x

Поле равномерно заряженной сферической поверхности.



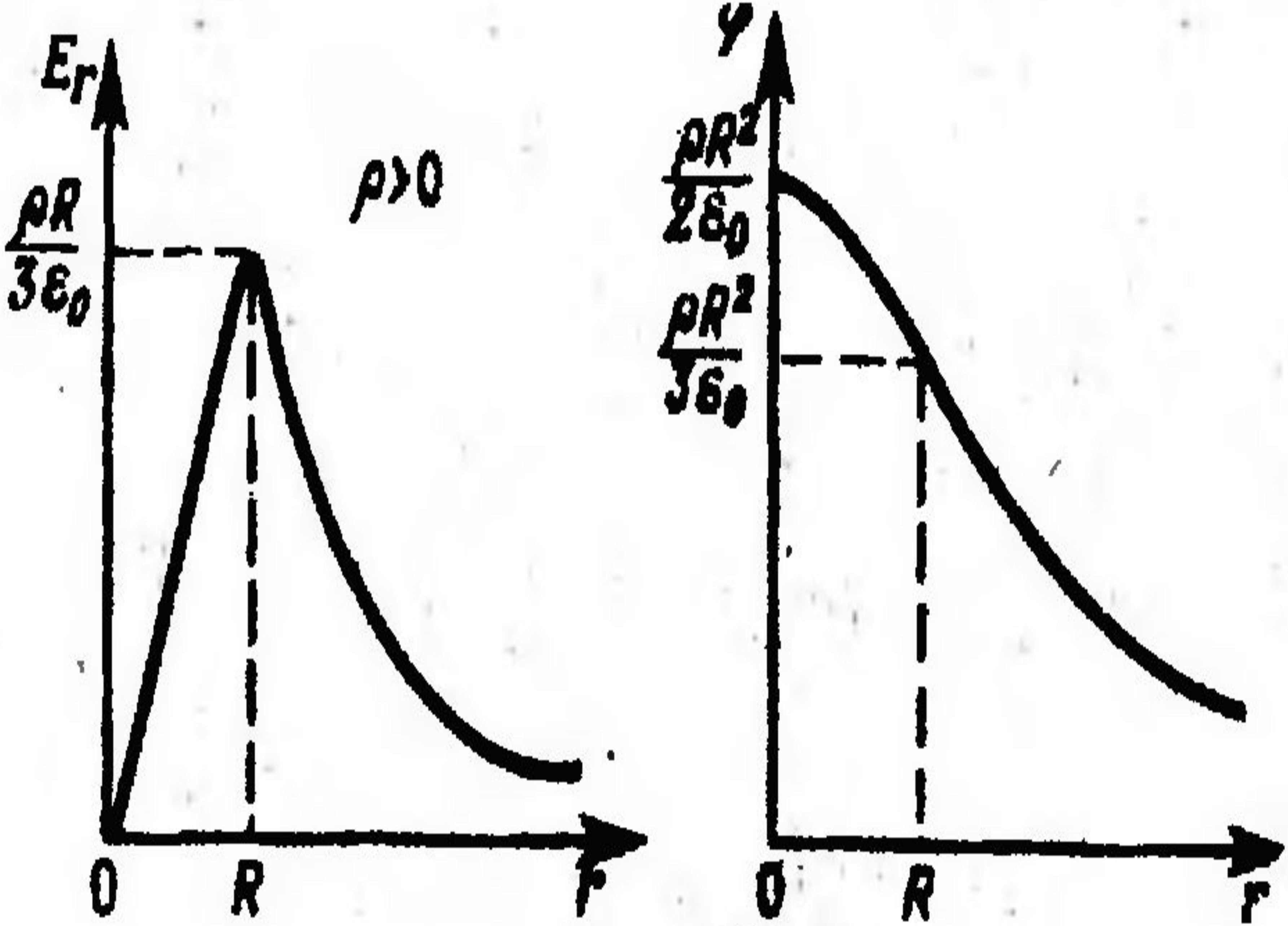
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$(r \geq R)$



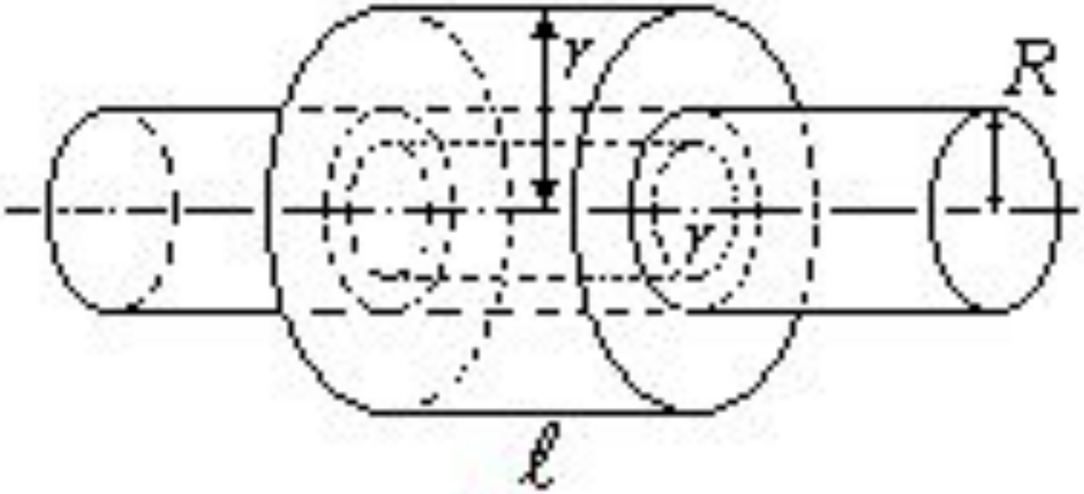
E_r
$\sigma>0$
σ/ε_0
0
R
r
φ
$\sigma R/\varepsilon_0$
0
R
r

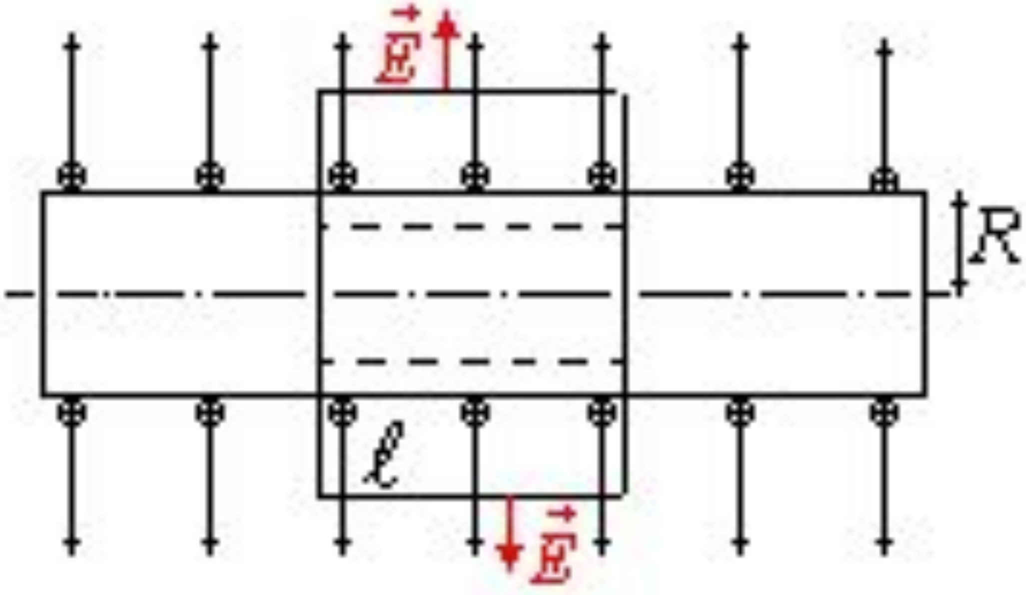
Поле заряда, равномерно распределенного в вакууме по объему шара

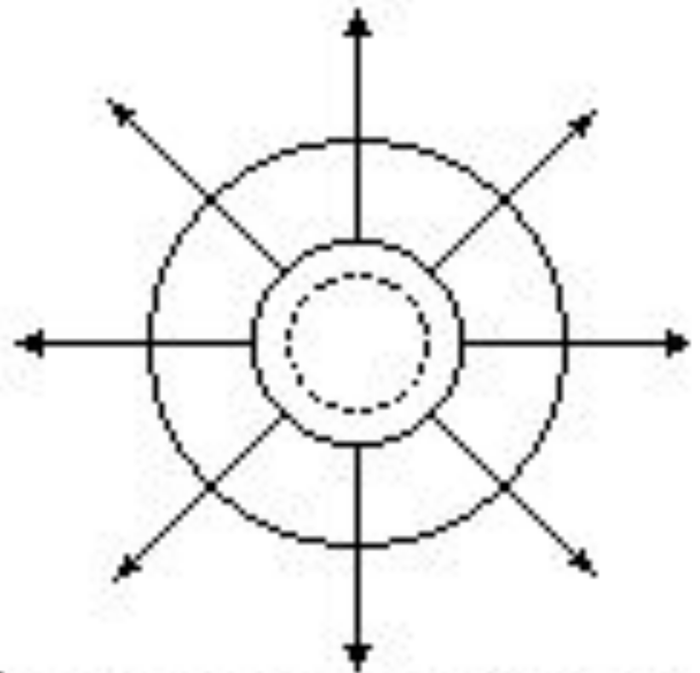


E_r
$\rho>0$
$\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$
0
R
r
φ
$\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$
$\frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$
0
R
r

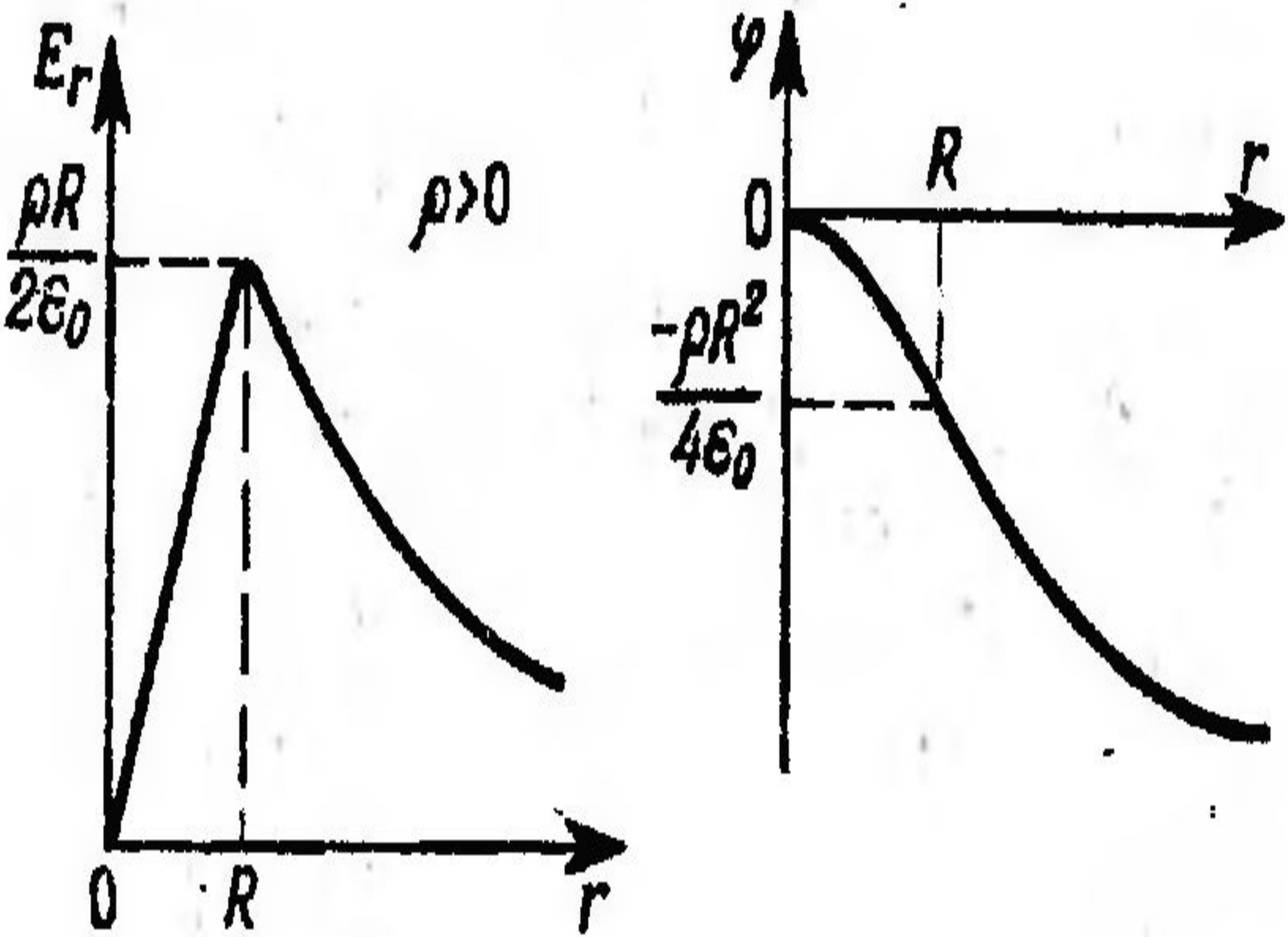
Поле бесконечно длинного заряженного цилиндра (нити)



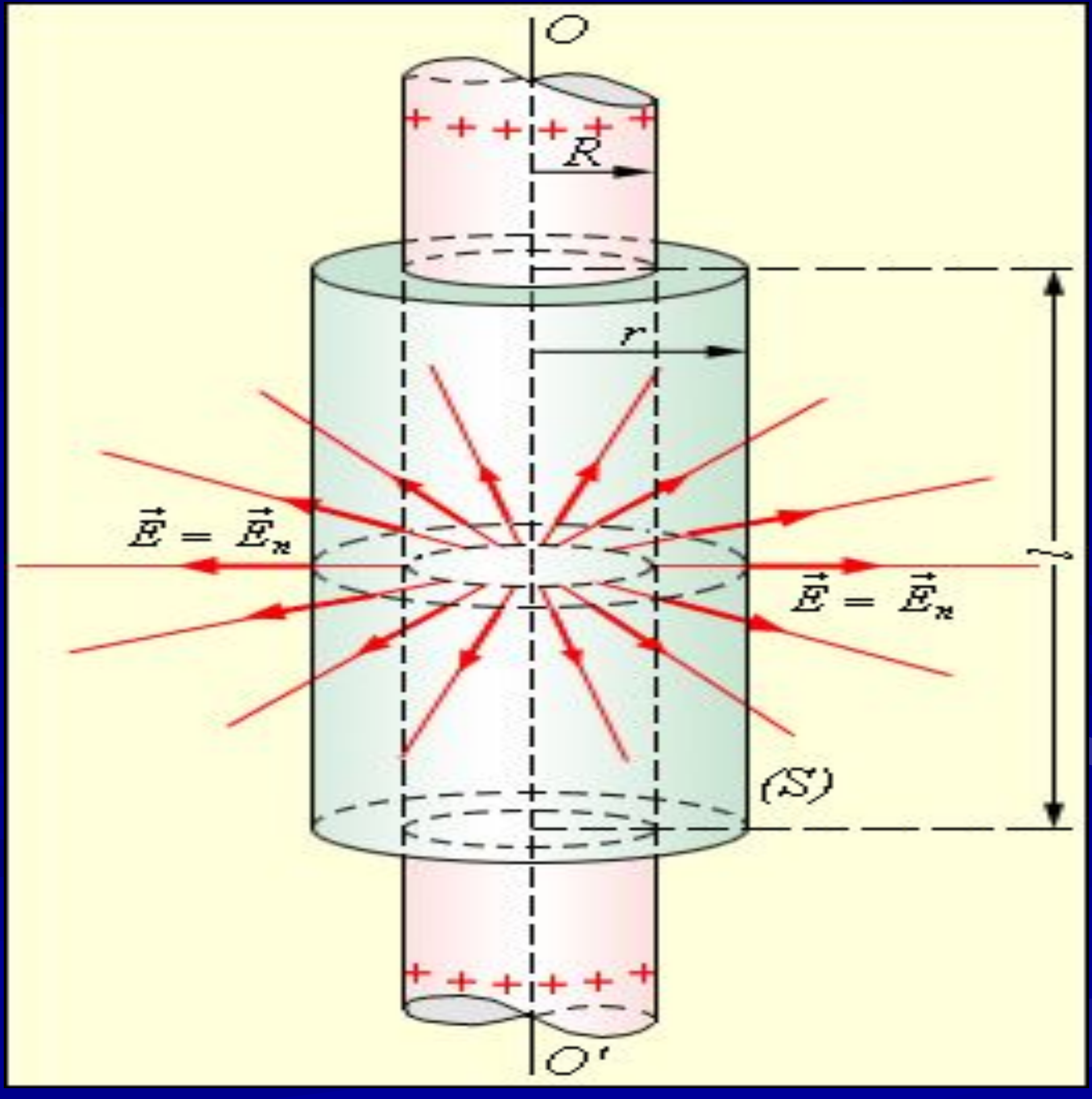


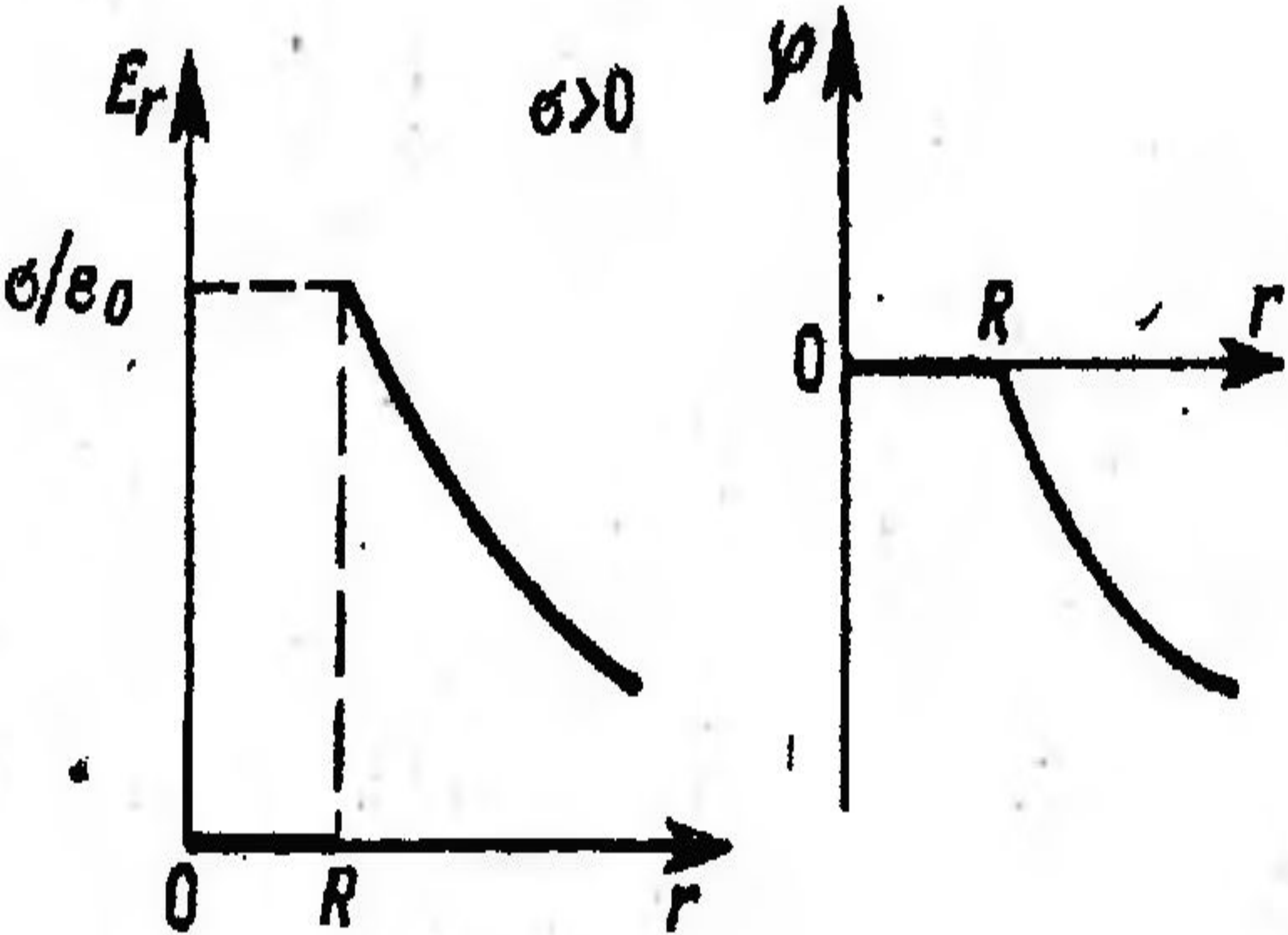


Вид с торца цилиндра


E_r
$\frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$
$\rho>0$
0
R
r
φ
R
r
0
$-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0}$

Поле однородно заряженного цилиндра




E_r
$\sigma>0$
σ/ε_0
0
R
r
φ
0
R
r

Основные выводы

- Напряженность электростатического поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность;
- при переходе через границу области объемного заряда напряженность поля в вакууме изменяется непрерывно;
- потенциал поля всегда является непрерывной функцией координат.