

Тема 1. Нарощення та дисконтування грошових сум

Методика складних відсотків

- * Формула нарощування за методикою складних відсотків має вигляд

$$FV = PV \times (1 + r)^n$$

(9)

- * Величину $(1 + r)^n$ називають множителем нарощування складних відсотків.

- * Операцію багаторазового дисконтування за методикою складних відсотків виконують так

$$PV = FV / (1 + r)^n \quad (9)$$

- * **Наприклад,** якщо певна сума через три роки оцінюється як 3 993 грн при річній ставці дохідності 10%, то теперішня (дисконтована) вартість цих грошей становить

$$PV = 3\,993 / (1 + 0.1)^3 = 3\,993 / 1.331 = 3000.0 \text{ грн.}$$

Приклад 1. Нехай річна ставка дохідності дорівнює $r = 8 \%$. Через скільки років початкова сума збільшиться в два рази. Згідно з формулою (9) маємо

$$FV / PV = (1 + r)^n = 2. \quad (11)$$

Звідси маємо

$$n = \ln 2 / \ln(1 + 0.08) = 0.693 / 0.077 = 9.00 \text{ років.}$$

Приклад 2. Розглянемо інший приклад. Кількість періодів нарощування $n = 6$. За якої ставки дохідності початкова сума збільшиться вдвічі. Згідно з «правилом 72-х» маємо

$$r = 72 / 6 = 12.$$

Отже необхідна ставка дохідності становить $r = 12 \%$.

У практиці фінансових розрахунків трапляється ситуація, коли в ролі періоду виступає не рік а місяць, або інший період часу. Наприклад, за річної ставки складних відсотків r нарахування здійснюються щомісяця або щокварталу. В цьому випадку формула обчислення майбутньої вартості набуває вигляду

$$FV = PV \times (1 + r / m)^{n \times m}. \quad (12)$$

Тут n – загальний термін угоди, m – кількість нараховувань відсотків протягом року.

Приклад 3. Вкладник поклав на депозит у банк 1000 грн під 16 % річних. Згідно з угодою складні відсотки повинні нараховуватися щокварталу. Знайдемо суму, яка акумулюється на рахунку через 1 рік.

$$FV = 1000 \times (1 + 0.16 / 4)^4 = 1000 \times 1.04^4 = 1000 \times 1.1699 = 1169.9 \text{ грн.}$$

Отже, при щоквартальному нарахуванні відсотків фактична річна дохідність становить майже 17 %. Якби нарахування здійснювалися один раз, дохідність становила б лише 16 %.

Якби нарахування здійснювалися щомісяця ($m = 12$), ми отримаємо дохідність 17.2 %.

Номінальна та ефективна ставка складних відсотків

Між ефективною та номінальною ставкою існує наступне співвідношення

$$(1 + r_e)^n = (1 + r / m)^{n \cdot m}$$

Звідси отримуємо, що ефективна ставка дохідності дорівнює

$$r_e = (1 + r / m)^m - 1. \quad (13)$$

Приклад. Один банк сплачує своїм клієнтам прибуток зі ставкою 11,5% при піврічному нарахуванні, а інший – 11,4% при щоквартальному нарахуванні. Який банк сплачує вкладникам більший прибуток?

1 банк. $r_e = (1 + r / m)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,115}{2}\right)^2 - 1 = 11,83\%$

2 банк. $r_e = (1 + r / m)^m - 1 = \left(1 + \frac{0,114}{4}\right)^4 - 1 = 11,9\%$

Отже, гроші варто вкладати в другий банк.

Визначення терміну кредиту та величини відсоткової ставки

Термін кредиту. При нарощенні за складною відсотковою ставкою з формули

$$FV = PV \times (1 + r)^n \text{ впливає, що } n = \frac{\ln(FV / PV)}{\ln(1 + r)}$$

При дисконтуванні за складною відсотковою ставкою на основі формули $PV = FV / (1 + r)^n$

$$\text{маємо } n = \frac{\ln(PV / FV)}{\ln(1 - r)}.$$

Приклад. Через скільки років капітал збільшиться в 3 рази, якщо річна ставка складає 12%? Проаналізувати випадок нарахування відсотків за простою та складною ставками.

$$\text{У випадку складних відсотків } 3P = P \times (1 + r)^n \Rightarrow 3 = 1,12^n$$

Отже, $n = \frac{\ln 3}{\ln 1,12} = 9,7$, тобто у цьому випадку для збільшення капіталу в 3 рази потрібно 9,7 років.

У випадку простих відсотків $3P = P \times (1 + rn) \Rightarrow 3 = 1 + rn \Rightarrow n = \frac{2}{r} = \frac{2}{0,12} = 16,7$, тобто в цьому випадку для збільшення капіталу в 3 рази потрібно 16,7 років.

Величина відсоткової ставки. При нарощенні за складною відсотковою ставкою з формули

$$FV = PV \times (1 + r)^n \text{ впливає, що } r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}} - 1.$$

При дисконтуванні за складною відсотковою ставкою з формули

$$PV = FV / (1 + r)^n \text{ впливає, що } r = \sqrt[n]{\frac{PV}{FV}} - 1.$$

Безперервне нарощування та дисконтування.

Розглянемо щоденний компаунд. Для цього фінансові установи, як правило, проводять розрахунки на базі 360 днів, але для більш точних розрахунків можна використовувати 365-денний рік.

З формули $FV = PV \times (1 + r)^n$ маємо $FV = PV \times \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t}$ (14)

Приклад. 5000 грн вкладено з 9% щоденним компаундом. Який прибуток буде одержано через 4 роки?

За формулою (11) маємо

$$FV = PV \times \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365t} = 5000 \left(1 + \frac{0,09}{365}\right)^{365 \cdot 4} = 7166,33.$$

Тоді прибуток становить $7166,33 - 5000 = 2166,33$ грн.

Майбутня вартість при неперервному компаунді визначається за формулою $FV = PV \times e^{rt}$.

Поточна вартість при неперервному компаунді визначається за формулою $PV = FV \times e^{-rt}$.

Ефективна ставка при неперервному компаунді :

$$e^{r-1} = 1 + s$$

де r та s - річні ставки відповідно неперервного та щорічного компаунда. Отже, $s = e^r - 1$.

Приклад. За оцінкою фахівців устаткування лікарні через 5 років потребуватиме ремонту на суму 20000 грн. Адміністрація вирішує покласти гроші в банк за умови 7% річного неперервного компаунда, щоб через 5 років отримати потрібну суму. Яку суму грошей треба виділити з бюджету лікарні тепер?

$FV=20000$ грн. $r=0,07$ $t=5$ років

$$PV = FV \times e^{-rt} = 20000 \cdot e^{-0,07 \cdot 5} = 14093,76$$

Отже, лікарні необхідно виділити 14093,76 грн.

Врахування податків та інфляції

Позначимо: S – нарощена сума; S' – нарощена сума після виплати податку;
 g – ставка податку на прибуток; G – загальна сума податку.

Прості відсотки: $G = (S - P)g = Prtg$

$$S' = S - G = P(1 + rt) - Prtg = P[1 + (1 - g)rt]$$

Отже, відсоткова ставка фактично скоротилась, замість ставки r застосовується ставка $(1 - g)r$.

Складні відсотки. Існує 2 варіанти: податок нараховується за весь термін фінансової операції одразу або послідовно за кожний період.

Перший випадок: $G = (S - P)g = P[(1 + r)^t - 1]g$, відповідно наращена сума після виплати податку $S' = S - G = P(1 + r)^t - P[(1 + r)^t - 1]g$, звідки

$$S' = P(1 + r)^t (1 - g) + Pg.$$

Другий випадок: податок нараховується послідовно за кожен період, наприклад, за рік.

Очевидно, що ця величина буде змінною – сума податку зростає зі збільшенням наращеної суми. Опустимо подальше виведення – приходимо до висновку, що незалежно від методу нарахування податку наращена сума обчислюється за формулою $S' = P(1 + r)^t (1 - g) + Pg$.

Отже, метод нарахування не впливає на суму податку, проте для того, хто платить податки, має значення, коли він виплачується.

Приклад. Нехай податок з прибутку становить 25%,
відсоткова ставка становить 20%,
термін нарахування відсотків – 3 роки,
а величина кредиту – 100000 грн.

Визначити розміри податку на прибуток при нарахуванні простих і складних відсотків та на-
рощену суму після виплати податку.

$P=100000$ грн; $r=0,2$; $t=3$ роки.

Прості відсотки: $S = P(1 + rt) = 100000 \cdot (1 + 0,2 \cdot 3) = 160000$ грн

$S' = 100000 \cdot [1 + 3(1 - 0,25) \cdot 0,2] = 145000$ грн

$G = S - S' = 160000 - 145000 = 15000$ грн

Складні відсотки: $S = P(1 + r)^t = 100000 \cdot (1 + 0,2)^3 = 172800$ грн.

$S' = 100000 \cdot [(1 - 0,25) \cdot (1 + 0,2)^3 + 0,25] = 154600$ грн

$G = S - S' = 172800 - 154600 = 18200$ грн

Розміри інфляції можна оцінювати за допомогою різних, тісно пов'язаних між собою показників (індекс споживчих цін, індекс купівельної спроможності грошей, темп інфляції, рівень інфляції, індекс інфляції). Використаємо позначення:

S – Нарощена сума грошей, виміряна за номіналом

S'' – нарощена сума з урахуванням її знецінення

I_p – індекс цін

I – індекс купівельної спроможності цін

h – Темп інфляції

r_h – відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

d_h – дисконтна ставка, яка враховує інфляцію (дисконтна брутто-ставка)

Індекс інфляції – показник, який виражає відносну зміну середнього рівня цін у часі. Якщо величина індексу більше за 1 (або 100%), кажуть, що має місце підвищення цін, а в протилежному випадку (менше 1 або 100%) – їх зниження.

Індекс купівельної спроможності є величиною, оберненою до індексу цін $I = \frac{1}{I_p}$.

Нарощена сума з урахуванням її знецінення: $S'' = S \cdot I$

Темп інфляції – відносний приріст цін за рік або інший період часу, вимірюється, як правило,

у %.

$$h = \frac{S'' - S}{S} \cdot 100 = \left(\frac{S''}{S} - 1 \right) \cdot 100 = (I - 1) \cdot 100$$

Якщо h вимірюється у відсотках: $I = \left(1 + \frac{h}{100} \right)$ або $I = 1 + h$, якщо – у коефіцієнтах.

Наприклад, ціни за рік виросли в 1,2 рази.

Індекс купівельної спроможності грошей $I = 1,2$,

річний темп інфляції $h = 20\%$,

а індекс цін $I_p = \frac{1}{1,2}$

Короткотермінові фінансові операції

Відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

$$r_h = r + h + rth$$

Реальний показник доходності у вигляді відсоткової ставки: $r = \frac{1+r_h}{1+h} - 1$.

Дисконтна ставка, яка враховує інфляцію (дисконтна брутто-ставка) $d_h = \frac{h+d}{1+th}$

Довготермінові фінансові операції

Відсоткова ставка, яка враховує інфляцію (брутто-ставка)

$$r_h = m \left[\left(1 + \frac{r}{m} \right) (1+h)^{\frac{1}{m}} - 1 \right]$$

Реальний показник доходності у вигляді відсоткової ставки: $r = \frac{1+r_h}{1+h} - 1$.

Складна дисконтна брутто-ставка $d_h = \frac{d+h}{1+h}$.

Фінансова еквівалентність

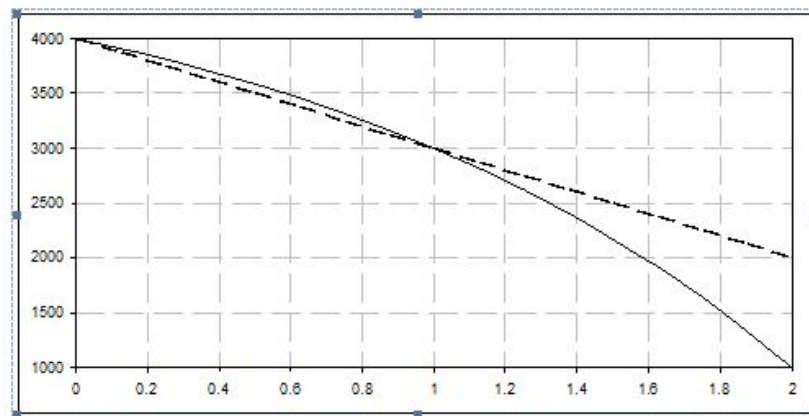
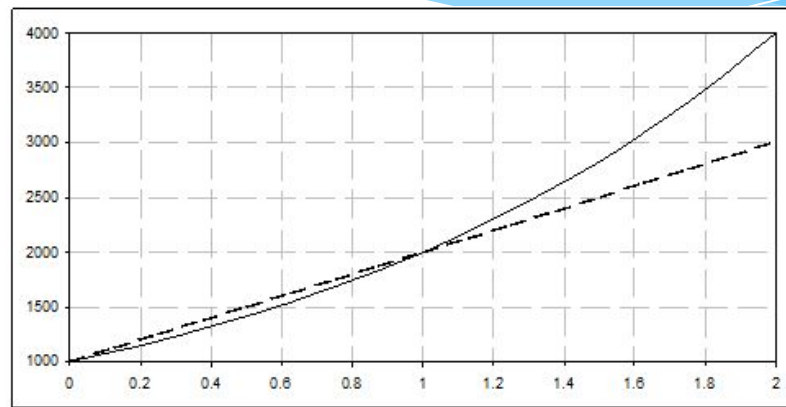
Приклад 1. Треба порівняти, що більше за ставкою складних відсотків $r = 7\%$ - 1 000 грн. сьогодні, чи 2 000 грн. через 8 років.

Для коректного порівняння грошових сум, які належать до різних моментів часу, необхідно звести ці вартісні величини до одного моменту часу. Найбільш популярний метод – приведення до теперішнього моменту часу. Для цього виконуємо дисконтування суми 2 000 грн. Згідно з формулою 7 (тема 1) маємо $PV = FV / (1 + r)^n = 2000 / 1.07^8 = 1164$ грн. Отже, при ставці дохідності у 7 %, 2000 грн. через 8 років мають більшу вартість, ніж 1000 грн. сьогодні. Цей же висновок можна отримати іншим методом - використовуючи формулу нарахування складних відсотків $FV = PV \times (1 + r)^n = 1000 \times 1.07^8 = 1718$ грн.

Часто ставиться **інша задача**: знайти таку ставку дохідності r , при якій сума 1000 грн. зараз стане еквівалентною сумі 2000 грн. через 8 років. Для розв'язування цієї задачі використовується співвідношення $2000 = 1000 \times (1 + r)^8$. Звідси знаходимо ставку r

$$r = \left(\frac{2000}{1000} \right)^{1/8} - 1 = 0.0905.$$

Нарощування грошової суми за методикою простих і складних відсотків



Визначення еквівалентної ставки дохідності при утриманні комісійних

Рівняння еквівалентності матиме вигляд

$$(C - A) \times (1 + y)^n = C \times (1 + r)^n. \quad (15)$$

З (15) отримуємо

$$\frac{1 + y}{1 + r} = \left(\frac{C}{C - A} \right)^{1/n}. \quad (16)$$

Звідси маємо для реальної ставки дохідності у вираз

$$y = (1 + r) \times \left(\frac{C}{C - A} \right)^{1/n} - 1. \quad (17)$$

Приклад 2. Комерційний банк пропонує кредит на наступних умовах:

- обсяг кредиту 5 000 грн.;
- термін кредитування 5 років;
- кредитна ставка складних відсотків 14 % річних;
- кредит погашається одним платежем у кінці терміну;
- у момент видачі кредиту банк отримує комісію у розмірі 5 % від суми кредиту.

Обчислити повну дохідність цієї кредитної операції для банку.

Спочатку розрахуємо величину кредиту, яку повинен повернути позичальник через 5 років, виходячи з того, що основна сума боргу становить 5 000 грн. і на цю суму банк нараховує складні відсотки. За формулою складних відсотків маємо

$$FV = PV \times (1 + r)^n = 5000 \times 1.14^5 = 9627.07 \text{ грн.}$$

Тепер розрахуємо суму, яку фактично отримує на руки позичальник $C - A = 5000 - 250 = 4750$ грн. Використовуючи формулу (17) визначаємо фактичну ставку дохідності у

$$y = (1 + 0.14) \times \left(\frac{5000}{5000 - 250} \right)^{1/5} - 1 = 0.1518.$$

Отже, повна ставка дохідності позики для банку становить 15.18 %.

Слід зауважити, що такий же результат можна одержати, якщо використати фінансову функцію СТАВКА(5; ; -4750; 9627.07). Тут знак «-» означає позичені гроші.

Застосування програмного забезпечення

При виконанні фінансових розрахунків зручно використовувати електронні таблиці MS Excel. При цьому слід знати позначення основних фінансових функцій.

- *БС (Ставка, Кпер, Плт, Пс, Тип) – майбутня вартість FV ;
- *ПС (Ставка, Кпер, Плт, Бс, Тип) – теперішня вартість PV ;
- *СТАВКА (Кпер, Плт, Пс, Бс, Тип) – ставка дохідності r ;
- *КПЕР (Ставка, Плт, Пс, Бс, Тип) – кількість періодів n ;