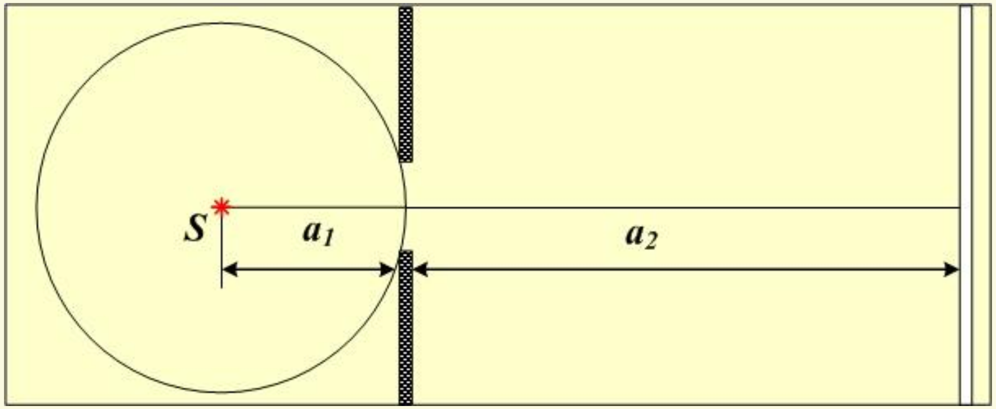
4.7. Дифракция сферических волн (дифракция Френеля). Постановка задачи.

4.7. Дифракция Френеля.

Рассмотрим теперь случай, когда на преграду (отверстие) падает сферическая волна (волновой фронт – сфера), исходящая из точечного источника. Известна длина волны λ, размер отверстия b и расстояние от источника до преграды (отверстия) a_1 и расстояние от преграды до экрана a_2. Требуется Определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям (на экране).

Для того, чтобы определить интенсивность излучения в произвольной точке экрана, необходимо просуммировать вклады в интенсивность от всех точечных источников открытой части волнового фронта.



4.7. Дифракция Френеля.

Можно сформулировать следующий алгоритм суммирования интенсивностей излучения.

1. Записать уравнение волны, излучаемой каждой точкой открытой части волнового фронта.

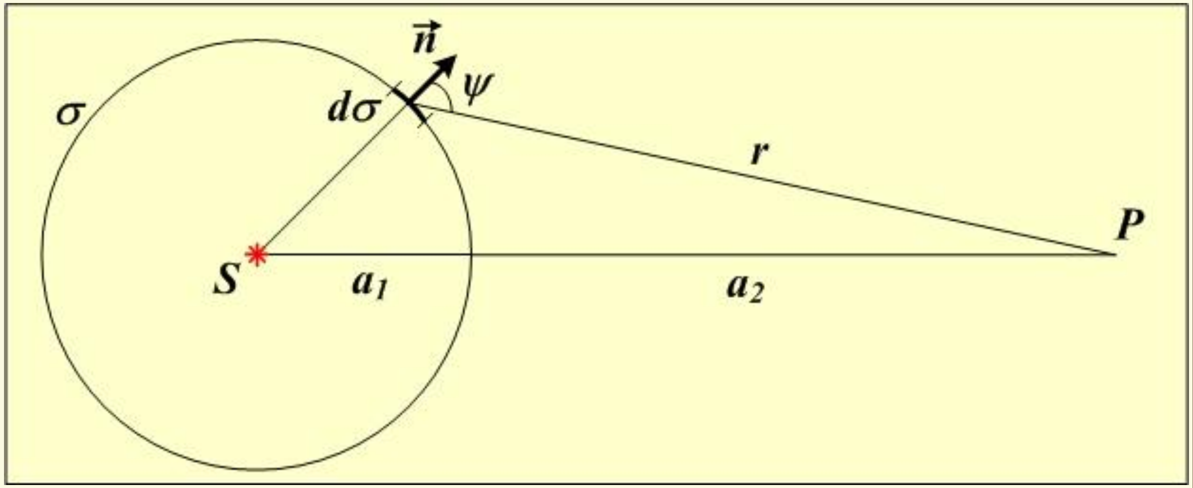
2. Разделить открытую часть волнового фронта на зоны Френеля.

3. Просуммировать вклады от всех зон Френеля в интенсивность излучения в точке наблюдения.

4.8. Уравнение волны от одного точечного источника в случае дифракции Френеля.

4.8. Уравнение волны от одного точечного источника в случае дифракция Френеля.

Пусть S – точечный источник сферических волн. К моменту времени $t = \tau$ фронт волны представляет собой сферическую поверхность σ.



$d\sigma$ – элемент сферической поверхности, который в дальнейшем мы будем считать источником вторичных волн;

$\vec{n}$ - вектор нормали к элементу сферической поверхности $d\sigma$.

ψ – угол между вектором нормали к $d\sigma$ и направлением на точку наблюдения;

r – расстояние от элемента $d\sigma$ до точки наблюдения.

4.8. Уравнение волны от одного точечного источника в случае дифракция Френеля.

Уравнение сферической волны в общем случае можно записать так

$$E = E_0' \frac{e^{i(\omega t - kr + \alpha)}}{r}.$$

E_0' - амплитуда сферической волны, исходящей из источника S.

Пусть начальная фаза колебаний волны, испускаемой источником S равна нулю. Тогда запаздывание по фазе колебаний на поверхности σ составит

$$\delta\alpha = ka_1.$$

Тогда для колебаний, происходящих на поверхности σ можно записать

$$E = E_0' \frac{e^{i(\omega t + ka_1)}}{a_1} = E_0' \frac{e^{ika_1}}{a_1} e^{i\omega t}.$$

4.8. Уравнение волны от одного точечного источника в случае дифракция Френеля.

Величину E_0 можно считать амплитудой колебаний на поверхности σ.

$$E_0 = E_0' \frac{e^{ika_1}}{a_1}.$$

Для волн, исходящих из точечных источников на поверхности σ

$$dE = K(\psi) E_{0\sigma} \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma.$$

Здесь $E_{0\sigma}$ - амплитуда волны, исходящей с элемента поверхности σ.

Коэффициент $K(\psi)$ определяет зависимость амплитуды колебаний волны от направления, то есть от угла ψ.

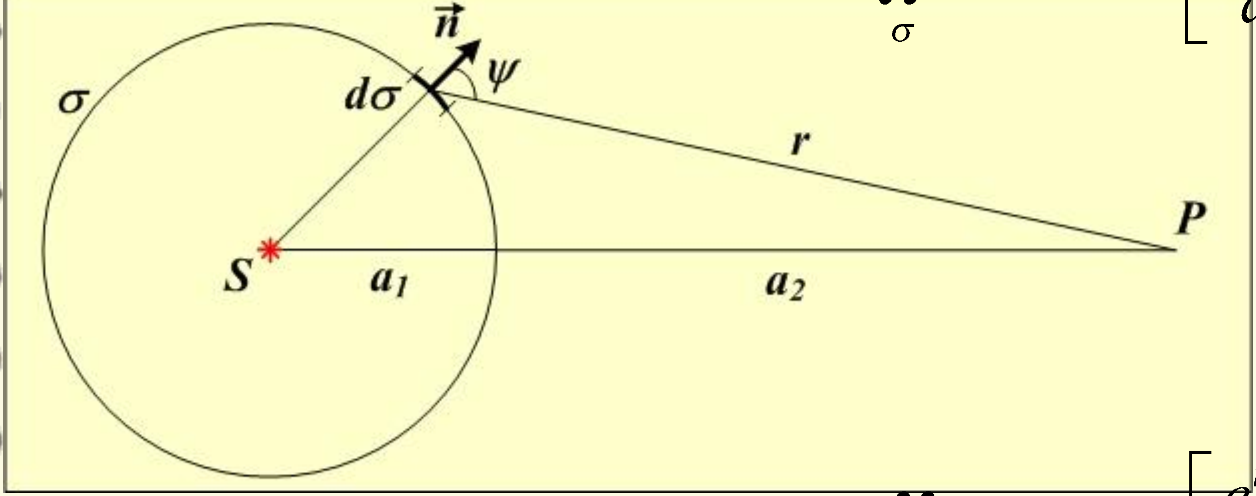
$K(\psi) = K_{max}$ при совпадении направлений вектора нормали с направлением на точку наблюдения;

$K(\psi) = 0$ при $\psi \geq \pi/2$ (не существует волн, распространяющихся внутрь поверхности σ).

4.8. Уравнение волны от одного точечного источника в случае дифракция Френеля.

Суммарная напряжённость электрического поля в волне, исходящей из всех точечных источников на поверхности σ (или её участка σ_1)

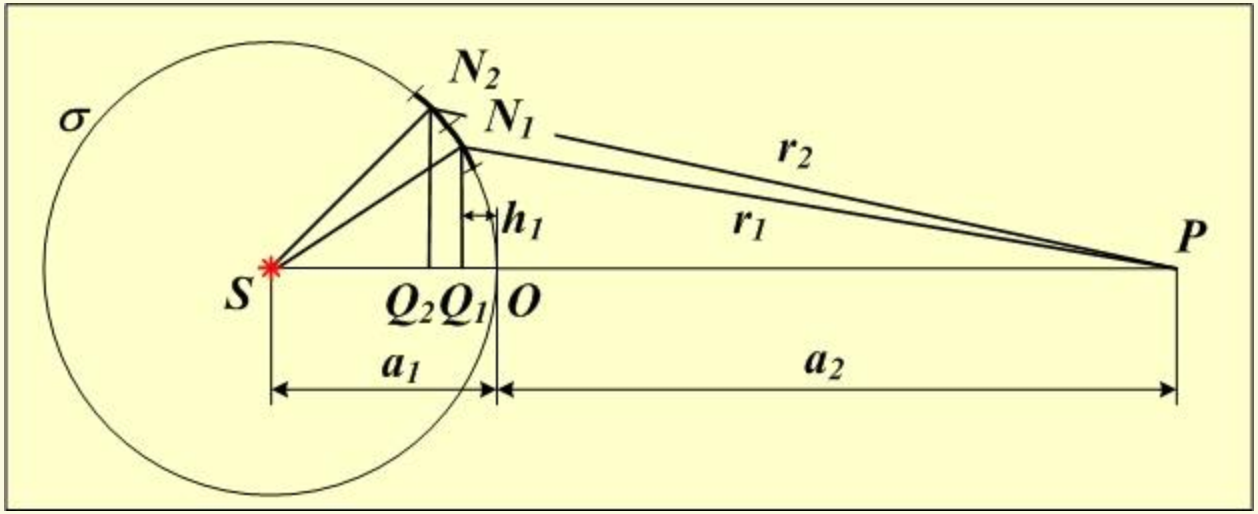
$$E(P)=\iint_{\sigma} dE=\iint_{\sigma} K(\psi)E_{0\sigma}\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}d\sigma=$$
$$=\iint_{\sigma} K(\psi)E_0'\left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right]\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}d\sigma$$



$$E(P)=\iint_{\sigma} K(\psi)E_0'\left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right]\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}d\sigma.$$

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.



Для того, чтобы выполнить суммирование (интегрирование), разобьём весь волновой фронт на зоны Френеля, исходя из условия

$$r_1 = |N_1P| = a_2 + \frac{\lambda}{2}; \qquad r_2 = |N_2P| = a_2 + 2\frac{\lambda}{2};$$

$$r_m = |N_mP| = a_2 + m\frac{\lambda}{2}.$$

Волны из двух соседних зон приходят в точку наблюдения в противофазе.

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

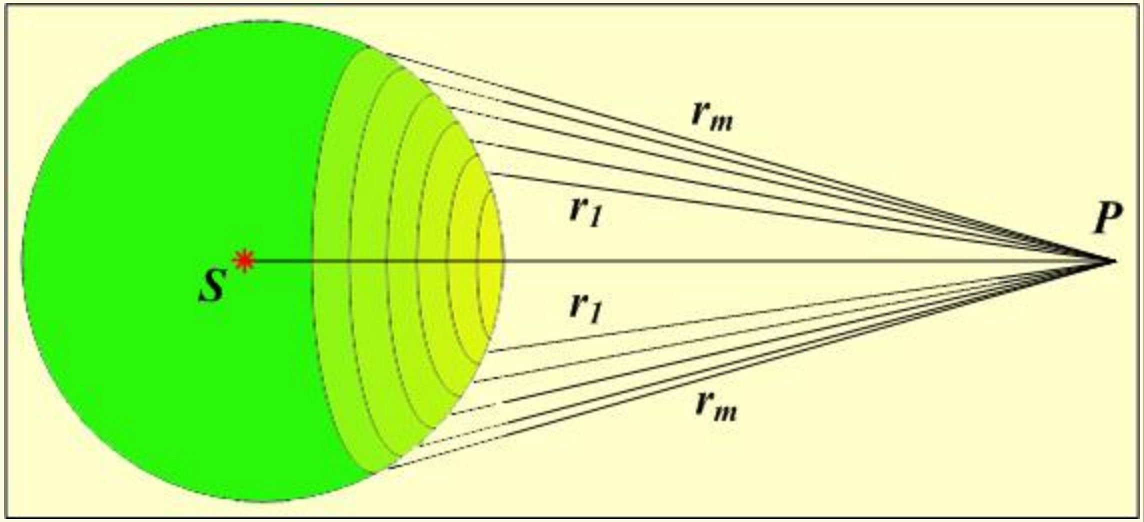
Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

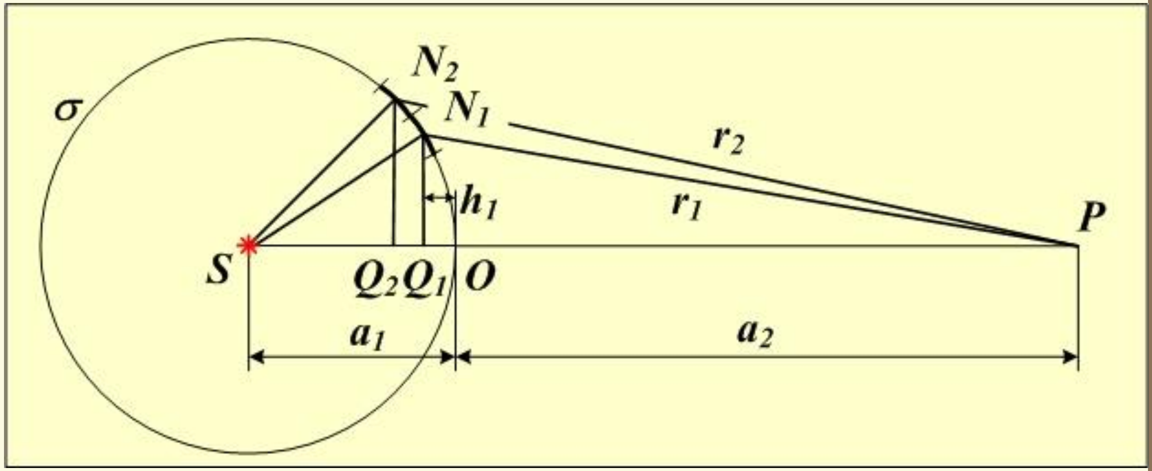
Радиус зоны Френеля

$$R_1 = |N_1 Q_1|.$$

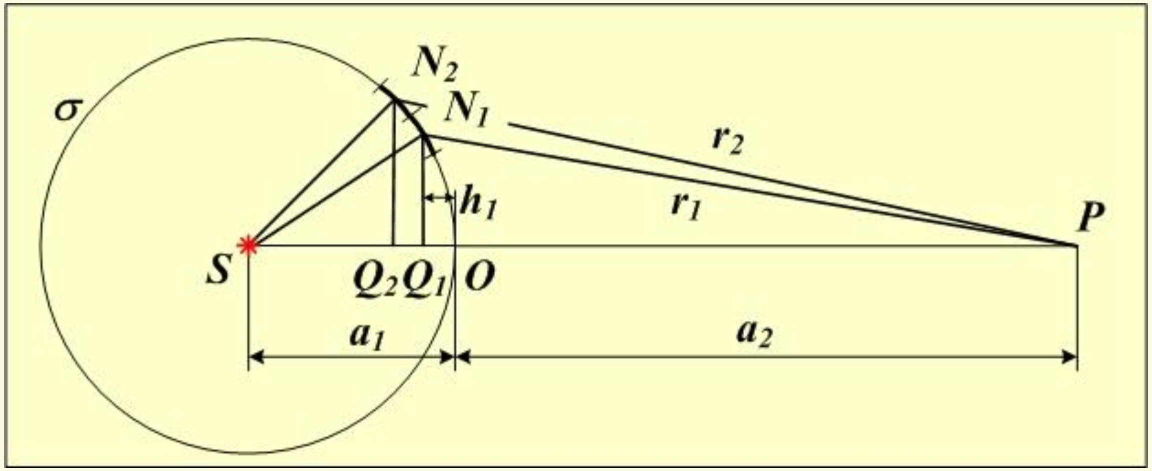
Чтобы найти радиус зоны Френеля, нужно определить высоту сферического сегмента

$$h_1 = |OQ_1|.$$





4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.



$$R_1 = |N_1 Q_1|.$$
$$h_1 = |OQ_1|.$$

R_m и h определим из прямоугольных треугольников SN_1Q_1 и PN_1Q_1.

h – высота сферического сегмента. Без неё нельзя определить ни радиус, ни площадь зон Френеля.

$$\begin{cases} (a_1 - h)^2 + R_m^2 = a_1^2, \\ (a_2 + h)^2 + R_m^2 = \left(a_2 + m\dfrac{\lambda}{2}\right)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h)^2, \\ R_m^2 = \left(a_2 + m\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h)^2. \end{cases}$$

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

$$\begin{cases} R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h)^2, \\ R_m^2 = \left(a_2 + m\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h)^2. \end{cases}$$

$$a_1^2 - (a_1 - h)^2 = \left(a_2 + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h)^2;$$

$$a_1^2 - a_1^2 + 2a_1h - h^2 = a_2^2 + 2a_2m\frac{\lambda}{2} + m^2\frac{\lambda^2}{4} - a_2^2 - 2a_2h - h^2;$$

$$2a_1h = a_2m\lambda + m^2\frac{\lambda^2}{4} - 2a_2h;$$

Пренебрежём малой величиной порядка λ^2: $2a_1h = a_2m\lambda - 2a_2h;$

Отсюда высота сферического сегмента $h_m = \dfrac{a_2m\lambda}{2(a_1 + a_2)}.$

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

Теперь определим радиус зоны Френеля номер m:

$$R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h_m)^2,$$

$$R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h_m)^2 = a_1^2 - a_1^2 + 2a_1h_m - h_m^2 = 2a_1h_m - h_m^2.$$

Итак,

$$R_m^2 = 2a_1h_m - h_m^2, \qquad h_m = \frac{a_2 m\lambda}{2(a_1 + a_2)}.$$

После подстановки

$$R_m^2 = 2a_1\frac{a_2 m\lambda}{2(a_1 + a_2)} - \frac{a_2^2 m^2 \lambda^2}{4(a_1 + a_2)^2},$$

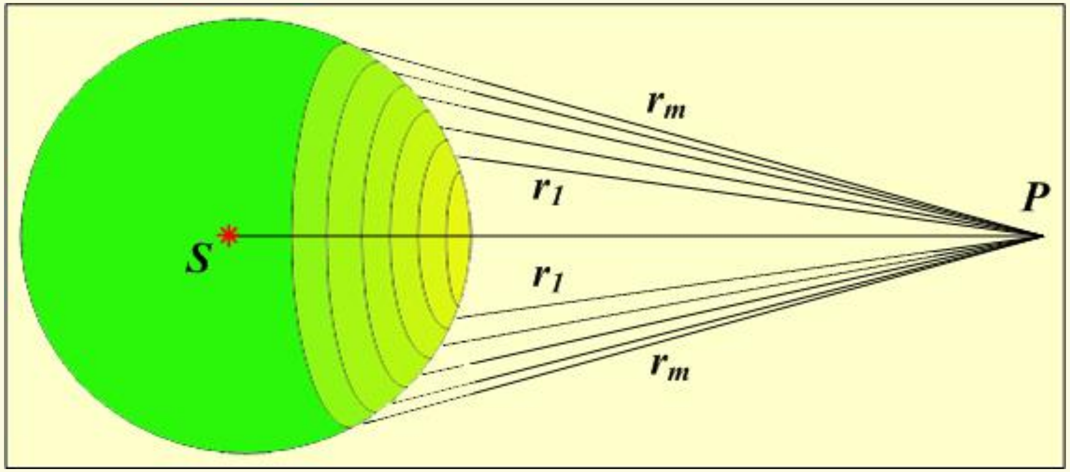
Пренебрежём малой величиной порядка λ^2:

$$R_m^2 = \frac{a_1 a_2 m\lambda}{(a_1 + a_2)},$$

$$\boxed{R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m\lambda}.}$$

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

Согласно определению площади зон Френеля должны быть равны. Проверим, выполняется ли это условие.



Площадь зоны Френеля номер m равна разности площадей сферических сегментов.

Площадь сферического сегмента равна

$$\Omega = 2\pi Rh.$$

$$\Omega_m = 2\pi a_1 h_m = \frac{2\pi a_1 a_2 m\lambda}{2(a_1 + a_2)} = \frac{\pi a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m\lambda.$$

Площадь зоны Френеля номер m:

$$S_m = \Omega_m - \Omega_{m-1} = \frac{\pi a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} \lambda\left[m - (m-1)\right] = \frac{\pi a_1 a_2 \lambda}{(a_1 + a_2)}.$$

4.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля.

$$S_m = \frac{\pi a_1 a_2 \lambda}{(a_1 + a_2)}.$$

Площади зон Френеля не зависят от номера зоны m, следовательно, они равны. Это условие выполняется для не слишком больших номеров зон m, таких, что

$$m^2 \lambda^2 \to 0.$$

Напомним, что формула для радиусов зон Френеля справедлива при выполнении этого же условия.

Выводы:

1. Радиусы зон Френеля можно определить по формуле:

$$\boxed{R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m\lambda}.}$$

2. Площади зон Френеля равны.

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Суммарная напряжённость электрического поля в волне, исходящей из всех точечных источников на поверхности σ (или её участка σ_1)

$$E(P)=\iint_{\sigma} K(\psi)\,E_0'\left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right]\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}\,d\sigma.$$

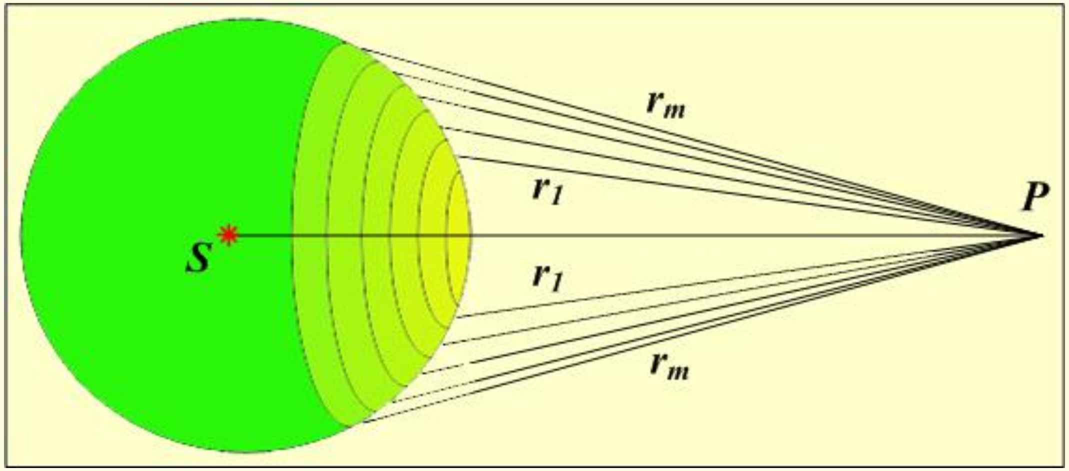
Интенсивность излучения в точке наблюдения Р пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля.

$$I\sim E^2(P)=\left|\iint_{\sigma} K(\psi)\,E_0'\left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right]\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}\,d\sigma\right|^2.$$

Для того, чтобы вычислить этот интеграл мы (вслед за Френелем!) разделили волновой фронт на зоны, обладающие следующими свойствами.

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Свойства зон Френеля:



1. В точку наблюдения P волны из двух соседних зон приходят с разностью хода λ/2.

2. Радиусы зон Френеля можно определить по формуле:

$$R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m\lambda}.$$

3. Площади зон Френеля равны.

4. Свойства 2 и 3 справедливы для не слишком больших номеров зон m, таких, что

$$m^2\lambda^2 \to 0.$$

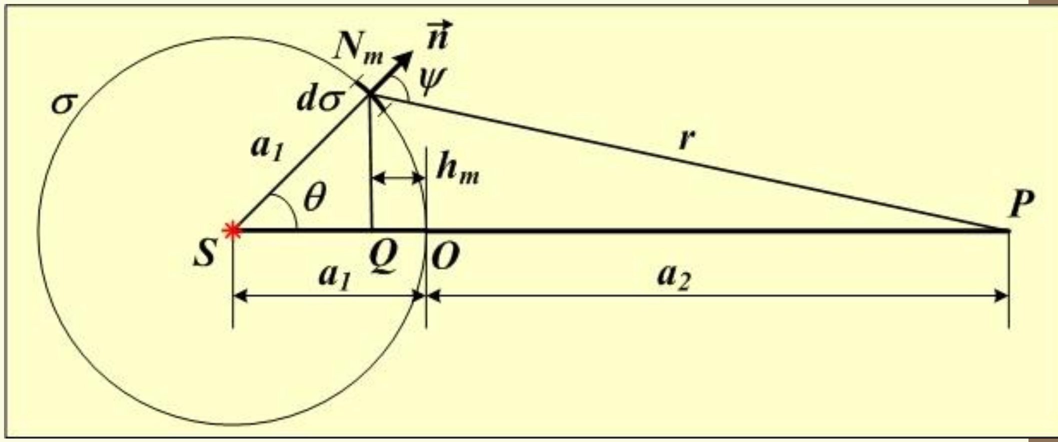
4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Итак, приступаем к вычислению интеграла

$$E(P)=\iint\limits_{\sigma}K(\psi)E_0'\left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right]\frac{e^{ikr}}{r}e^{i\omega t}d\sigma.$$

Определим элемент поверхности $d\sigma$. В рассматриваемом случае

$$d\sigma=a_1^2\sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$



Из треугольника SNP по теореме косинусов:

$$r^2=(a_1+a_2)^2+a_1^2-$$
$$-2a_1(a_1+a_2)\cos\vartheta;$$

Продифференцируем последнюю формулу по r и по θ.

$$2rdr=2a_1(a_1+a_2)\sin\vartheta d\vartheta; \qquad \sin\vartheta d\vartheta=\frac{rdr}{a_1(a_1+a_2)}.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

$$d\sigma = a_1^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \qquad \sin\vartheta d\vartheta = \frac{rdr}{a_1\left(a_1+a_2\right)}.$$

$$d\sigma = a_1^2 \frac{rdr}{a_1\left(a_1+a_2\right)} d\varphi = \frac{a_1}{\left(a_1+a_2\right)} rdrd\varphi.$$

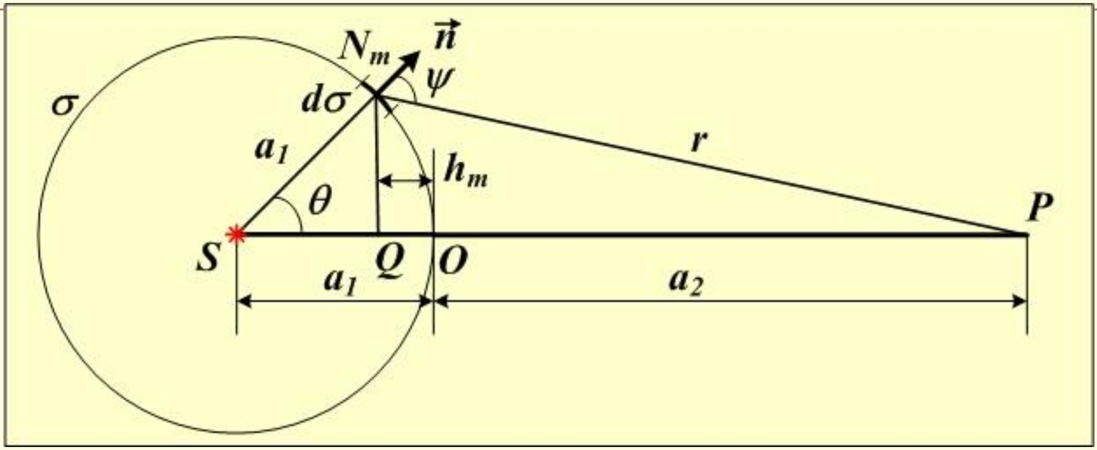
Подставим полученное выражение в интеграл:

$$E(P) = \iint_{\sigma} K\left(\psi\right) E_0' \left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma =$$

$$= \iint_{r,\varphi} K\left(\psi\right) E_0' \left[\frac{e^{ika_1}}{a_1}\right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} \frac{a_1}{\left(a_1+a_2\right)} rdrd\varphi =$$

$$= \frac{E_0' e^{ika_1} e^{i\omega t}}{\left(a_1+a_2\right)} \iint_{r,\varphi} K\left(\psi\right) e^{ikr} drd\varphi = 2\pi \frac{E_0' e^{ika_1} e^{i\omega t}}{\left(a_1+a_2\right)} \int_{r_0}^{r_m} K\left(\psi\right) e^{ikr} dr.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.



$$E(P) = 2\pi \frac{E_0' e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \int\limits_{r_0}^{r_{\max}} K(\psi) e^{ikr} dr.$$

Теперь воспользуемся разбиением волнового фронта на зоны Френеля и сначала подсчитаем вклад в напряжённость поля от одной зоны Френеля, зоны номер m.

Будем считать, что коэффициент в пределах одной зоны Френеля постоянен. Для каждой зоны $K(\psi)$ имеет своё определённое значение.

$$K(\psi) = K_m(\psi) = K_m.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Вклад в напряжённость поля от одной зоны Френеля номер *m* равен

$$E_m = 2\pi K_m \frac{E_0' e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \int_{r_{m-1}}^{r_\mathrm{m}} e^{ikr} dr.$$

$$\int_{r_{m-1}}^{r_\mathrm{m}} e^{ikr} dr = \frac{1}{ik}\left(e^{ikr_m} - e^{ikr_{m-1}}\right) = \frac{1}{ik}\left(e^{ik\left(a_2 + m\frac{\lambda}{2}\right)} - e^{ik\left(a_2 + (m-1)\frac{\lambda}{2}\right)}\right) =$$

$$\frac{1}{ik}\left(e^{ik\left(a_2 + m\frac{\lambda}{2}\right)} - e^{ik\left(a_2 + m\frac{\lambda}{2}\right)} e^{-ik\frac{\lambda}{2}}\right) = \frac{1}{ik}\left(1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}\right) e^{ik\left(a_2 + m\frac{\lambda}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi i}\left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}}\right) e^{i\left(ka_2 + m\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\right)} = \frac{\lambda}{2\pi i}\left(1 - e^{-i\pi}\right) e^{i(ka_2 + m\pi)} =$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

$$=\frac{\lambda}{2\pi i}\left(1-e^{-i\pi}\right)e^{i\left(ka_2+m\pi\right)}=\frac{\lambda}{2\pi i}\left(1-\left(-1\right)\right)e^{i\left(ka_2+m\pi\right)}=$$

$$=\frac{\lambda}{\pi i}e^{im\pi}e^{ika_2}=\frac{\lambda}{\pi}\frac{e^{im\pi}}{i}\frac{i}{i}e^{ika_2}=\frac{i\lambda}{\pi}\left(-1\right)^{m+1}e^{ika_2}.$$

Подставим полученное значение интеграла в формулу для напряжённости поля от одной зоны Френеля номер *m:*

$$E_m=2\pi K_m\frac{E_0'e^{ika_1}e^{i\omega t}}{\left(a_1+a_2\right)}\int\limits_{r_{m-1}}^{r_{\mathrm{m}}}e^{ikr}dr=2\pi K_m\frac{E_0'e^{ika_1}e^{i\omega t}}{\left(a_1+a_2\right)}\frac{i\lambda}{\pi}\left(-1\right)^{m+1}e^{ika_2}=$$

$$=2i\lambda\left(-1\right)^{m+1}K_m\frac{E_0'e^{ik\left(a_1+a_2\right)}}{\left(a_1+a_2\right)}e^{i\omega t}.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Итак, вклад в напряжённость поля в точке наблюдения от одной зоны Френеля номер m равен

$$E_m(P) = 2i\lambda(-1)^{m+1} K_m \frac{E_0' e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} e^{i\omega t}.$$

Напряжённость поля в точке наблюдения, создаваемая всеми зонами Френеля равна сумме вкладов от каждой зоны.

$$E(P) = \sum_m E_m(P) = E_1(P) + E_2(P) + E_3(P) + \ldots =$$

$$= 2i\lambda e^{i\omega t} \frac{E_0' e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} (K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + \ldots).$$

Рассмотрим сумму в скобках. Коэффициенты K_i для соседних зон не сильно отличаются друг от друга, поэтому

$$K_m = \frac{K_{m-1} + K_{m+1}}{2}.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Сумму в скобках можно теперь представить так:

$$K_1 - K_2 + K_3 - \ldots. = \frac{K_1}{2} + \left[\frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2}\right] + \left[\frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2}\right] + \ldots$$

Слагаемые в квадратных скобках можно считать равными нулю. Таким образом, при полностью открытом фронте остаётся только первое слагаемое и последнее слагаемое, соответствующее очень большому номеру зоны.

$$E(P) = \frac{1}{2}\left(E_1(P) \pm E_m(P)\right).$$

При полностью открытом волновом фронте ($m \to \infty$)

$$E(P) = \frac{1}{2}E_1(P).$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

Интенсивность пропорциональна квадрату напряжённости.

$$I \sim E^2(P) = \frac{1}{2}\left(E_1(P) \pm E_m(P)\right)^2.$$

$$I = I_0'\left|i\lambda e^{i\omega t}\frac{e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)}\left(K_1 \pm K_m\right)\right|^2.$$

$$I = I_0\left(\frac{(K_1 \pm K_m)}{(a_1+a_2)}\right)^2.$$

4.10. Вычисление интенсивности излучения при дифракции Френеля.

А3. Найти радиусы первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения =1м. Длина волны света =500 нм.

Ответ: =0,71 мм, =1,0 мм, =1,22 мм, =1,41мм, =1,58 мм.

A1. Свет от монохроматического источника (λ = 600 нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия d = 6 мм. За диафрагмой на расстоянии L = 3 м от нее находится экран. Какое число m зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы, если точка наблюдения находится на экране напротив центра отверстия? Каким будет центр дифракционной картины на экране – темным или светлым?

Дано:

λ = 600 нм

L = 3 м

d = 6 мм

m - ?

Решение

Ответ: m = 5; центр дифракционной картины будет светлым.