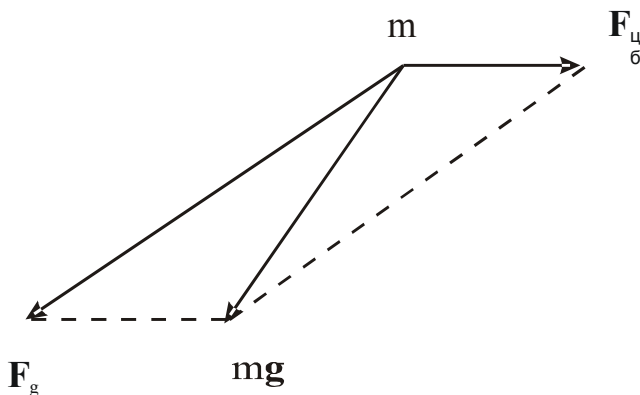


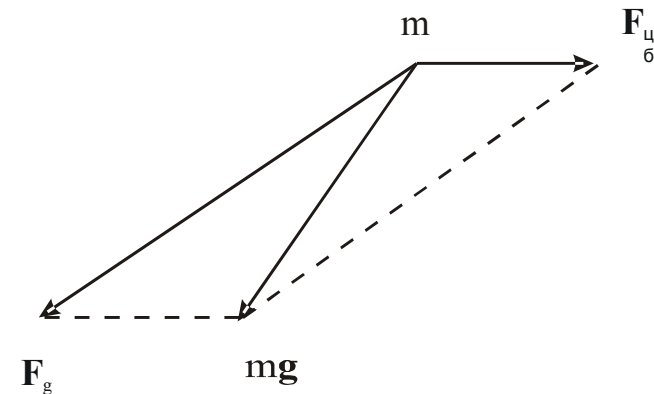
Вес тела и сила тяжести



Весом тела называется сила, с которой тело действует на опору или подвес вследствие гравитационного притяжения.

В условиях Земли — вследствие притяжения к Земле. Вес тела не надо путать с **силой тяжести $P = mg$** , где **g** - одинаковое для всех тел вблизи вращающейся (т.е. во вращающейся системе отсчета) поверхности Земли ускорение, называемое ускорением свободного падения. **P** хотя и обусловлена притяжением тел к Земле но **результат двух сил и не равна силе гравитационного притяжения тела F_g из-за действия $F_{цб}$** .

Различие силы тяжести и веса



На любое тело, находящееся на поверхности Земли (кроме полюса) действует центробежная сила инерции $F_{цб}$, что и приводит к некоторому

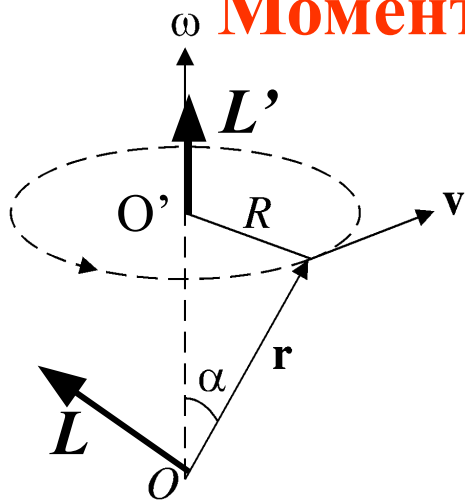
различию силы тяжести P и силы гравитационного притяжения F_g как по величине, так и по направлению. Те во вращающейся системе отсчета складываем два вектора

$$P = mg = F_g + F_{цб} \quad |F_{цб}| = m\omega_3^2 R_3 \cos \phi$$

Результирующая сила направлена не к центру Земли.

Максимальное различие получается **на экваторе** и составляет 0,3% от силы P . На экваторе на тело массой 1 кг действует $F_{цб} = 0.0337 \text{ Н} = 1/291 mgh$. Т.е. в ряде случаев ей можно пренебречь. Угол между направлениями векторов P и F_g также очень мал и его max значение равно 0,0018 рад (на широте 45 градусов).

Момент инерции МТ относительно оси вращения



Величина угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Изменение угловой скорости со временем определяется вектором углового ускорения

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dot{\omega}$$

При вращении по окружности **момент импульса МТ L относительно точки O** : $L = [r, mv]$ и направления векторов L и ω не совпадают если точка O не в центре окружности. Если движение идет по окружности и точка O' в центре окружности то по направления векторов L' и ω совпадают.

$$L' = Rmv \sin 90^\circ = Rmv = Rm \cdot \omega R = mR^2 \omega = I\omega$$

Скалярная величина $I = mR^2$ называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения.

Уравнение моментов для материальной точки

Как уже говорилось момент импульса **МТ**, двигающейся по окружности:

$$L = mR^2\omega = I\omega$$

Производная по времени равна:

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\beta$$

В соответствии с законом изменения момента импульса для **МТ** получаем:

$$I\beta = \sum_i N_{\text{ивнеш}}$$

Абсолютно твердое тело

Под твердым телом будем подразумевать **абсолютно твердое тело**, в котором расстояния между любыми двумя точками неизменны. Твердое тело можно представить как совокупность большого количества очень малых масс Δm_i , которые можно считать **МТ**. Теорема о движении центра масс твердого тела: **центр масс твердого тела** движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, и к которой приложены все внешние силы, действующие на тело. **Т.е. раньше мы говорили о МТ и о систем МТ и ее центре масс теперь еще и об абсолютно твердом теле.**

Момент инерции твердого тела

Твердое тело можно представить как систему **МТ**, удерживаемых внутренними силами на неизменных расстояниях друг от друга и по аналогии с **МТ** записать:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{N}_{\text{внеш}}$$

Пусть момент импульса i -й частицы, r_i — радиус окружности, по которой движется **МТ** Δm_i относительно оси вращения тела. Направление $\mathbf{L}_i$ относительно оси вращения всех точек тела одинаковое, так как в каждый момент времени направление и величина угловых скоростей всех точек одинаковы (тело твердое).

$$\mathbf{L} = \sum \mathbf{L}_i = \omega \sum \Delta m_i r_i^2 = I\omega$$

Величина $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ называется **моментом инерции твердого тела** относительно данной оси. Направление векторов $\mathbf{L}$ и ω совпадают только в случае симметричного тела.

Уравнением моментов

Заменяя в выражении для кинетической энергии $T = \frac{mv^2}{2}$ массу на момент инерции I , а скорость v на угловую скорость ω получим кинетическую энергию вращающегося вокруг **неподвижной** оси тела или просто подставив $v = \omega R$:

$$T = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Подставим момент импульса тела $L = I\omega$

$$\frac{dL}{dt} = I\beta = \sum N_{\text{внеш}}$$

Это **закон изменения момента импульса твердого тела или основной закон динамики для вращения твердого тела вокруг неподвижной оси**. Как и в случае с **МТ** можно сопоставить все величины для поступательного и вращательного движения.

Скамья Жуковского $T = \text{const}$

Фигуристка на льду и Торнадо: Что общего?

Сохранение кинетической энергии?
Приблизительно !

Торнадо — увеличивается масса того, что поднято с Земли - увеличивается момент инерции и увеличивается кинетическая энергия. Как зависит I от радиуса торандо ?

Узнаем чуть позже $\sim R^2$

Куда расходуется кинетическая энергия? Вспомним
машины, цунами, лавины.....

Условия равновесия твердого тела

В общем случае для равновесия абсолютно твердого тела необходимо выполнение двух условий.

1. Сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{внеш}} = 0$$

2. Сумма моментов внешних сил относительно любой точки должна быть равна нулю:

$$\sum_i \mathbf{N}_{\text{внеш}} = 0$$

Момент инерции в природе



Самолеты убирают шасси во время полета, а, например, пчелы, напротив, вытягивают вперед задние лапки для того, чтобы лететь устойчиво с большей скоростью.

При максимальной скорости в 7.25 метров в секунду пчелы теряют вращательную устойчивость. Это говорит о том, что скорость пчелы ограничивает не сила мускулов или амплитуда машущих крыльев, а наклон тела и умение балансировать в неустойчивом положении. Т.е. определенной скорости пчелы умеют управлять своим моментом инерции и изменять моментом импульса так чтобы обеспечить условия равновесия (нулевую сумму моментов внешних сил).

Механика поступательного и вращательно движения относительно неподвижной оси

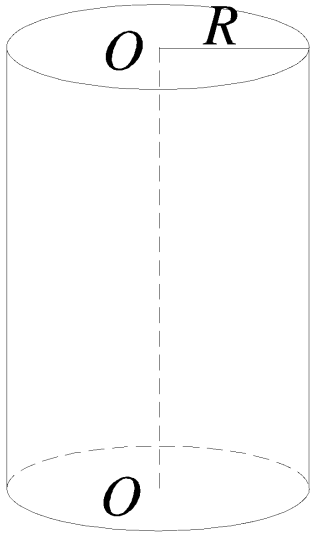
Все выражения для **МТ** и для твердого тела внешне очень похожи. 2-го закон Ньютона:

$$\frac{dp}{dt} = m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}_i \qquad \frac{dL}{dt} = I\boldsymbol{\beta} = \sum_i \mathbf{N}_{\text{ивнеш}}$$

Аналогами также являются:

координата	x	- угол ϕ ,
линейной скорости	v	- угловая скорость ω ,
линейного ускорения	a	- угловое ускорение β ,
массы	m	- момент инерции I ,
силы	F	- момент силы N ,
импульса	p	- момент импульса L ,
кинетическая энергия	$mv^2/2$	- кинетическая энергия $I\omega^2/2$,
работа	$dA = F_s ds$	- работа $dA = N_\omega d\phi$
мощность	$P = F_v v$	- $P = N_\omega \omega$

Момент инерции полого цилиндра



Найдем момент инерции **полого** цилиндра относительно его оси симметрии OO' .

$$I = \sum \Delta m_i r_i^2 = R^2 \sum \Delta m_i = R^2 m = m R^2$$

где m — масса цилиндра.

Итак, момент инерции **полого** цилиндра прямо не зависит от высоты этого цилиндра (косвенно естественно зависит так как чем больше высота тем больше площадь и масса). Точно также выглядит и выражение для момента инерции **обруча**.

Момент инерции сложных тел

Для полного определения момента инерции более сложных тел выражение $I = \sum \Delta m_i r_i^2$ следует уточнить, устремив элемент Δm_i к нулю и найдя соответствующий предел:

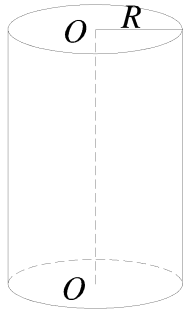
$$I = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i$$

Как известно, такой предел называется интегралом:

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV$$

Интегрирование производится по всему объему тела V . Если плотность тела ρ постоянна, то ρ можно вынести из под знака интегрирования. **Но даже для яйца (желток, белок и скорлупа имеют разную плотность)! Земля?**

Момент инерции сплошного цилиндра и однородного шара



Момент инерции **сплошного однородного цилиндра** относительно оси симметрии ОО' можно найти разбив его на цилиндры радиуса r и толщиной dr . Так как объем одного слоя равен $dV=2\pi r h dr$ то

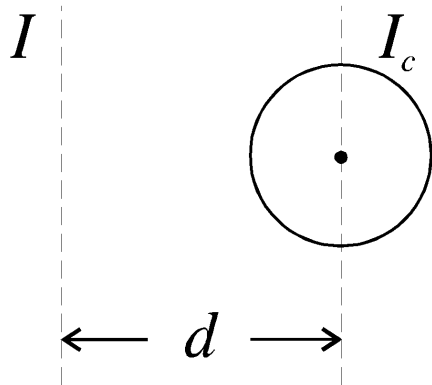
$$I = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV = \int r^2 \rho 2\pi r h dr = 2\pi \rho h \int r^3 dr = \\ 2\pi \rho h \frac{R^4}{4} = \rho (\pi R^2 h) \frac{R^2}{4} = \rho V \frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

ρ - плотность, dr и h –толщина и высота цилиндра . А у полого цилиндра было mR^2 . **Чем удаленнее масса от центра тем больше I.** При равных m и R у полого момент инерции I в 2 раза больше **Опыт с двумя скатывающимися цилиндрами.**

Момент инерции **однородного шара** относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Теорема Штейнера



Зная момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, момент инерции относительно произвольной оси вычисляют по **теореме Штейнера**:

момент инерции относительно произвольной оси I равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями d .

$$I = I_c + md^2$$

Вспомним опыт с гантелями на скамье Жуковского

Демонстрации на момент инерции

1. **Гироскопы не путать с гороскопами**
2. **Волчки**
3. **Прошу принести на следующую лекцию два куриных яйца. Одно сырое другое сваренное вкрутую. Лучше кто живет в общежитии .**