

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Лекция 3

**Направление обучения –
«Строительство»**

Способы преобразования проекций

Способы преобразования проекций применяют для получения нового изображения объекта или группы объектов, которое позволяет упростить решение поставленной задачи.

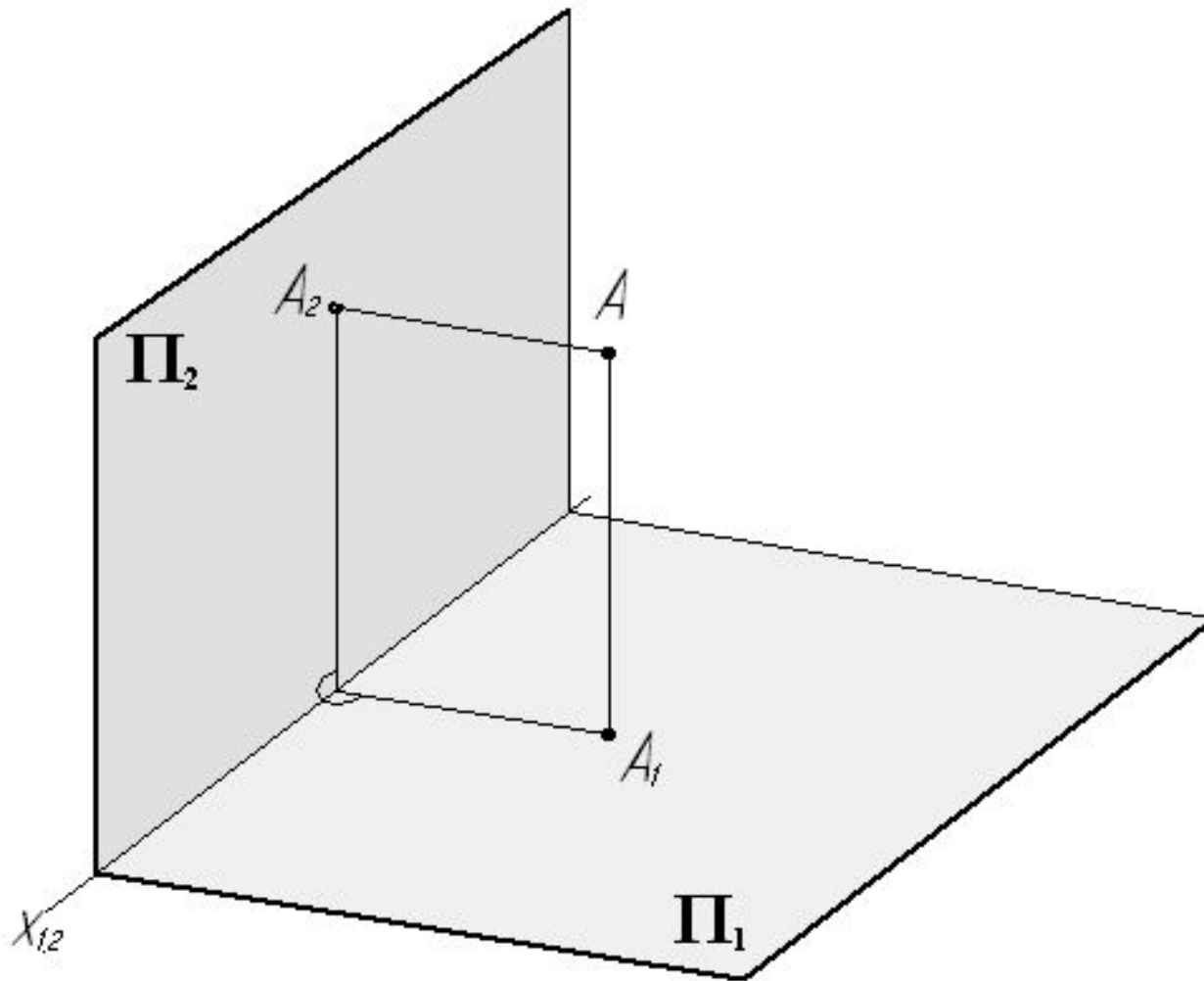
Как правило, это переход от общего положения к частному.



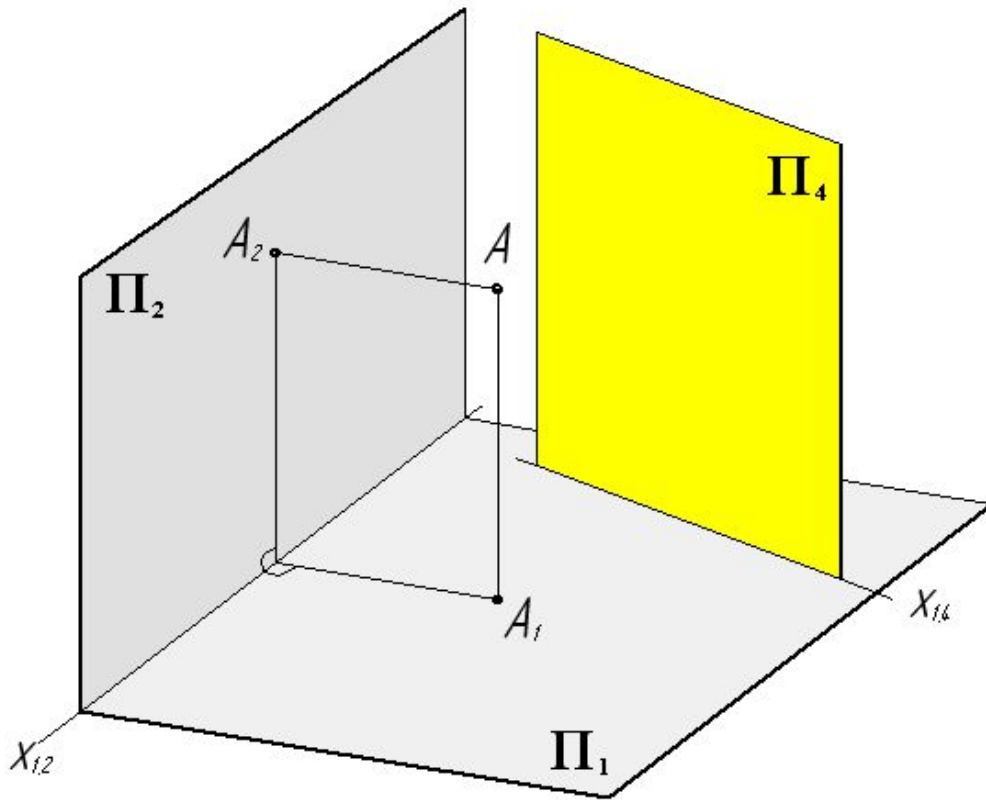
**Дополнительное прямоугольное
проецирование –
перемена плоскостей проекций**

- Подбираемая **дополнительная плоскость** проекций должна быть только **проецирующей**. Тем самым создаётся новая прямоугольная система плоскостей проекций.
- Подбираемые дополнительные плоскости проекций обозначаются Π_4 , Π_5 , Π_6 и т.д.

В ортогональной системе двух плоскостей проекций Π_1/Π_2 взята произвольная точка A и построены ее проекции.



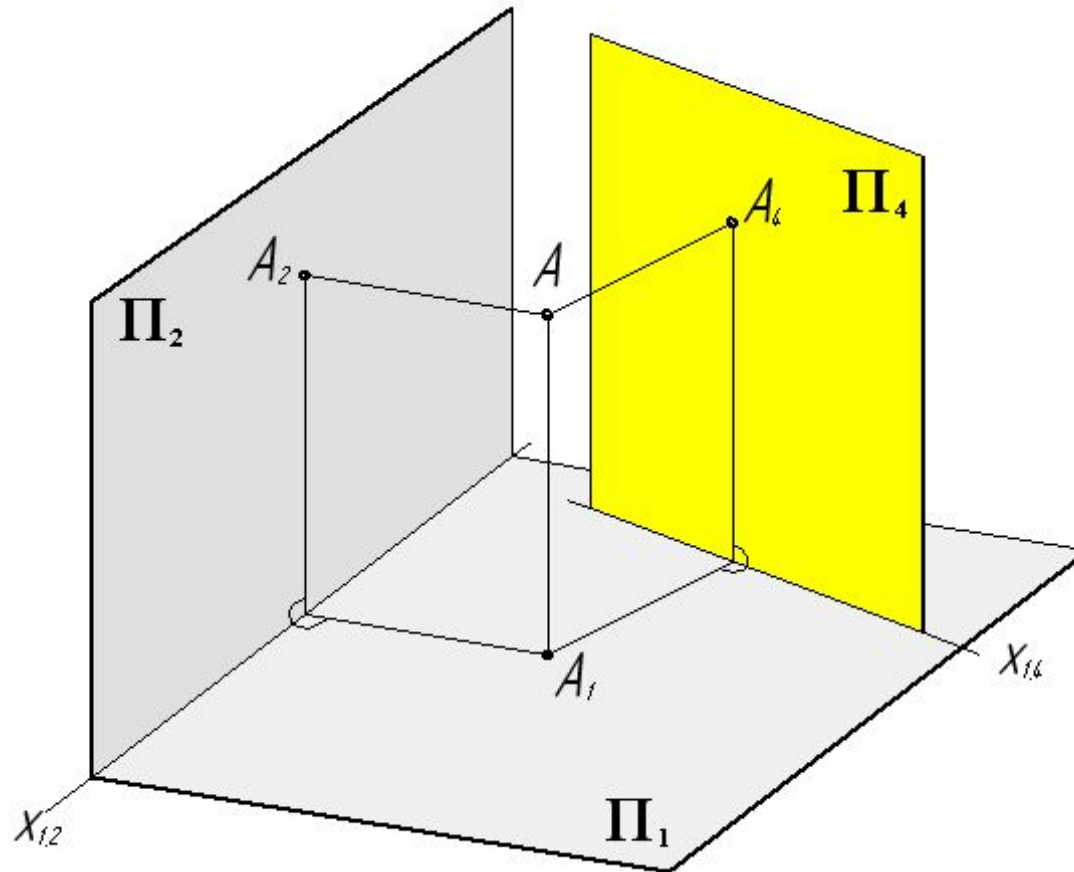
Введена дополнительная горизонтально-проецирующая плоскость проекций Π_4 . Например,. Таким образом создана новая система ортогональных плоскостей проекций Π_1/Π_4 с осью $x_{1,4}$



$$\begin{aligned} \Pi_4 &\perp \Pi_1 \\ \Pi_1 \cap \Pi_4 &= x_{1,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} \Pi_1/\Pi_2 &\longrightarrow x_{1,4} \Pi_1/\Pi_4 \\ \Pi_1 &- \text{const} \end{aligned}$$

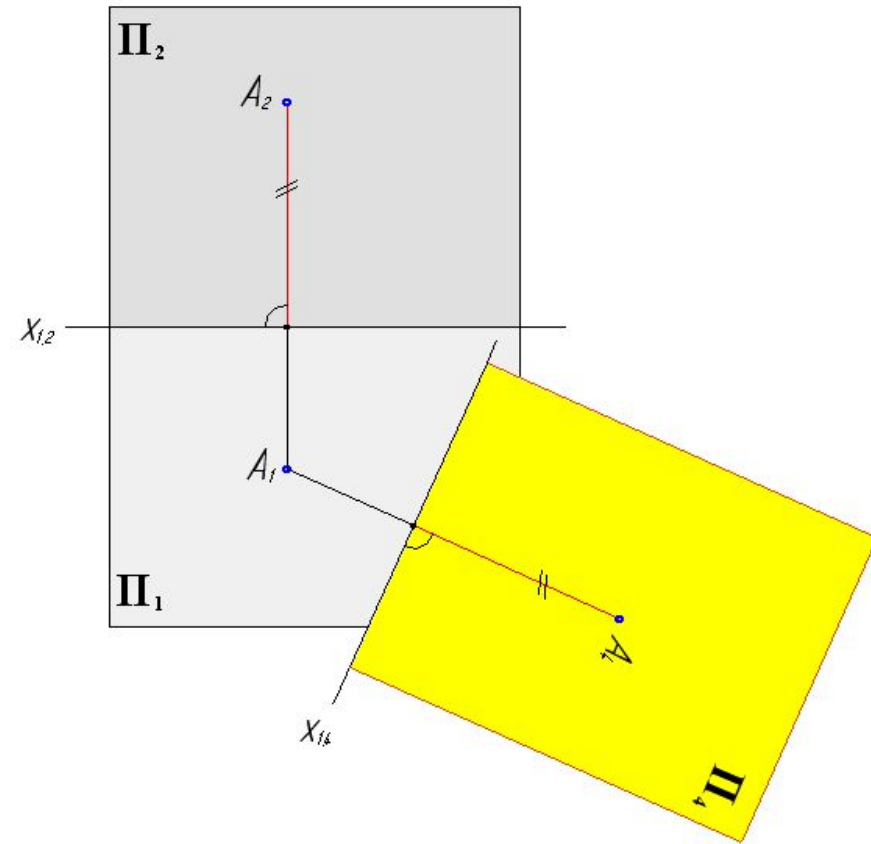
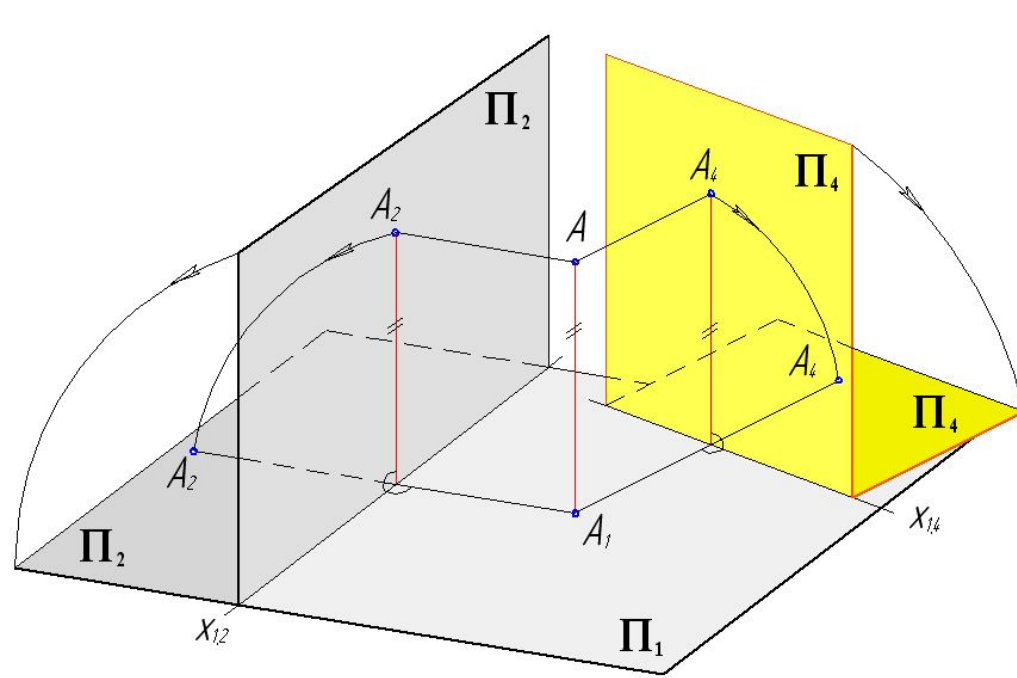
Точка A ортогонально проецируется на плоскость Π_4



Так как точка A не изменяет своего положения относительно плоскостей Π_1 и Π_2 , то расстояние от точки A до плоскости Π_1 остается неизменным, как в системе Π_1/Π_2 , так и в системе Π_1/Π_4 .

$$(A, \Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A, A_1) = (A_2, x_{1,2}) = (A_4, x_{1,4}).$$

Принцип построения эпюра при использовании способа перемены плоскостей проекций



$$\begin{aligned} \Pi_4 &\perp \Pi_1 \\ \Pi_1 \cap \Pi_4 &= x_{1,4} \end{aligned}$$

$$x_{1,2} \Pi_1 / \Pi_2 \longrightarrow x_{1,4} \Pi_1 / \Pi_4$$

Π_1 - const

$$(A, \Pi_1) = \text{const} \Rightarrow (A, A_1) = (A_2, x_{1,2}) = (A_4, x_{1,4}).$$

Вращение

Каждая точка объекта вращается вокруг выбранной оси, перемещаясь по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения.

Осью вращения может быть только прямая частного положения – прямой уровня или проецирующей прямой.

Ось вращения – прямая уровня

Плоскость вращения точки - проецирующую плоскость.

На плоскости проекций, параллельно которой расположена ось вращения, траектория перемещения точки имеет форму прямой, а на другой – форму эллипса, что не дает возможности ее использования.

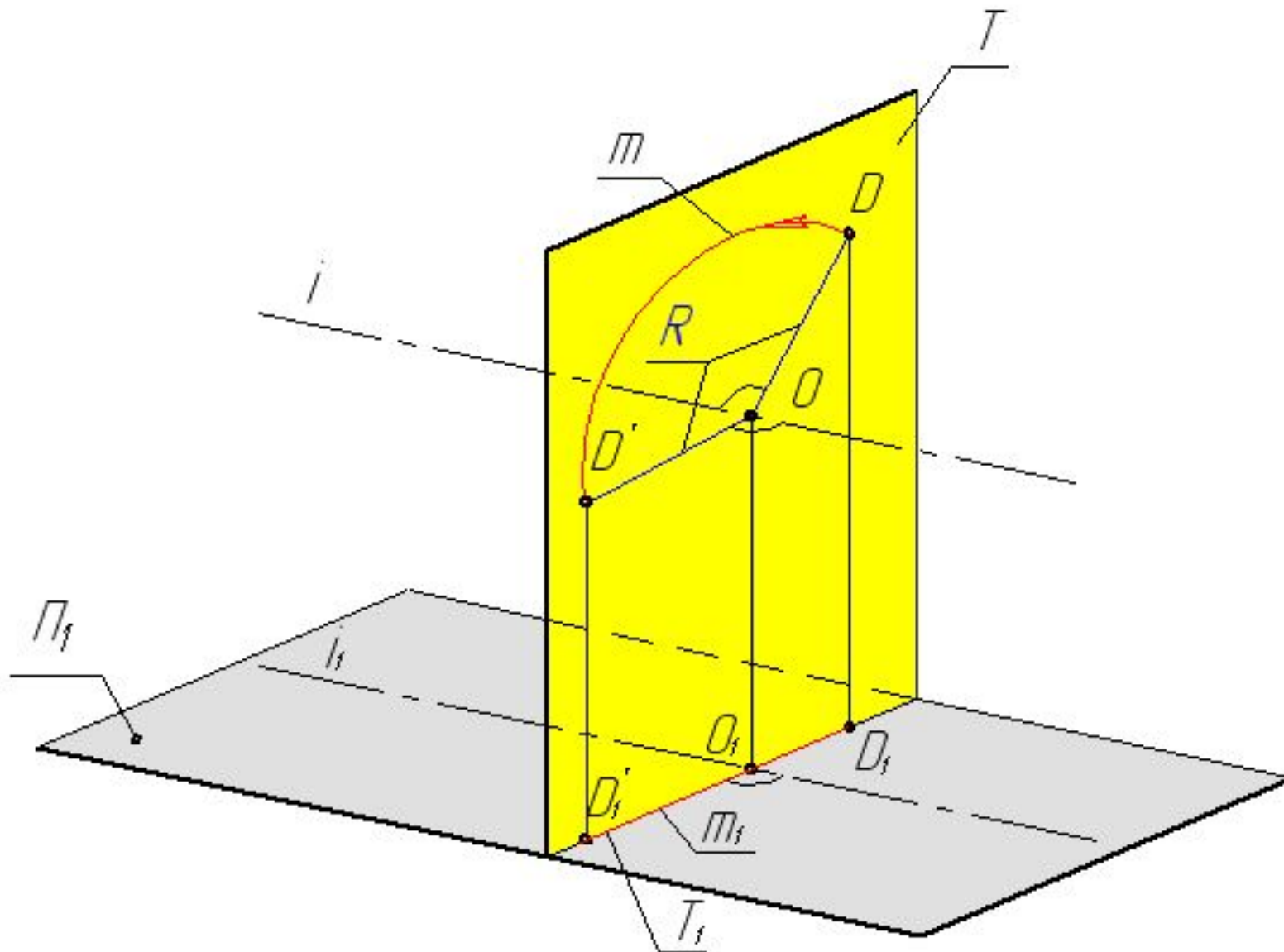
Все построения выполняются только на одной проекции.

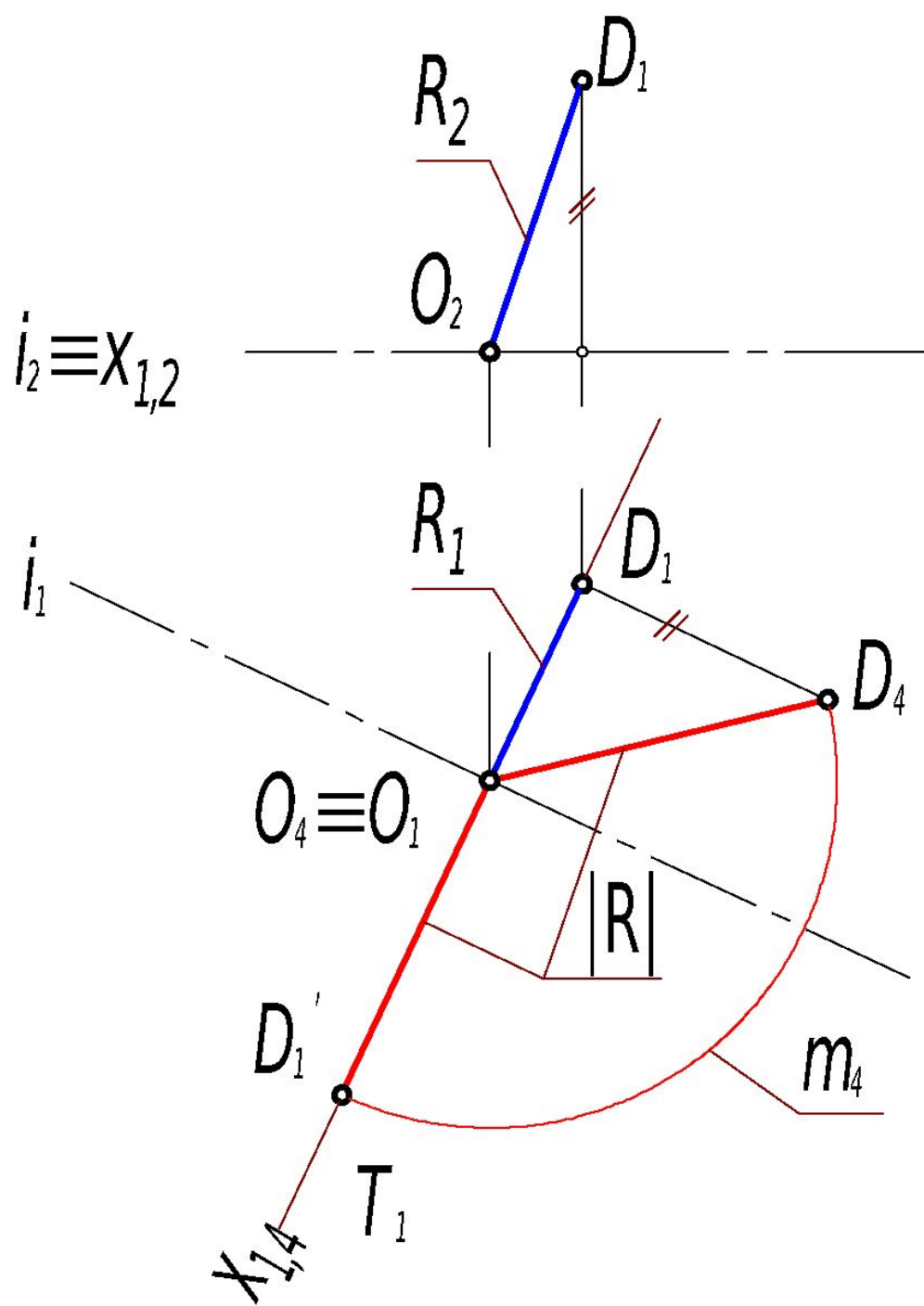
Вся задача сводится к определению истинной величины радиуса вращения точки.

Данный способ вращения имеет следующие ограничения:

- применим практически только к плоским фигурам;
- ось вращения должна лежать в плоскости поворачиваемой фигуры.

На рисунке ось вращения i является горизонталью





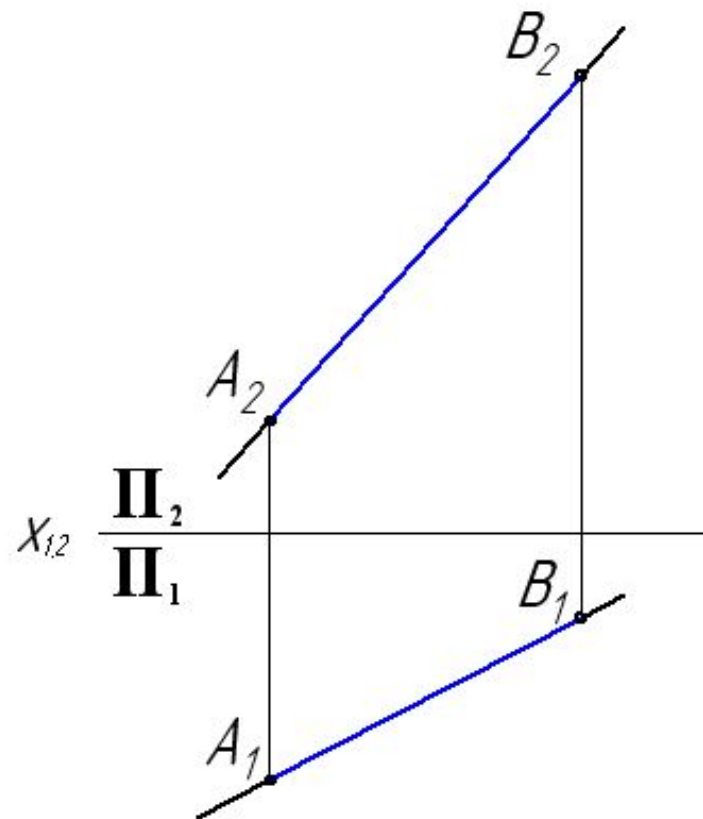
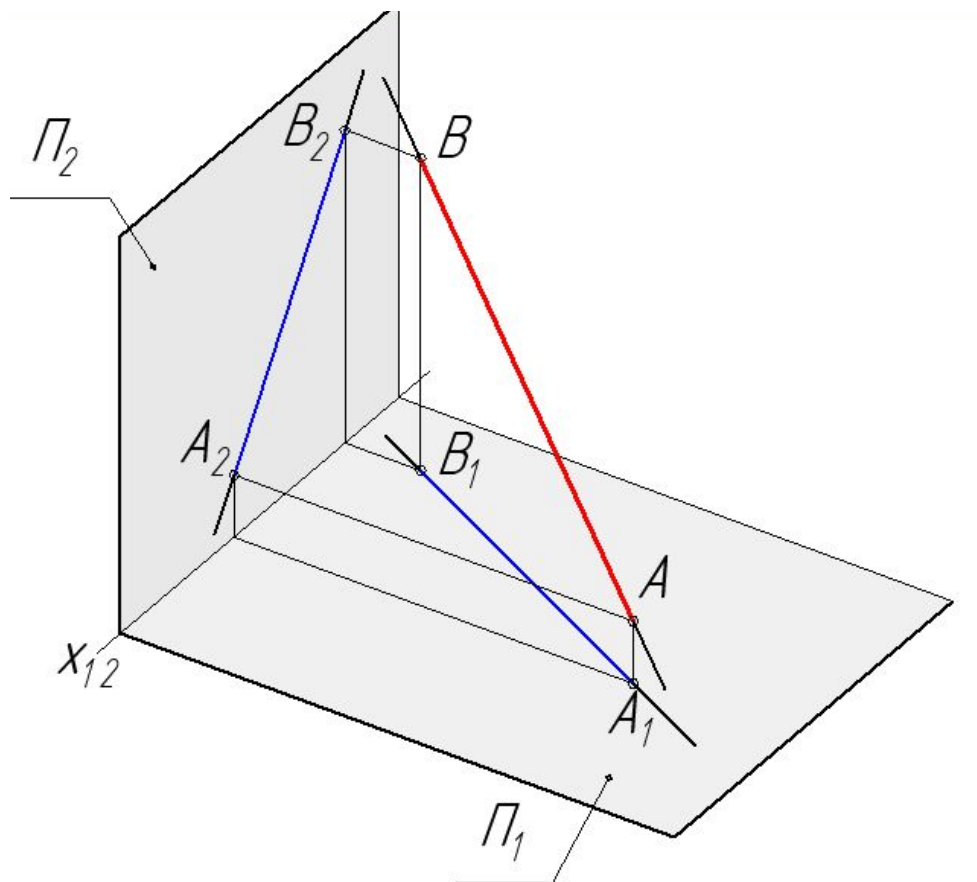
Базовые преобразования проекций

Рассматриваются два варианта преобразования.

- **Вариант 1.** *Переход от заданного положения объекта (прямой линии или плоской фигуры) в параллельное положение по отношению к выбранной плоскости проекций.*
- **Вариант 2.** *Переход от заданного положения объекта (прямой линии или торсовой поверхности) в проецирующее положение по отношению к выбранной плоскости проекций.*

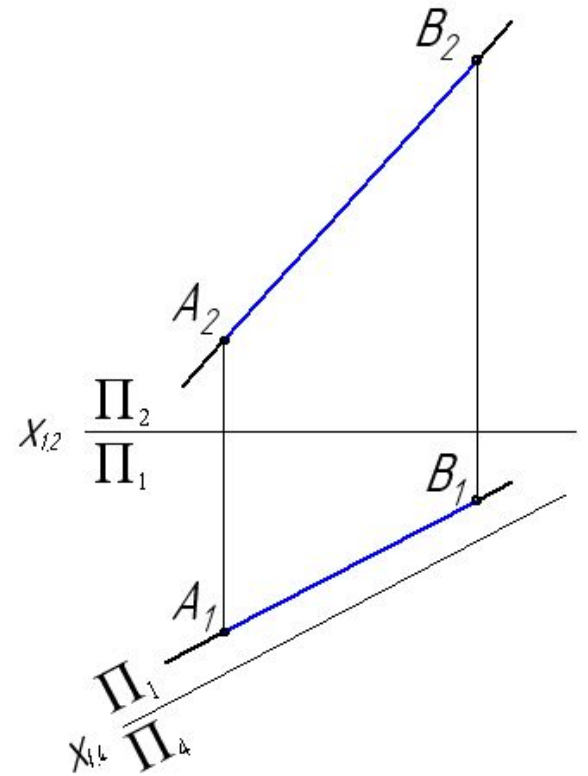
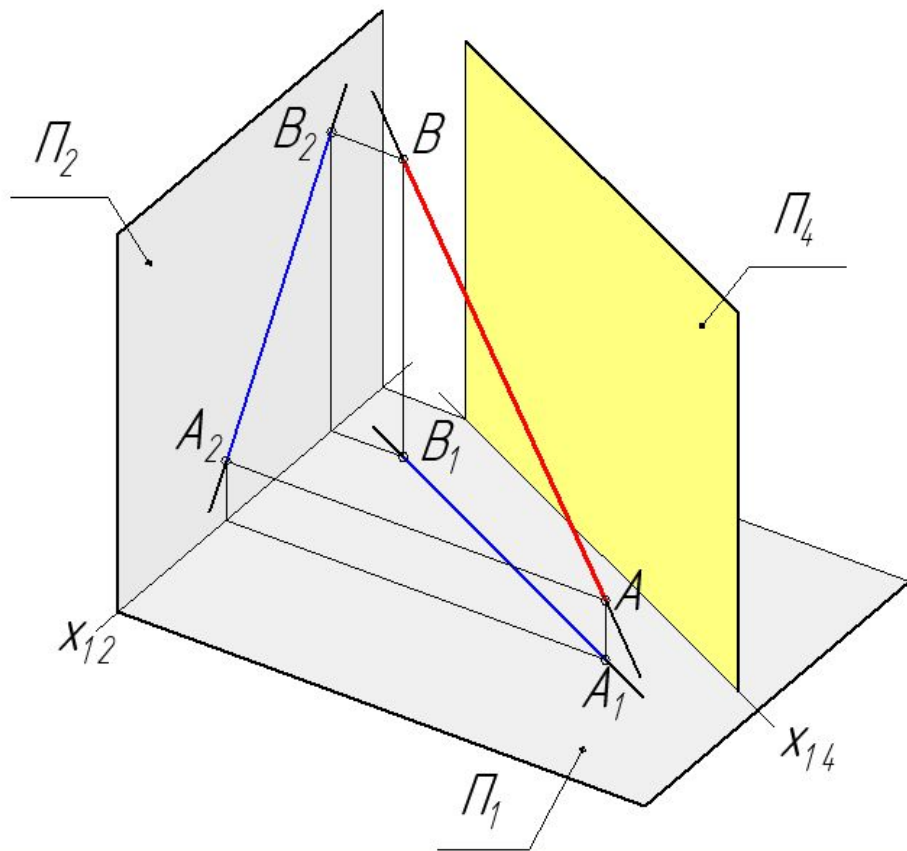
Базовое преобразование № 1.

**Преобразование прямой общего положения в прямую уровня
(построение дополнительной проекции прямой линии на параллельной ей плоскости проекций)**



$$(\Pi_2 \perp \Pi_1)$$

$l(AB)$ - прямая общего положения

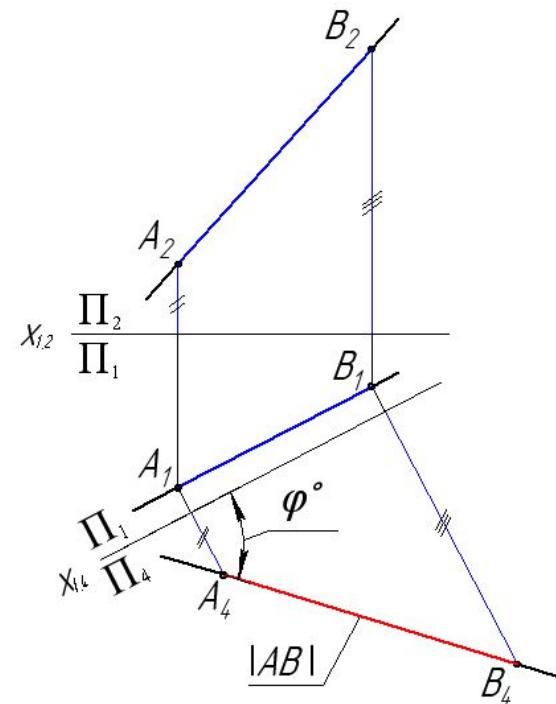
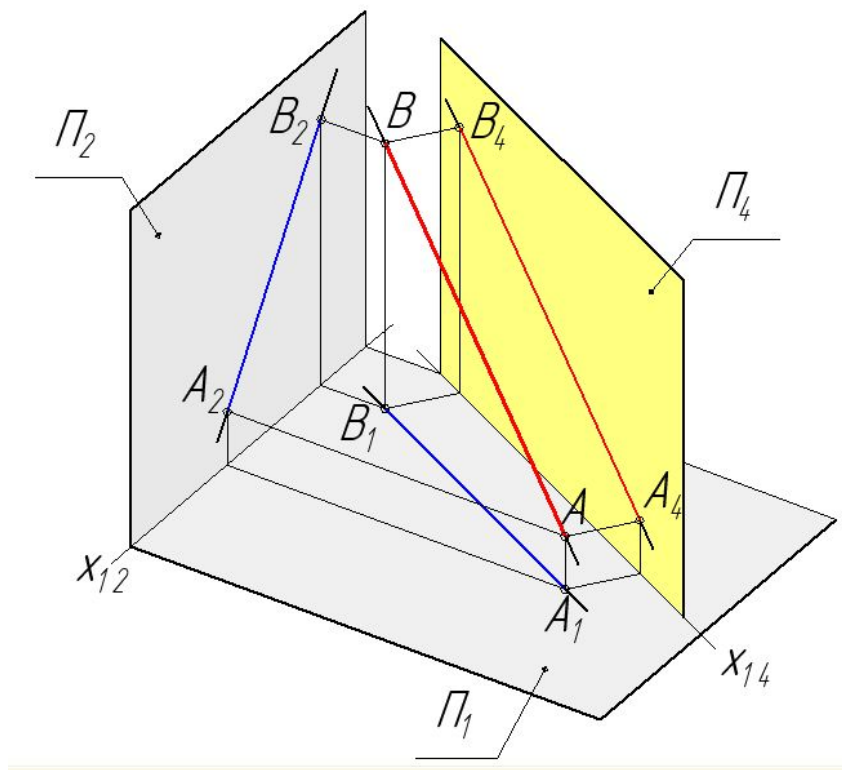


Подбирается дополнительная плоскость проекций Π_4

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge ((\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2))$$

На эюре $x_{14} \parallel l_1 \vee x_{24} \parallel l_2$

В качестве примера взята $\Pi_4 \perp \Pi_1$, следовательно, $x_{14} \parallel l_1$



Строится дополнительная проекция $l(AB)$ на поле плоскости Π_4 .

$$A_1 A_4 \perp x_{1,4} \text{ и } B_1 B_4 \perp x_{1,4},$$

$$(A_2 x_{1,2}) = (A_4 x_{1,4}) \text{ и } (B_2 x_{1,2}) = (B_4 x_{1,4})$$

Базовое преобразование №2.

**Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую
(построение дополнительной проекции прямой линии в виде точки)**

При прямоугольном проецировании прямая является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций. Следовательно, дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна заданной прямой

$$\Pi' \perp l,$$

Но, так как l – прямая общего положения, то Π' – также является плоскостью общего положения и $\Pi' \not\perp \Pi_1$ и $\Pi' \not\perp \Pi_2$,

Следовательно, чтобы получить проекцию прямой линии общего положения в виде точки способом перемены плоскостей проекций, нельзя сразу подобрать необходимую плоскость проекций.

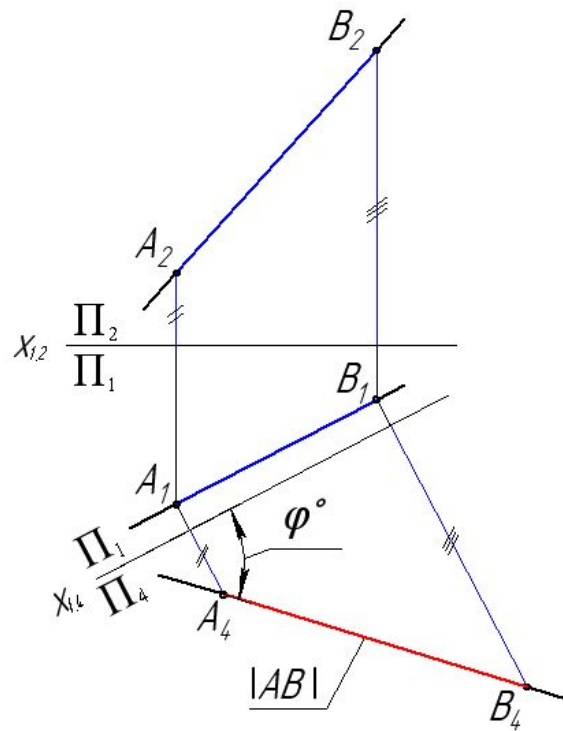
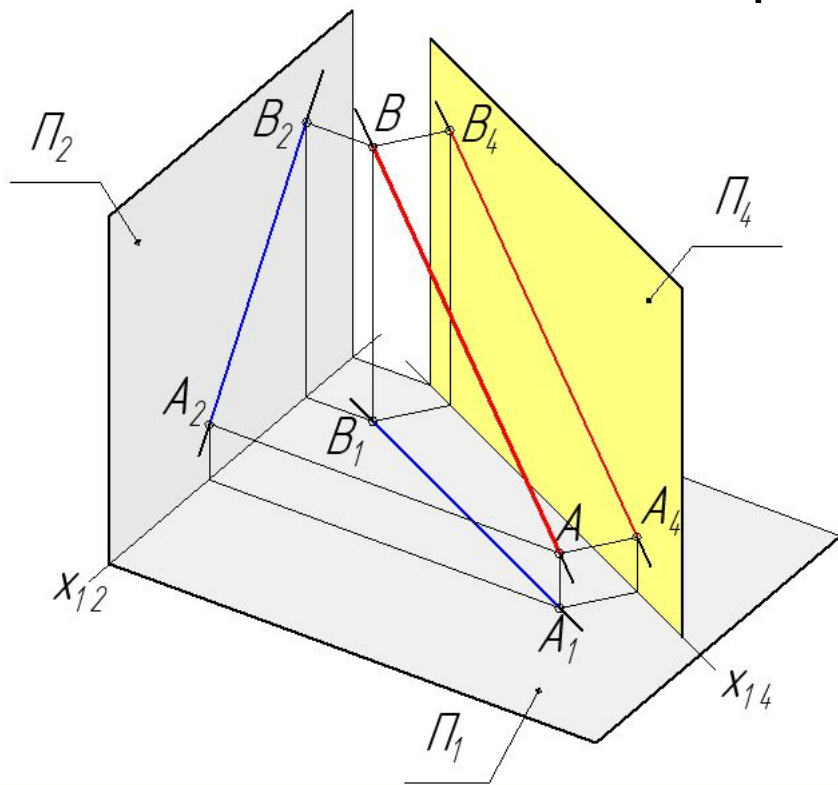
Данное преобразование выполняется в два этапа.

1-й этап

Прямая преобразуется в прямую уровня

$$(\Pi_4 \parallel l) \wedge (\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$$

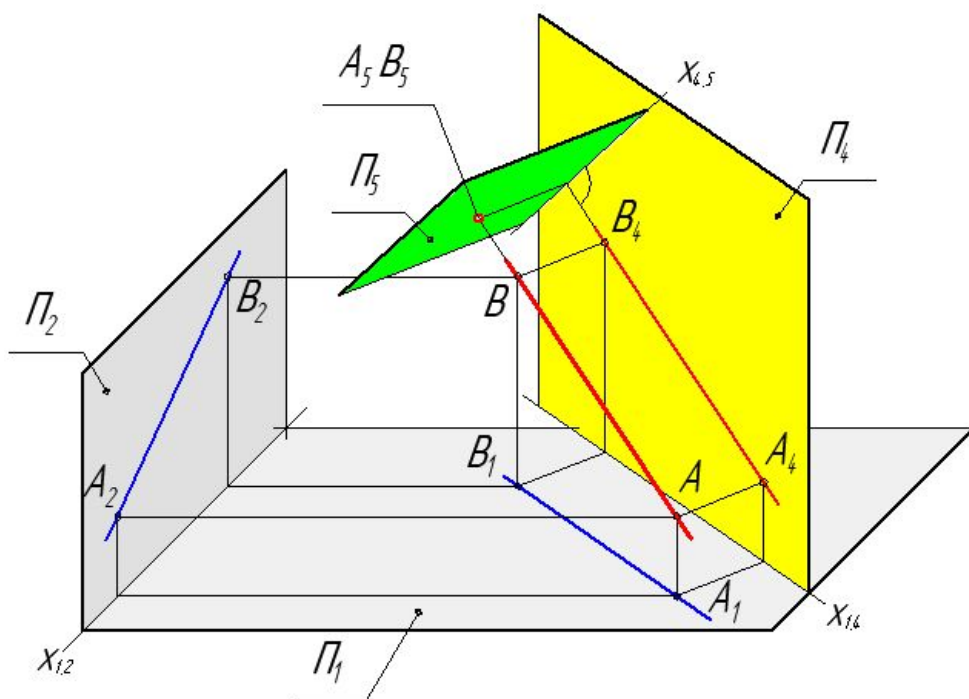
Это рассмотренная ранее базовая задача №1 на построение проекции прямой общего положения на плоскости проекций ей параллельной.



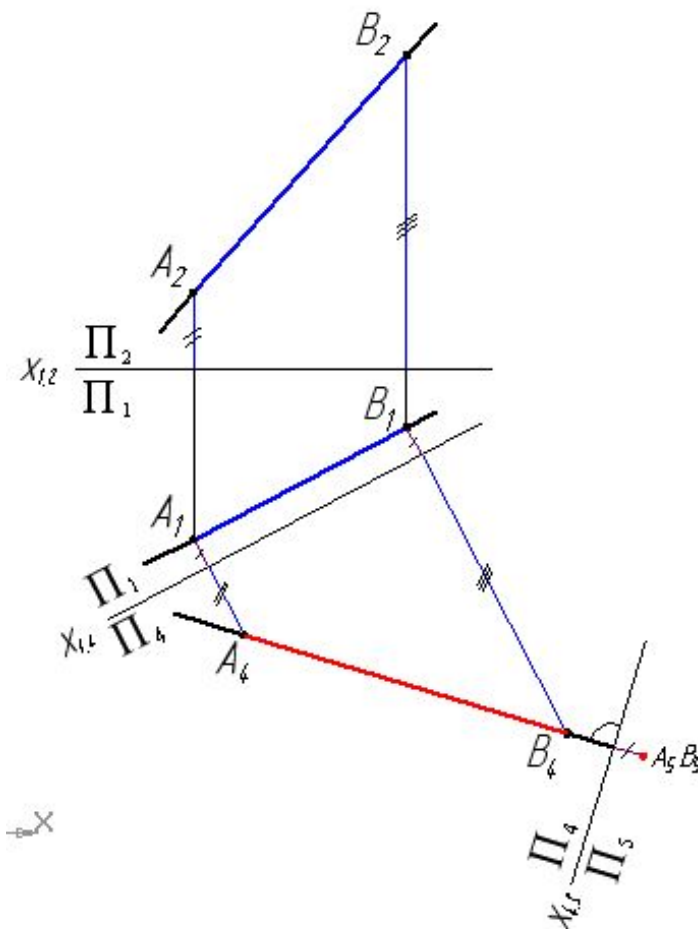
2-й этап

Из прямой уровня прямая преобразуется в проецирующую прямую

$$(\Pi_5 \perp l) \wedge (\Pi_5 \perp \Pi_4)$$

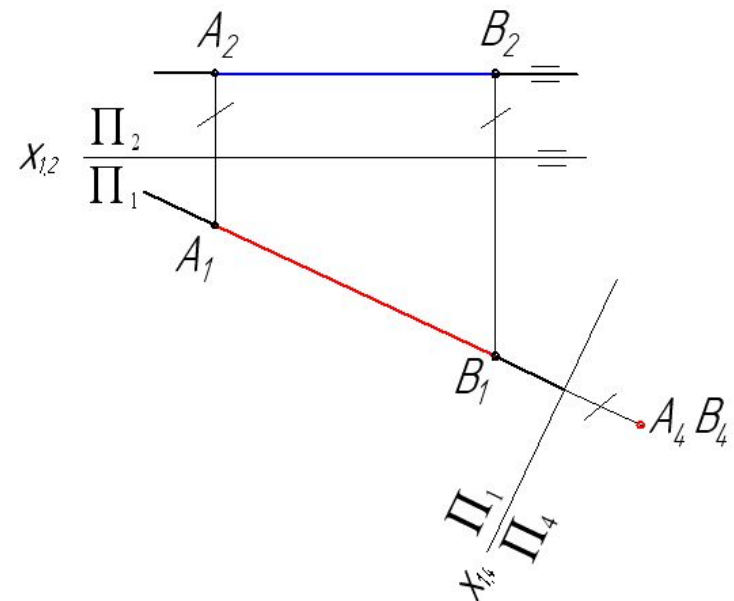
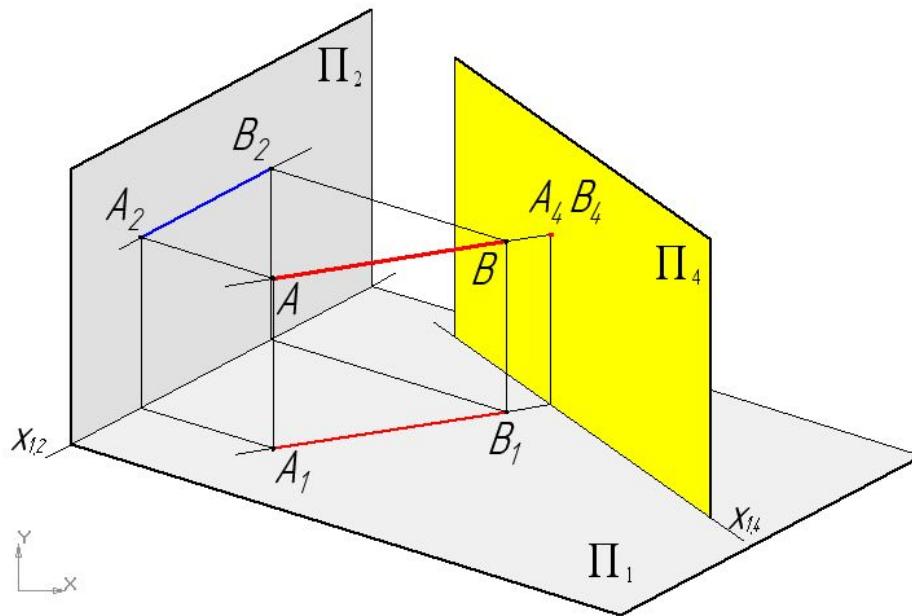


$$\begin{aligned} & x_{4,5} \perp A_4 B_4 \\ (A_1 B_1, x_{1,4}) &= (A_5 B_5, x_{4,5}) \end{aligned}$$



Для прямой уровня данное преобразование выполняется за один этап

Прямая уровня (h или f) параллельна плоскости проекций. Следовательно, если $\Pi' \perp (h \text{ или } f)$, то $\Pi' \perp (\Pi_1 \text{ или } \Pi_2)$, что удовлетворяет требованиям способа перемены плоскостей проекций.



Базовое преобразование № 3.

**Преобразование плоскости
(торсовой поверхности) общего
положения в проецирующую
поверхность
(построение проекции плоскости
в виде прямой линии)**

- Плоскость является проецирующей, если она перпендикулярна плоскости проекций.
- Следовательно, подбираемая новая плоскость проекций Π_4 должна быть перпендикулярна заданной плоскости, например T .

- $(\Pi_4 \perp T)$

- Если плоскости взаимно перпендикулярны, то каждая из них должна содержать хотя бы одну прямую, перпендикулярную другой плоскости.

- $(\Pi_4 \perp T) \Rightarrow (\Pi_4 \perp l \wedge l \subset T)$

$$(\Pi_4 \perp \Pi_1) \vee (\Pi_4 \perp \Pi_2)$$

Если $(l \perp \Pi_4)$ и $(\Pi_4 \perp \Pi_1 \vee \Pi_4 \perp \Pi_2)$

то $(l \parallel \Pi_1 \vee l \parallel \Pi_2)$

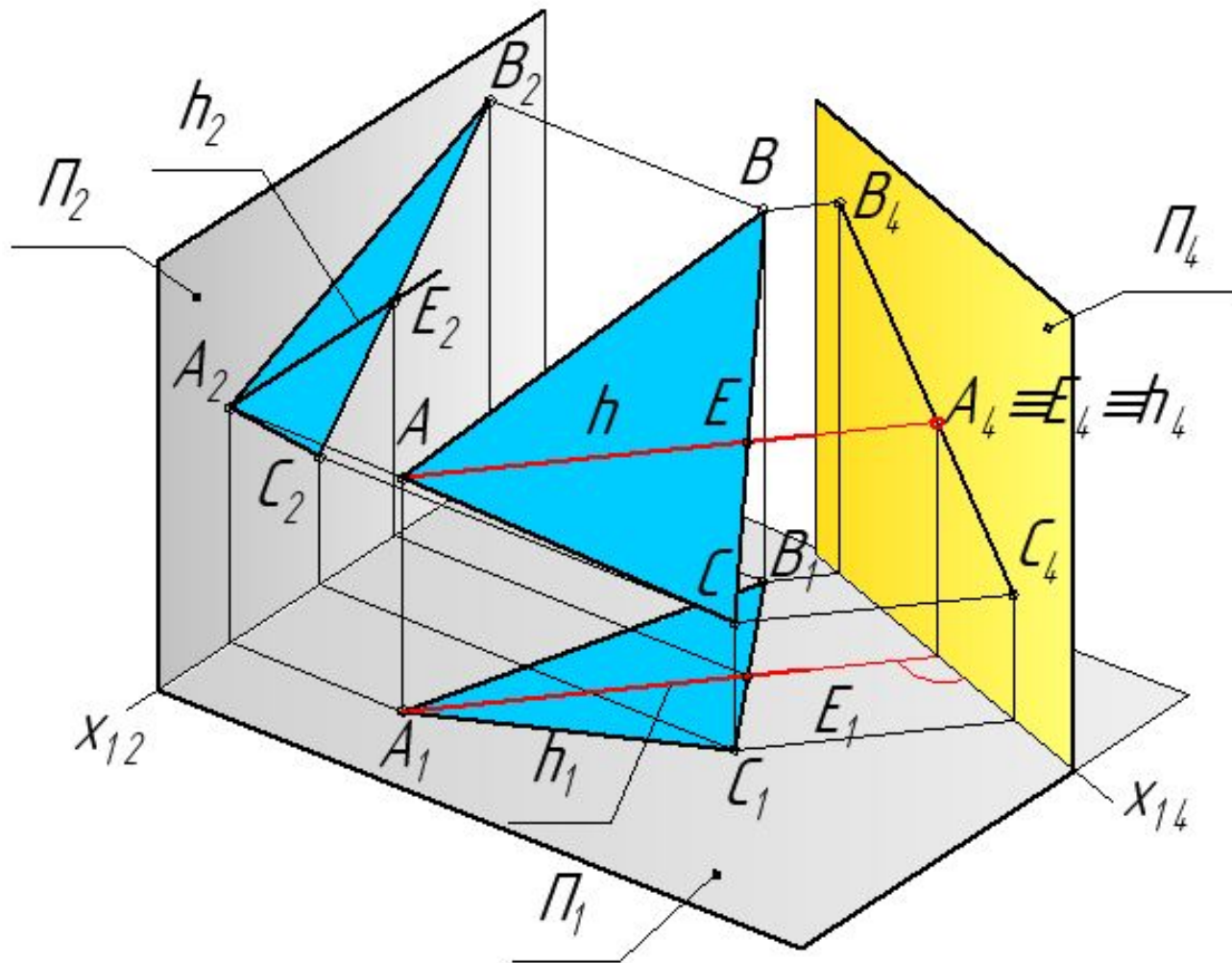
$$\Rightarrow (l \equiv h) \vee (l \equiv f)$$

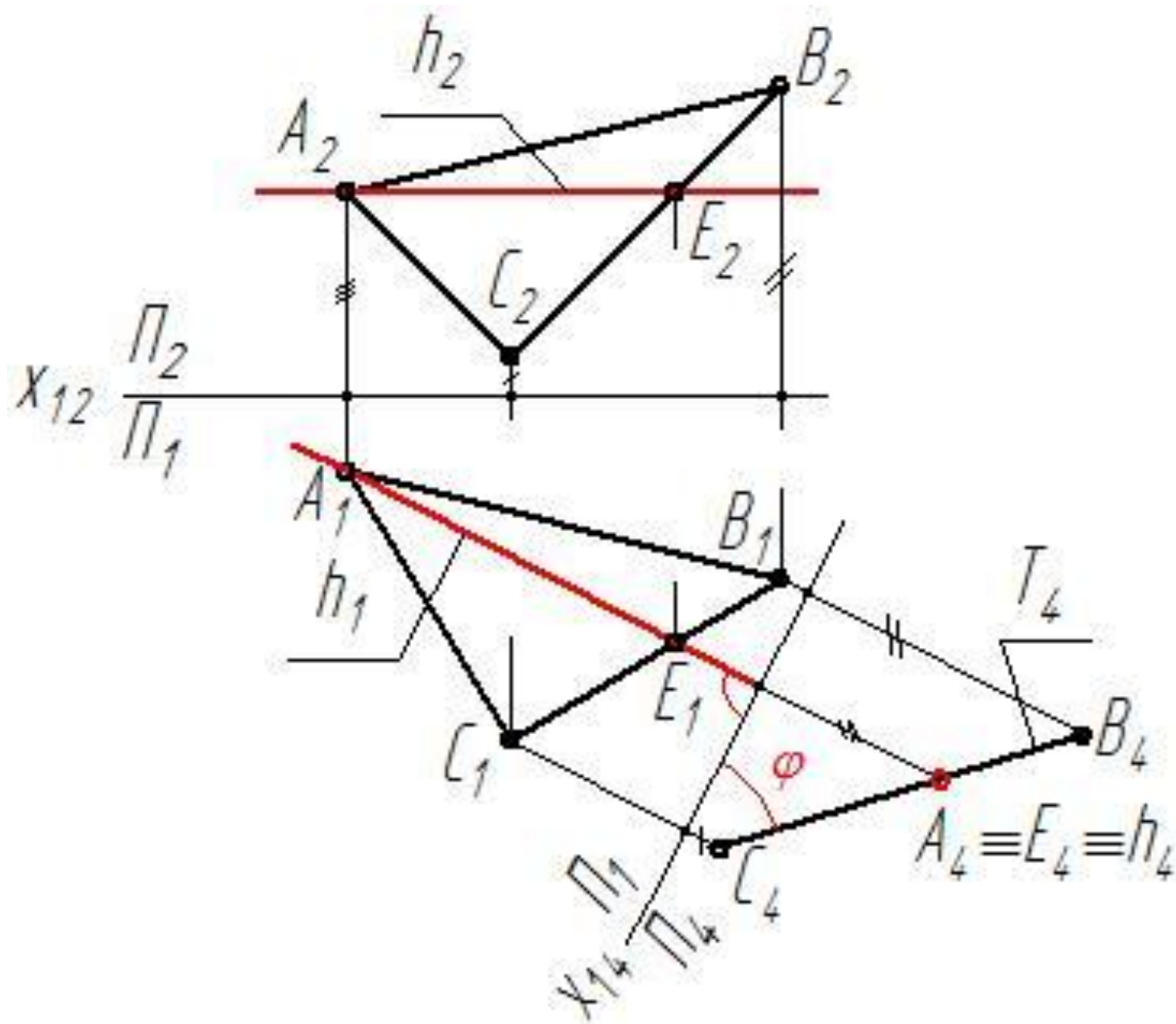
Следовательно,

если $(\Pi_4 \perp \Pi_1)$, то $(\Pi_4 \perp h, h \subset T)$ и $(x_{1,4} \perp h_1)$

если $(\Pi_4 \perp \Pi_2)$, то $(\Pi_4 \perp f, f \subset T)$ и $(x_{2,4} \perp f_2)$

В качестве примера $\Pi_4 \perp \Pi_1$





Базовое преобразование № 4.

**Построение проекции плоской
фигуры на параллельной ей
плоскости проекций**

Решение задачи способом
замены плоскостей
проекций

$$\Pi' \parallel T$$

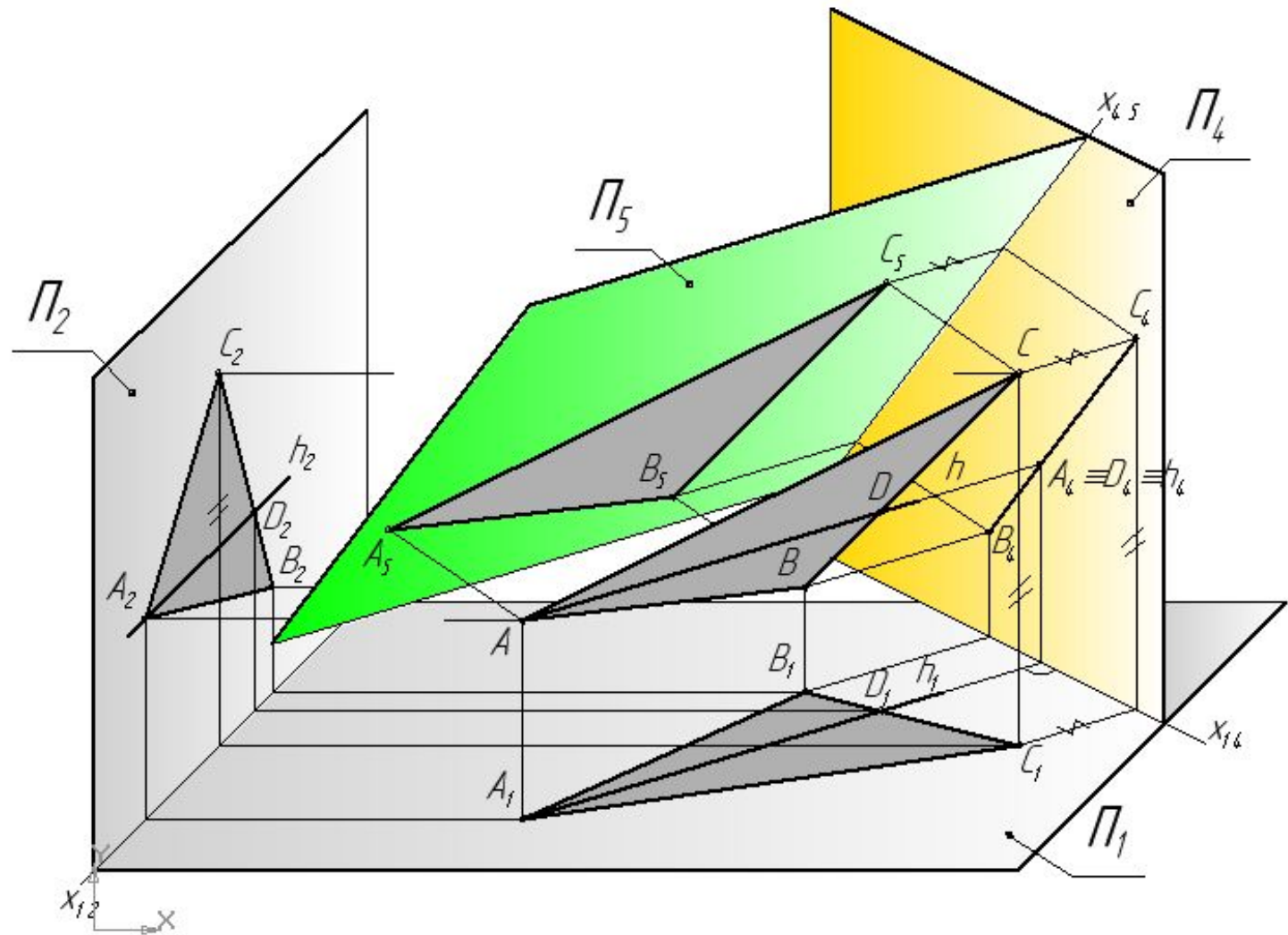
Так как плоскость T – плоскость общего положения, то и любая плоскость ей параллельная, в том числе и проекций Π' , также будет плоскостью общего положения, т.е. $\Pi' \perp \Pi_1$ и $\Pi' \perp \Pi_2$, что противоречит способу замены плоскостей проекций. Следовательно, **задача должна решаться в два этапа.**

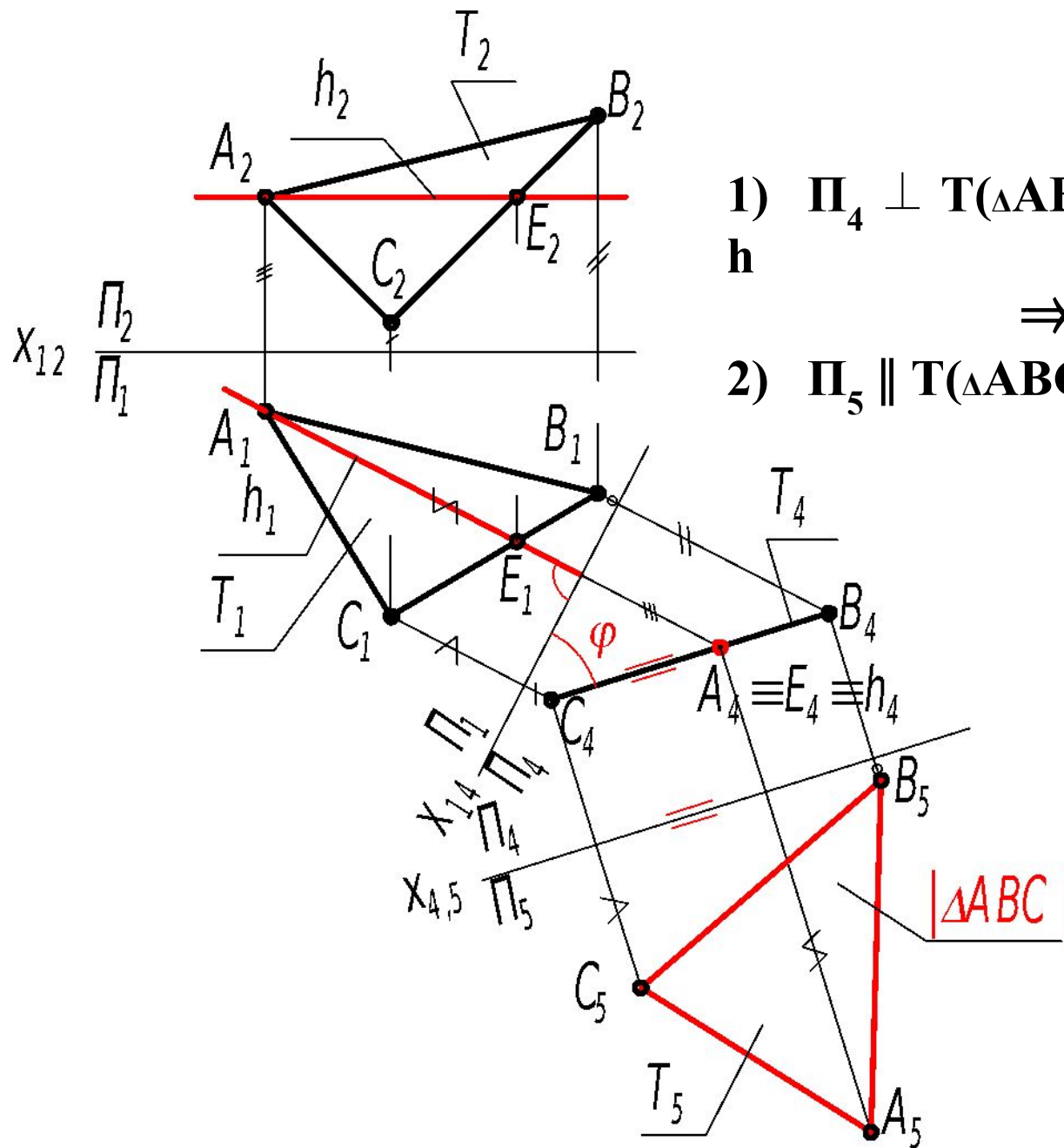
1-й этап. $\Pi_4 \perp T$ (базовая задача №3).

2-й этап. $\Pi_5 \parallel T$.

1). $\Pi_4 \perp T(\triangle ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$

2). $\Pi_5 \parallel T(\triangle ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4$



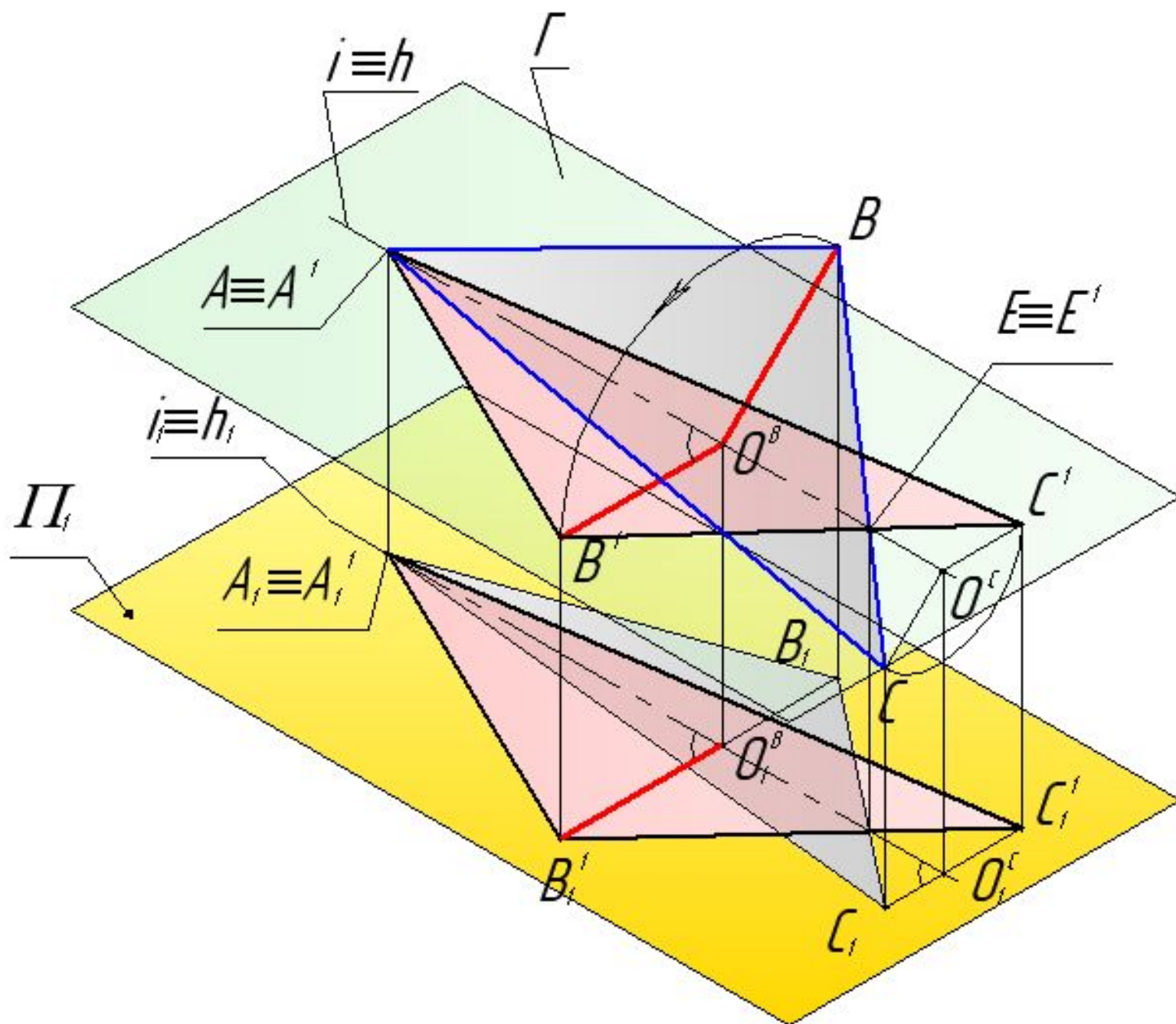


$$1) \quad \Pi_4 \perp T(\triangle ABC), \Pi_4 \perp \Pi_1 \Rightarrow \Pi_4 \perp h$$

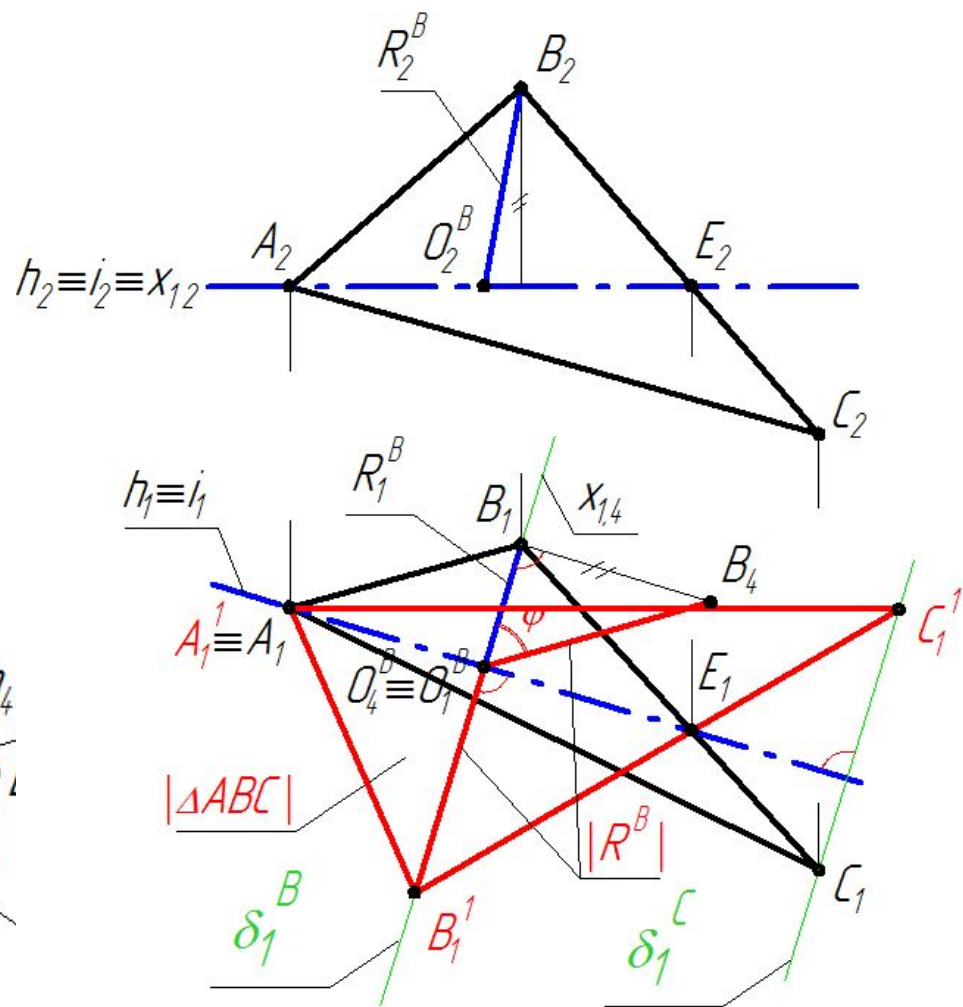
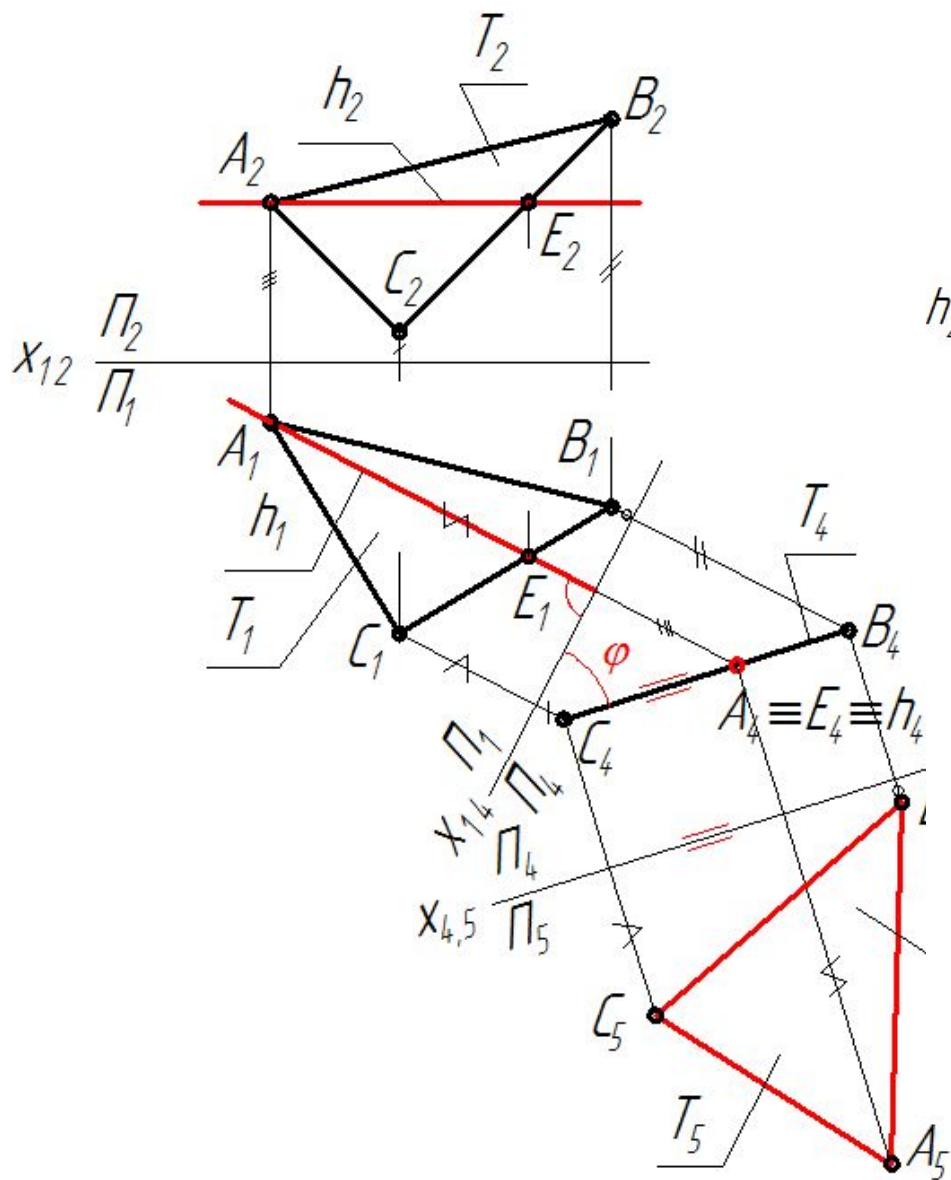
$$\Rightarrow x_{1,4} \perp h_1$$

$$2) \quad \Pi_5 \parallel T(\triangle ABC), \Pi_5 \perp \Pi_4 \Rightarrow x_{4,5} \parallel T_4$$

Решение задачи способом
вращения вокруг прямой
уровня





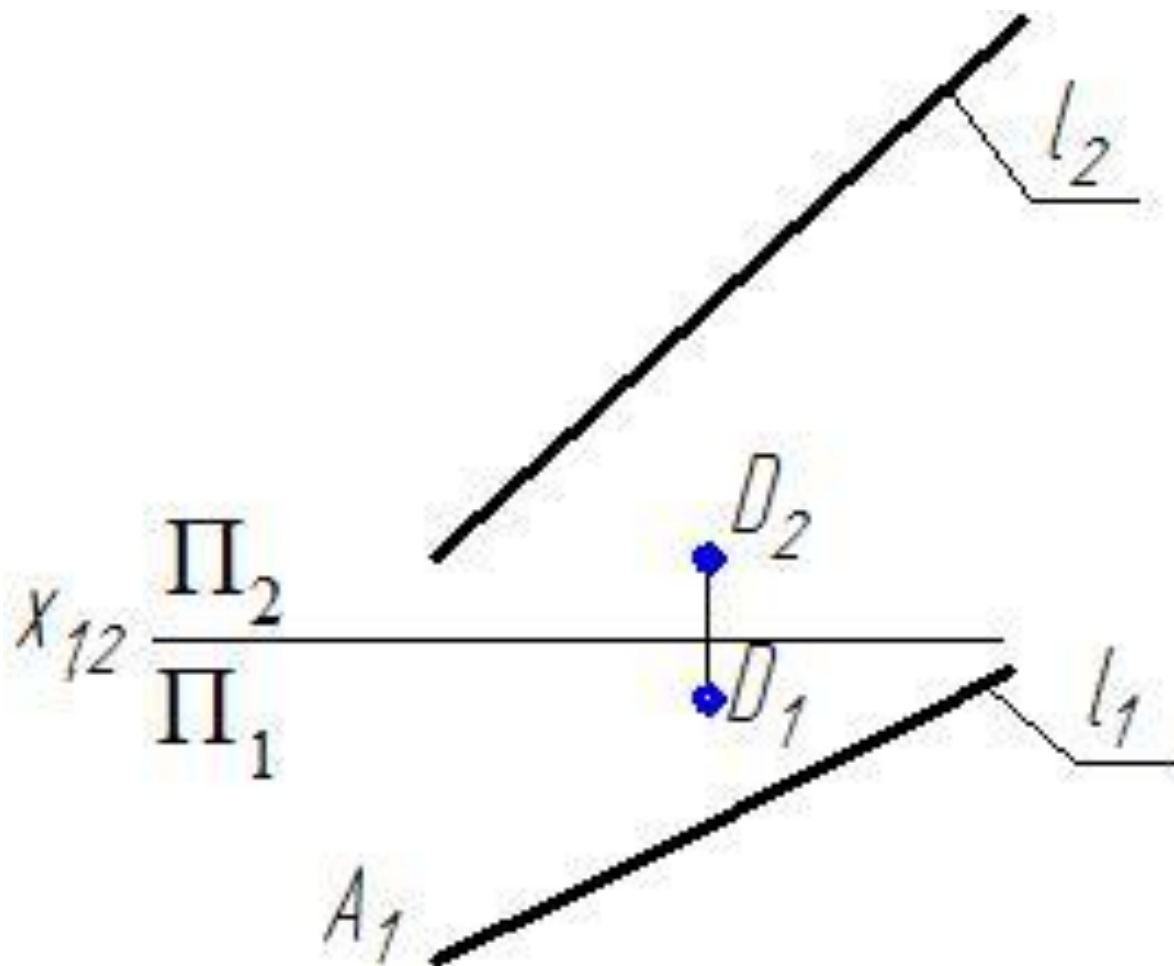


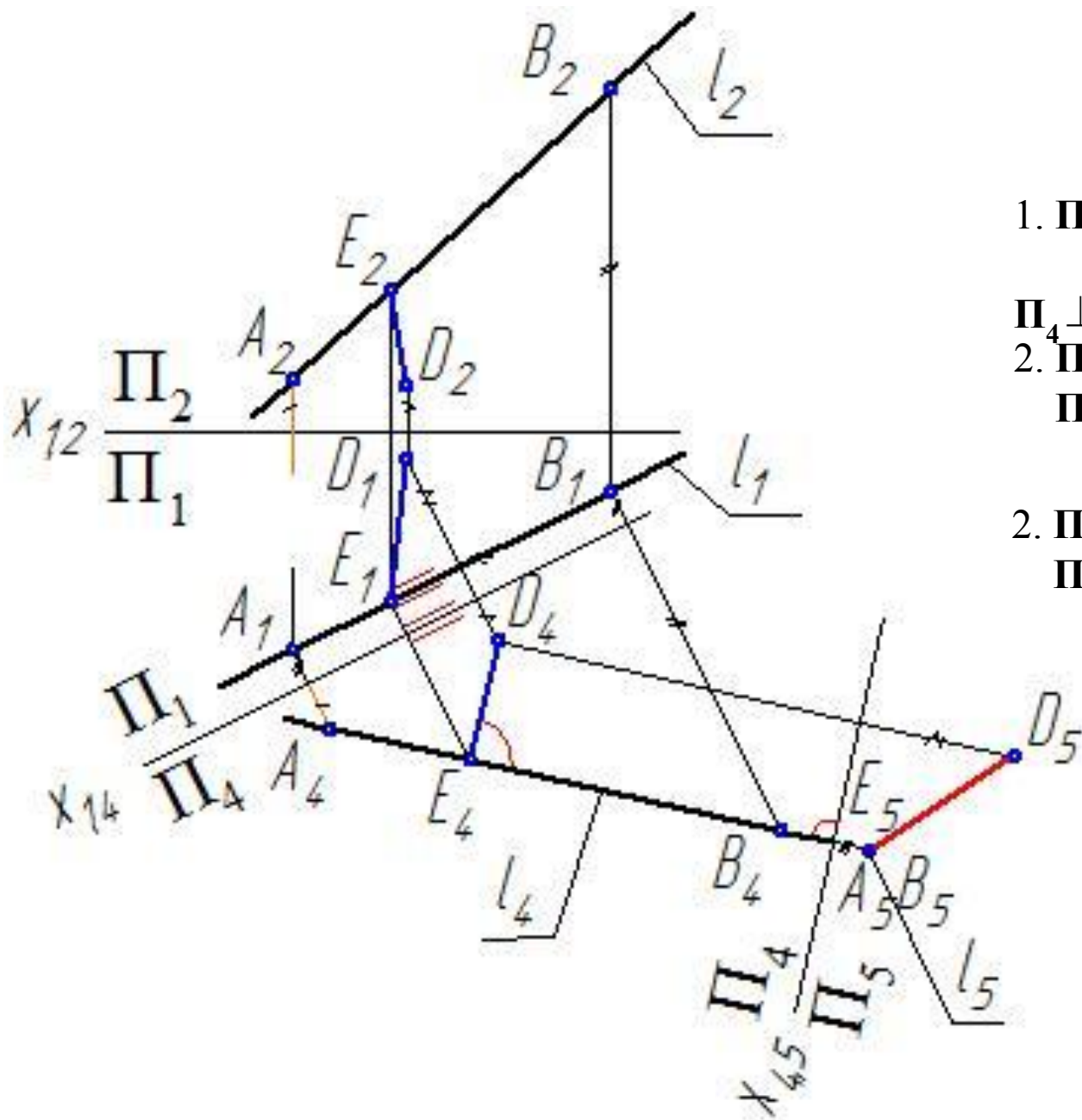
МЕТРИЧЕСКИЕ И КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

- Метрическими называются задачи, в ходе решения которых определяется значение измеряемой величины – расстояния между двумя точками (длина отрезка), величины линейного угла или истинной формы и размеров плоской фигуры.
- Конструктивными называются задачи, в ходе решения которых создается геометрический объект по наперед заданным параметрам. В определенном смысле конструктивную задачу можно рассматривать как обратную метрической задаче.

Базовая задача	Метрическая задача
№1	Определение истинной величины расстояния между двумя точками (длины отрезка прямой). Определение истинной величины угла наклона прямой к плоскости проекций. Определение истинной величины расстояния между параллельными прямыми.
№2	Определение истинной величины расстояния от точки до прямой. Определение истинной величины расстояния между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины двугранного угла, если задана линия пересечения плоскостей.
№3	Определение истинной величины расстояния от точки до плоскости. Определение истинной величины расстояния между параллельными плоскостями. Определение истинной величины угла наклона плоскости к плоскости проекций.
№4	Определение истинной величины угла между пересекающимися прямыми или истинной величины плоской фигуры. Определение истинной величины угла между скрещивающимися прямыми. Определение истинной величины угла между прямой и плоскостью. Определение истинной величины угла между двумя плоскостями, если линия пересечения плоскостей не задана.

Расстояние от точки до прямой





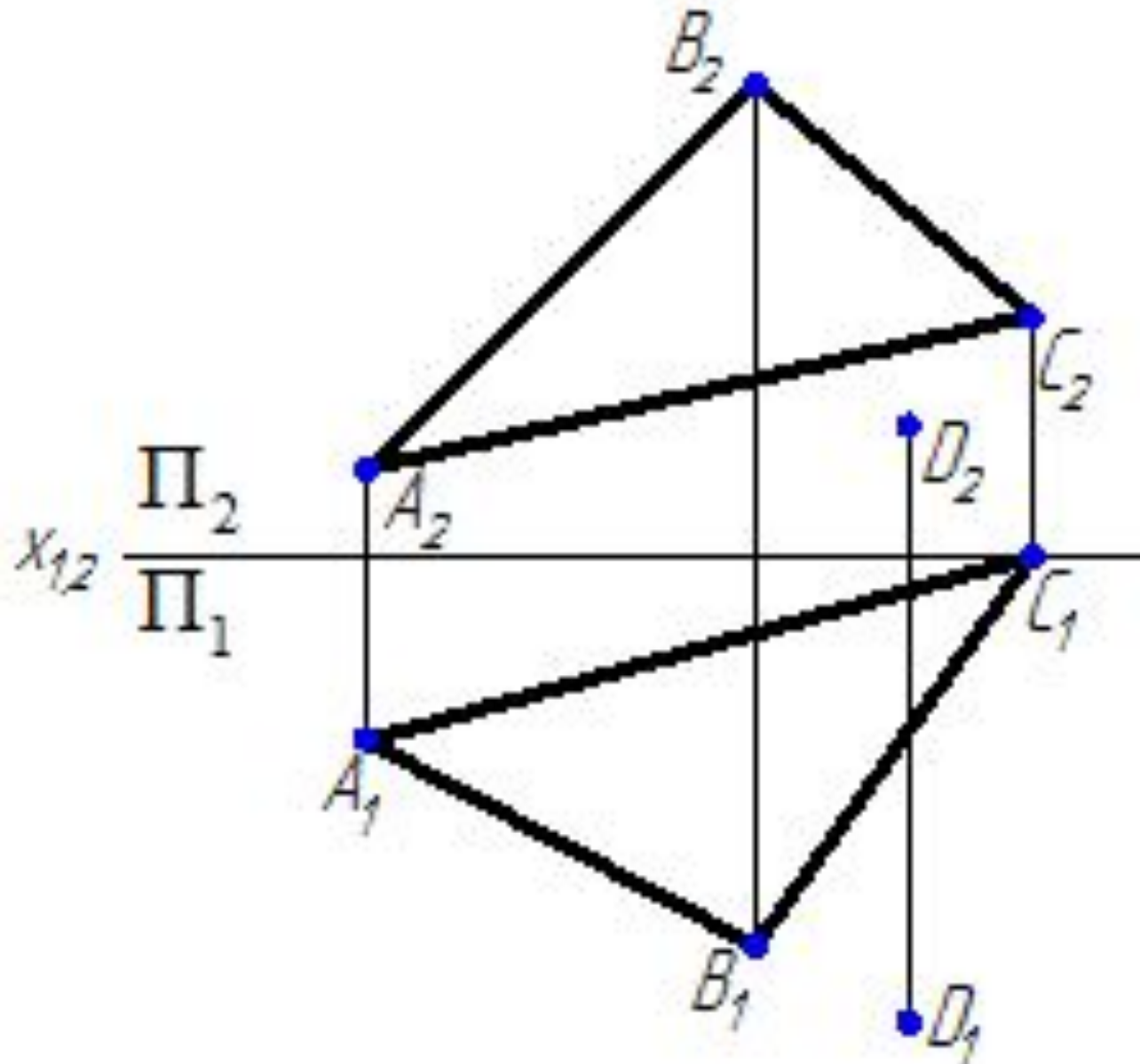
$$1. \Pi_4 \parallel l \Rightarrow x_{14} \parallel l_1$$

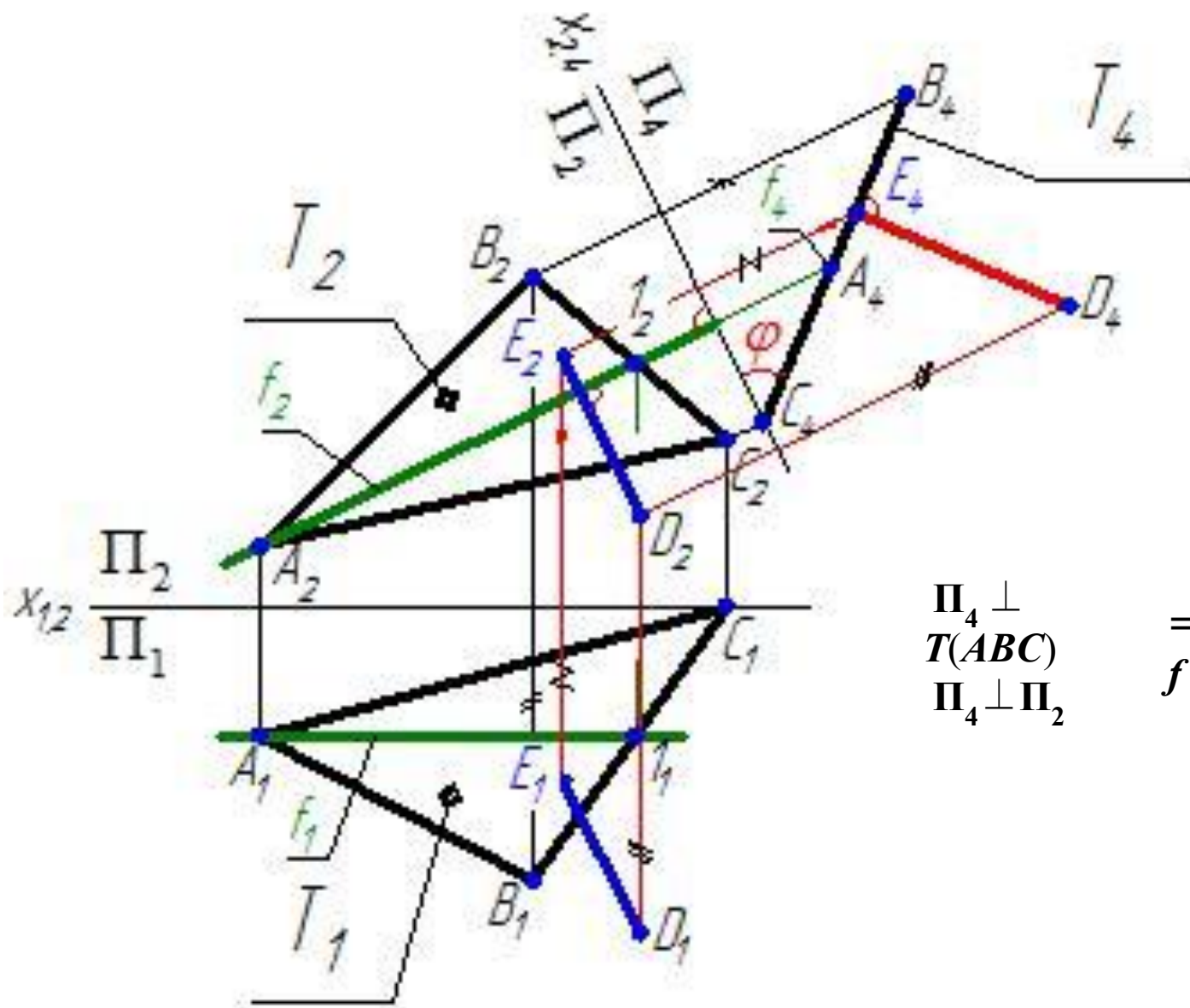
$$\begin{aligned} & \Pi_4 \perp \Pi_1 \\ 2. \Pi_5 \parallel DE & \Rightarrow x_{45} \parallel D_4E_4 \\ & \Pi_5 \perp \Pi_4 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2. \Pi_5 \perp l & \Rightarrow x_{45} \perp \\ & \Pi_5 \perp \Pi_4 \\ & l_4 \end{aligned}$$

Расстояние от точки до плоскости





$$\begin{aligned} &\Pi_4 \perp T(ABC) \\ &\Pi_4 \perp \Pi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \Pi_4 \perp f \\ &\Rightarrow x_{24} \perp f_2 \end{aligned}$$

Угол между прямой и плоскостью

$$\angle \varphi = l^{\wedge} \alpha$$

D – произвольная точка

$$D \in l$$

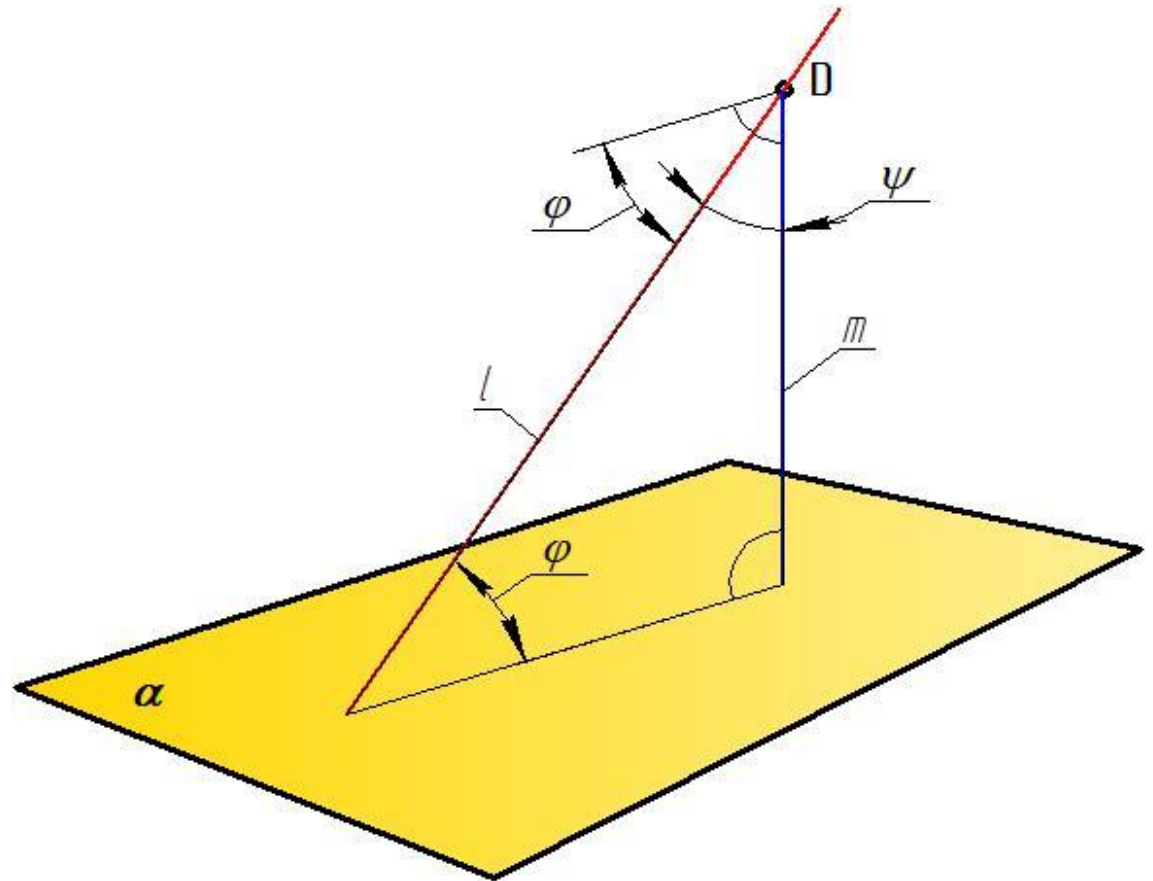
$$m \perp$$

$$\angle^{\alpha}_{\psi} =$$

$$m^{\wedge} l$$

$$\varphi = 90^{\circ} -$$

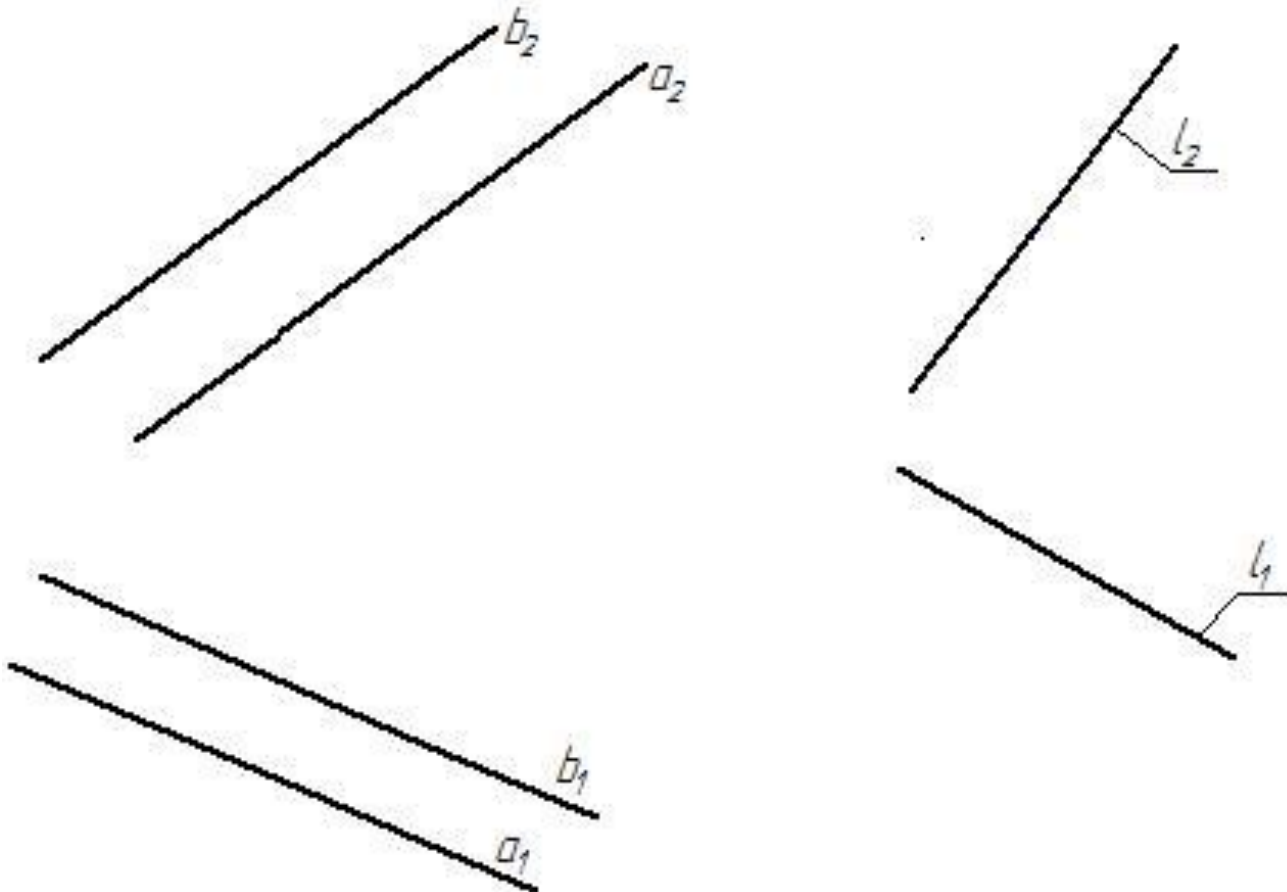
$$\psi$$



Угол между прямой и плоскостью

Исходные данные

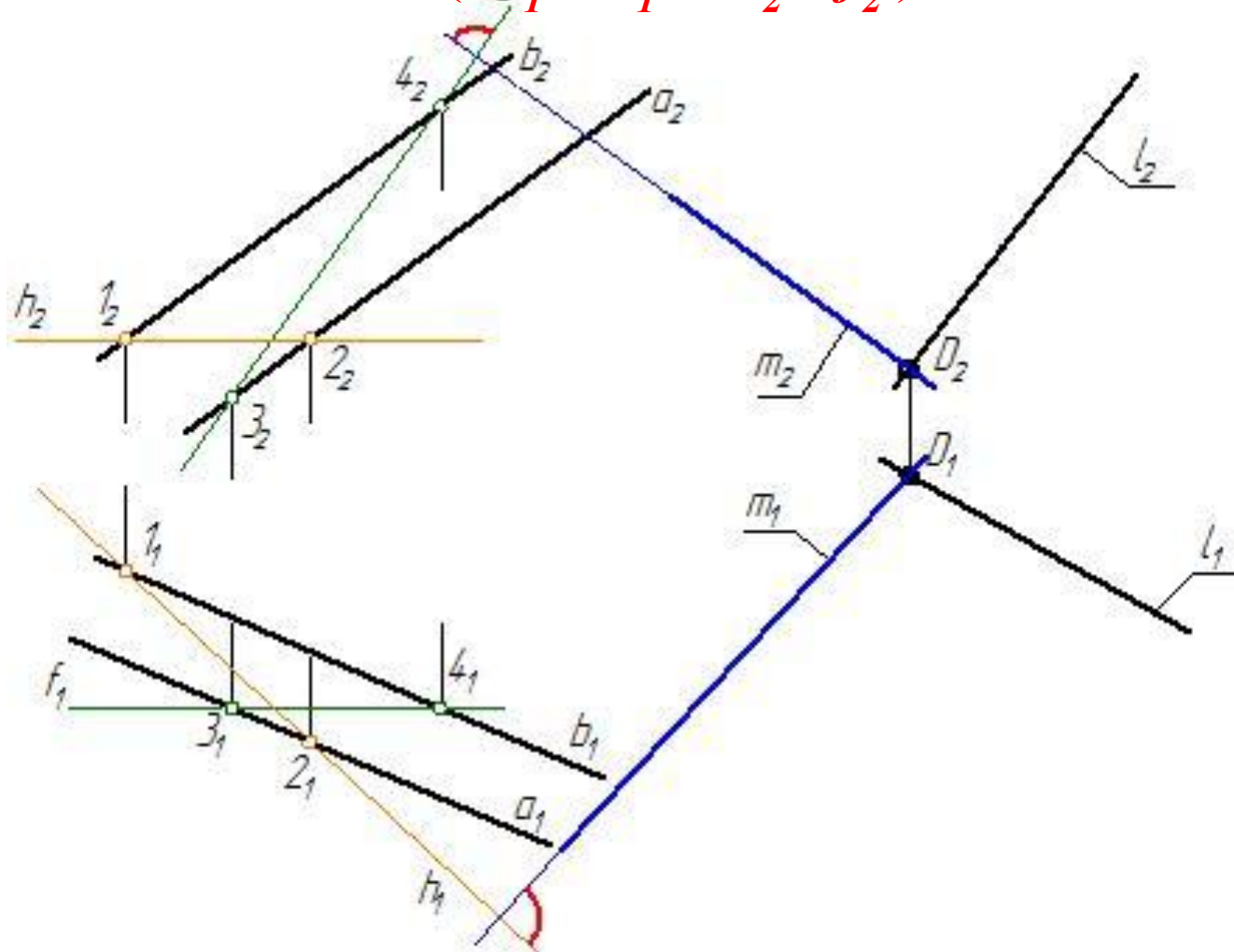
Заданы прямая l и плоскость $\alpha(a, b)$



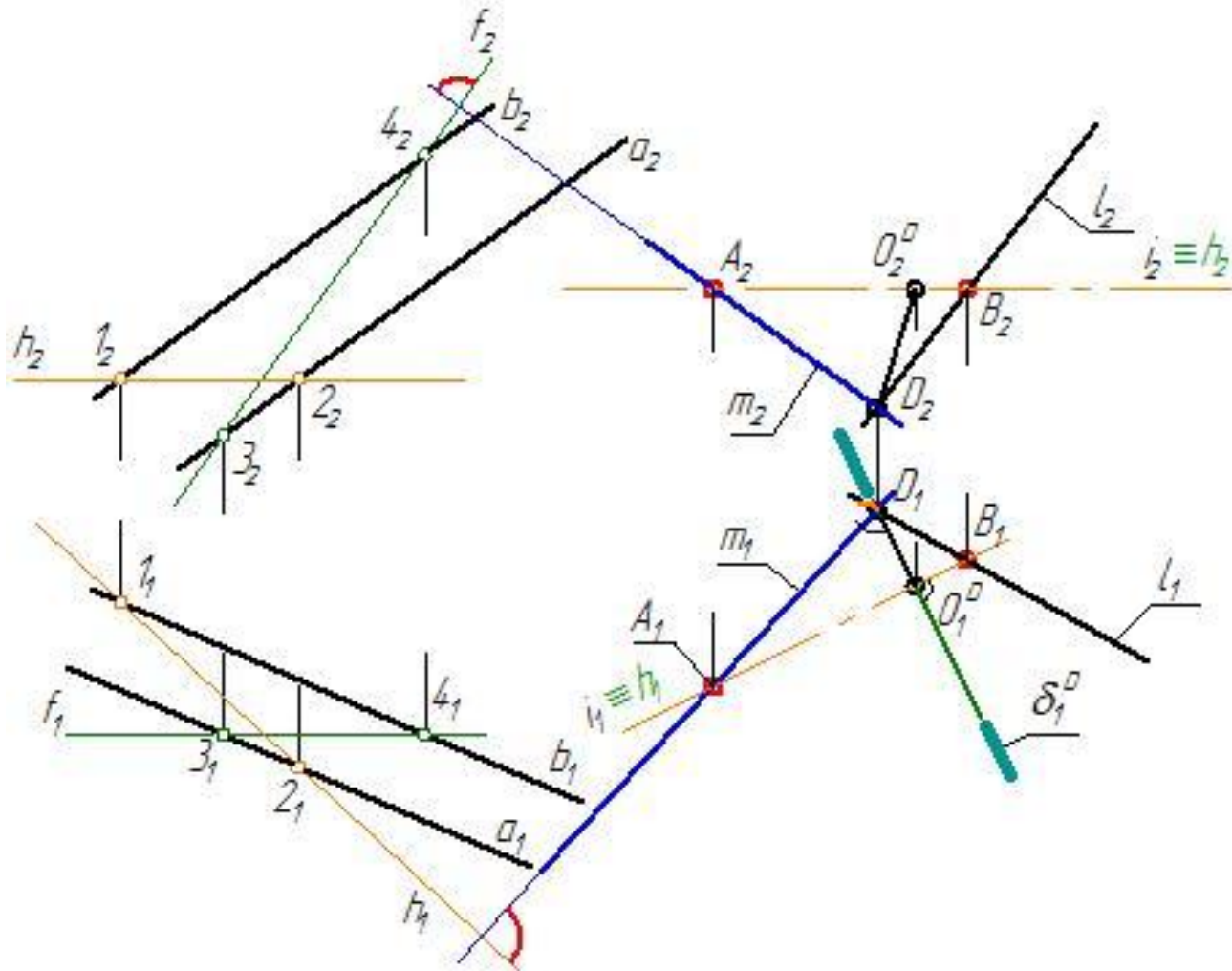
1. На прямой l выбирается произвольная точка D .
2. Через точку D проводят перпендикуляр к заданной плоскости.

$$m \perp \alpha$$

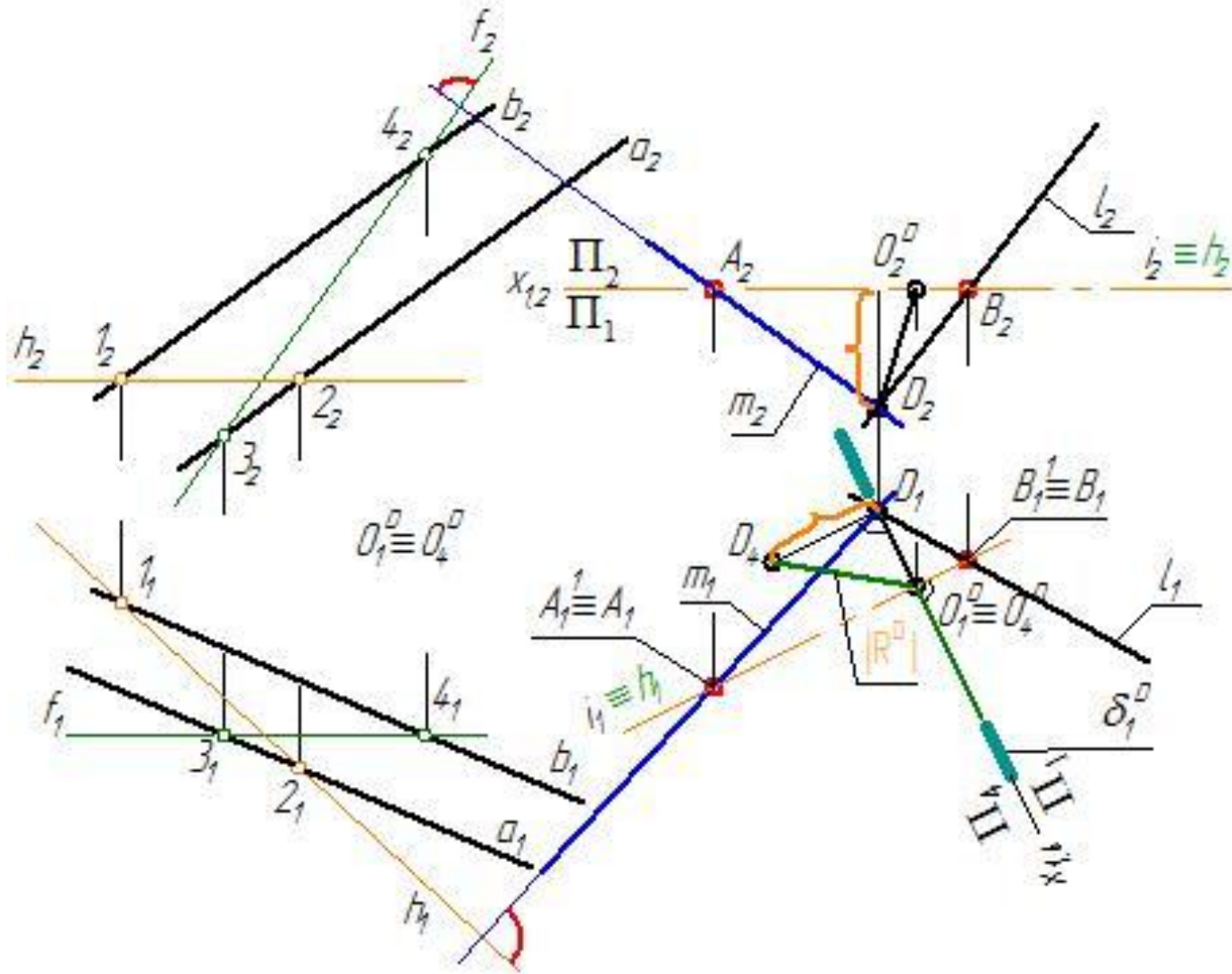
$$(m_1 \perp h_1 \quad m_2 \perp f_2)$$



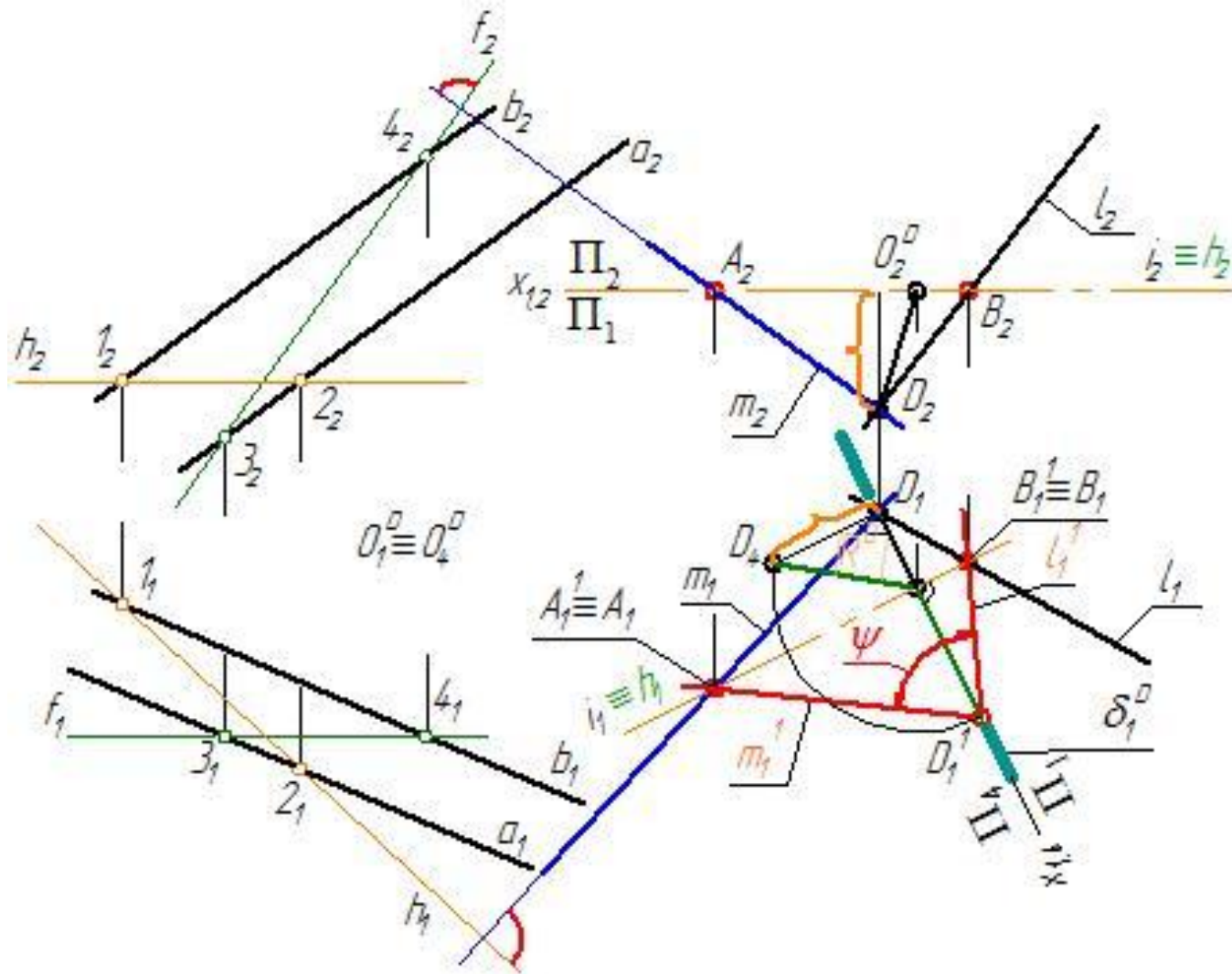
3. В плоскости, образованной прямыми m и l , проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($h \equiv i$).
4. Задают плоскость вращения δ точки D вокруг оси i . $\delta_1 \perp i_1$
5. Отмечают центр вращения точки D – точку O .



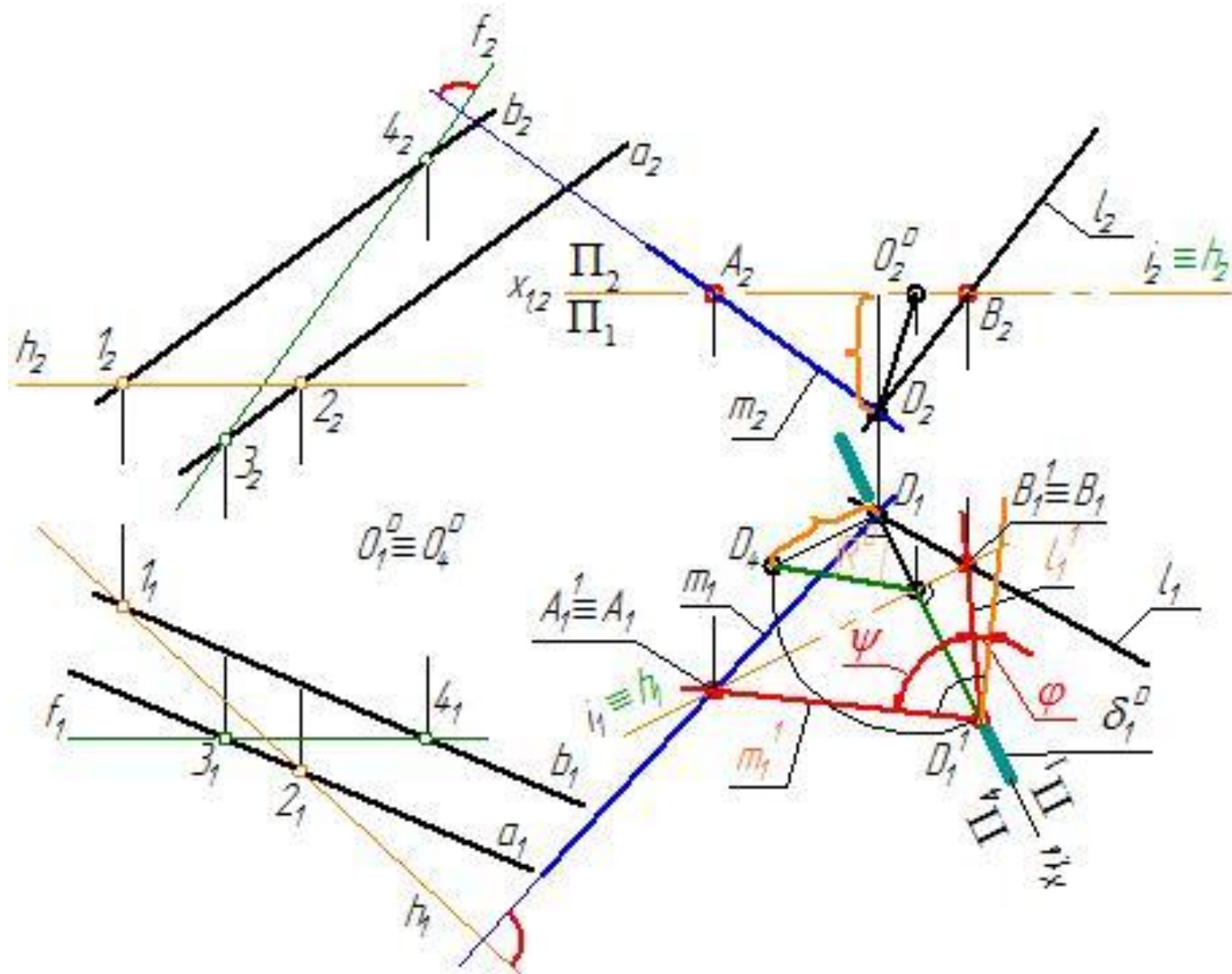
6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D***.



7. Выполняют поворот точки ***D*** до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.
8. Проводят новые проекции ***m*¹** и ***l*¹** прямых ***m*** и ***l***.
9. Отмечают угол ***ψ***, образованный прямыми ***m*¹** и ***l*¹**.

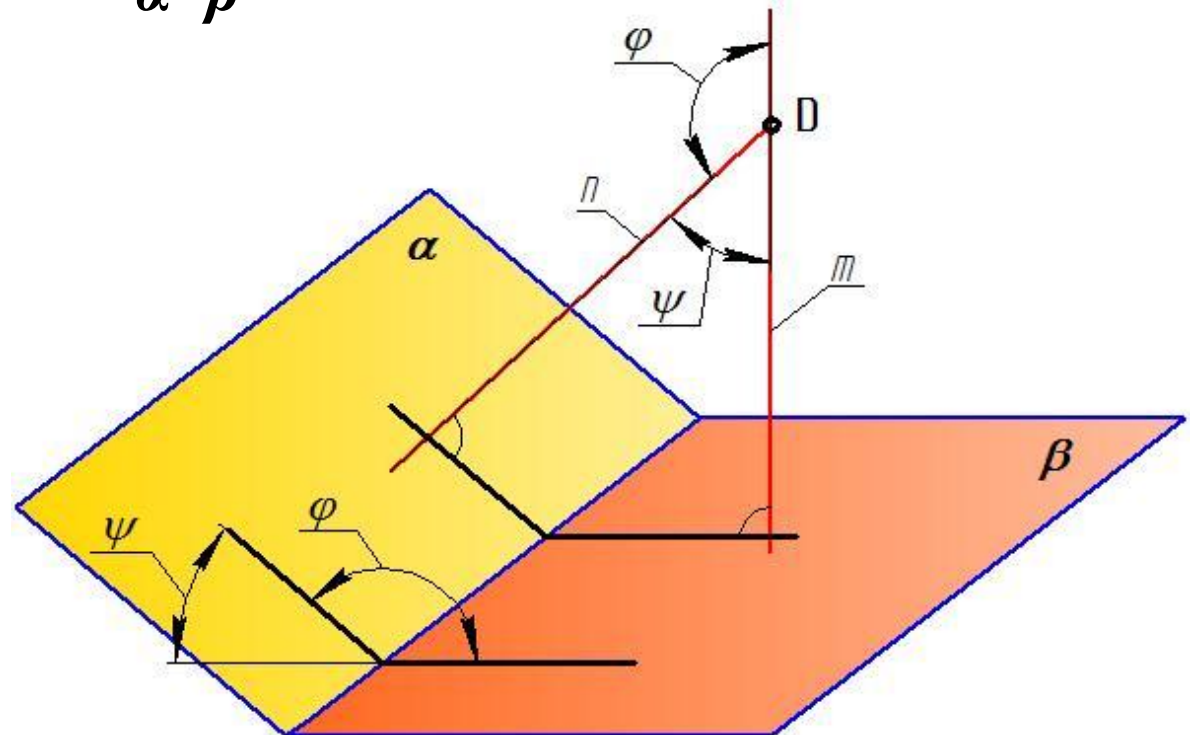


10. Достраивают угол ψ до прямого и отмечают угол φ .



Угол между плоскостями

$$\angle \varphi = \alpha \wedge \beta$$



$$\psi = 180^\circ - \varphi$$

D – произвольная точка

$$n \perp \alpha ; m \perp \beta$$

$$\angle \psi =$$

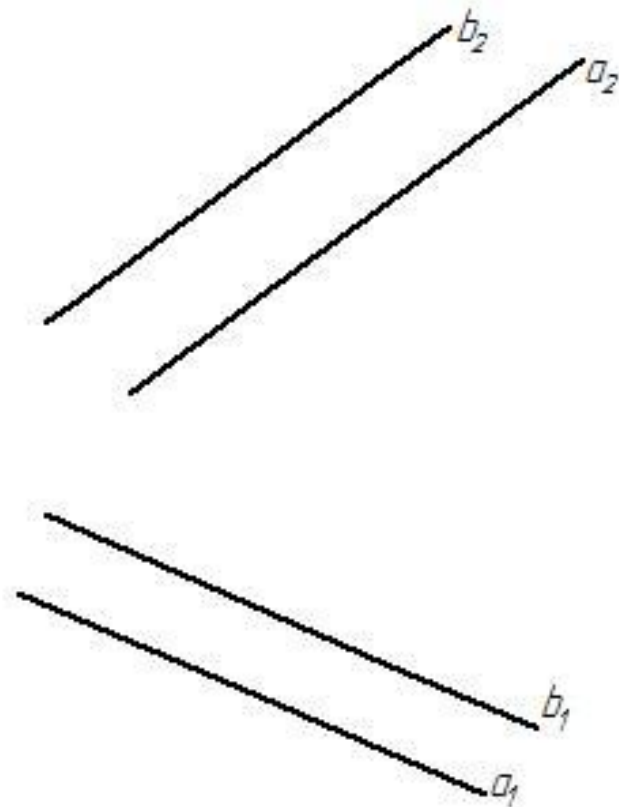
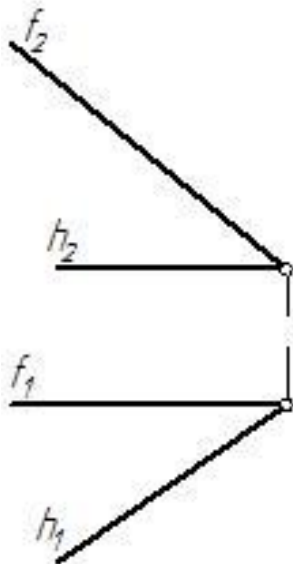
$$m \wedge n$$

$$\varphi = 180^\circ - \psi$$

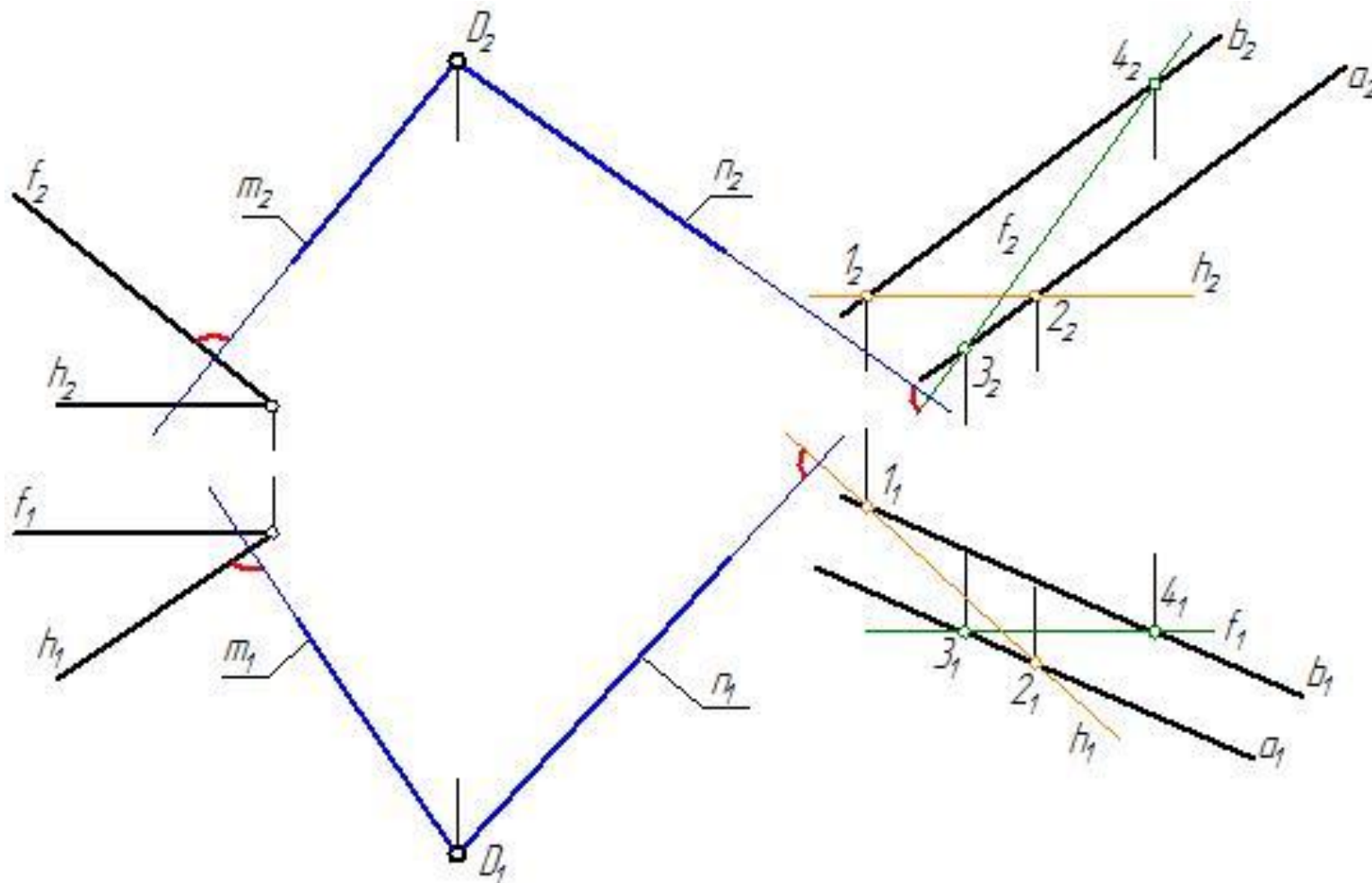
Угол между плоскостями

Исходные данные

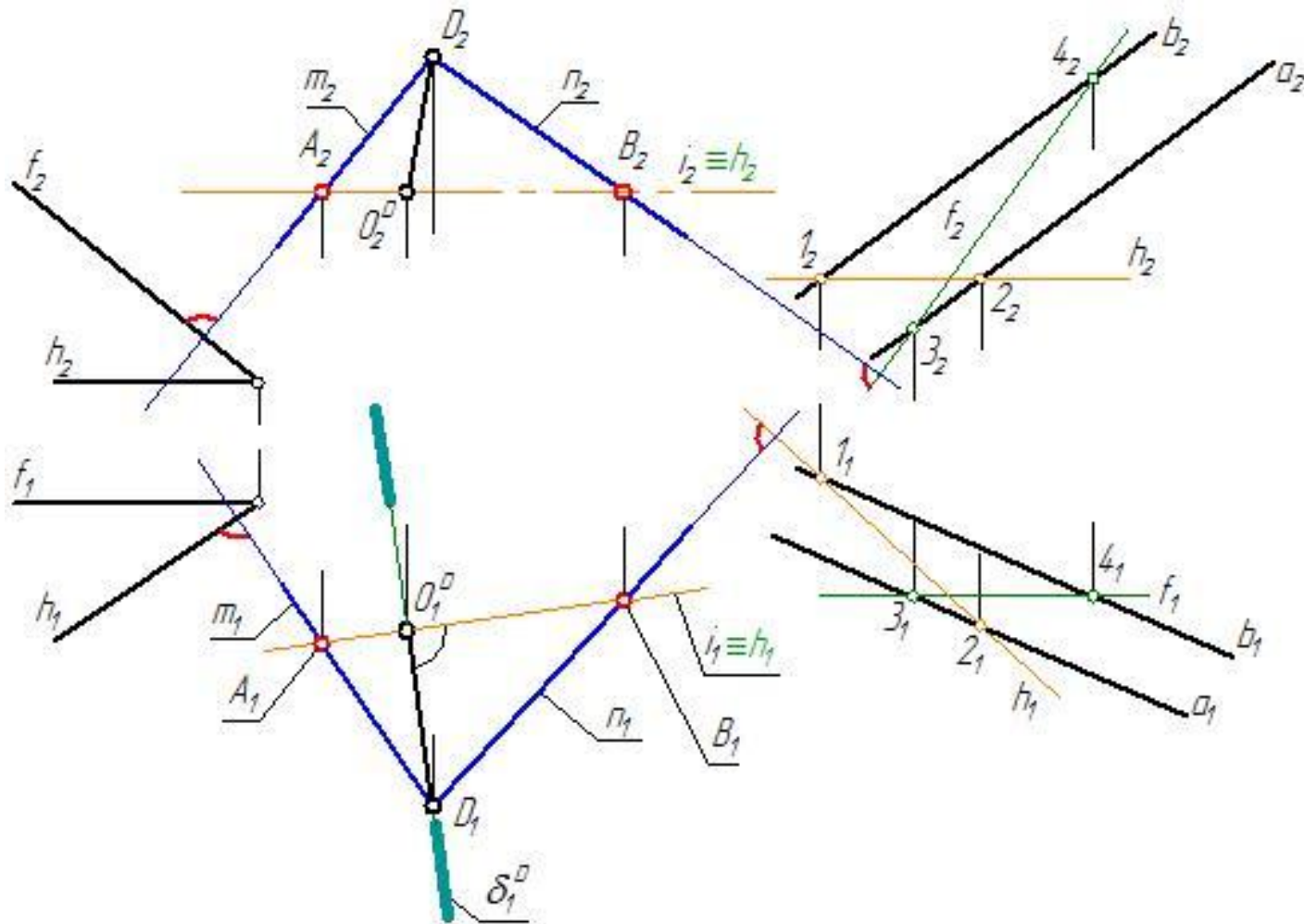
Заданы плоскости $\alpha(h,f)$ и $\beta(a,b)$



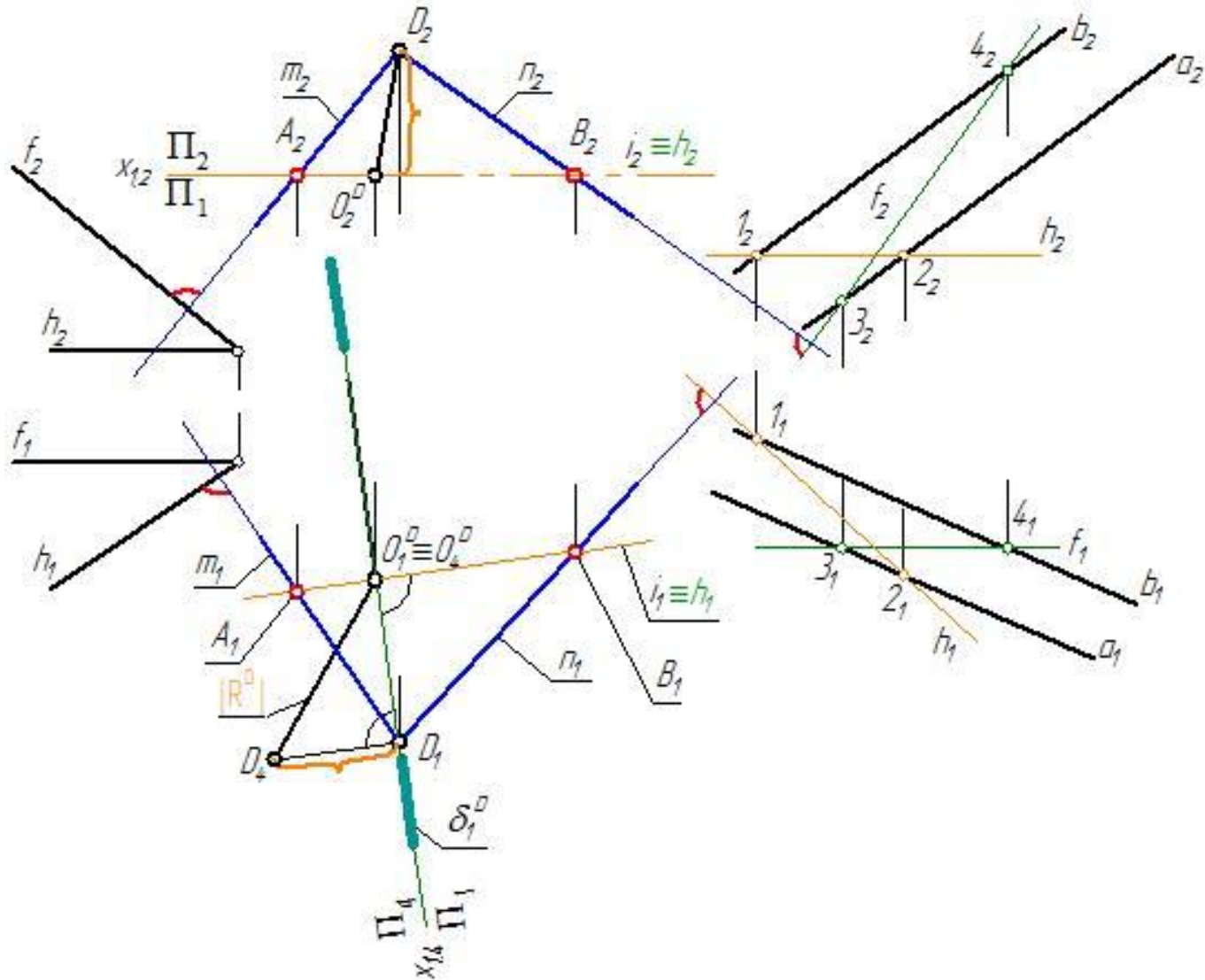
1. Вводится произвольная точка D.
2. Через точку D проводят перпендикуляры к каждой из заданных плоскостей. $m \perp \alpha$ $n \perp \beta$
 $(l_1 \perp h_1 \quad l_2 \perp f_2)$



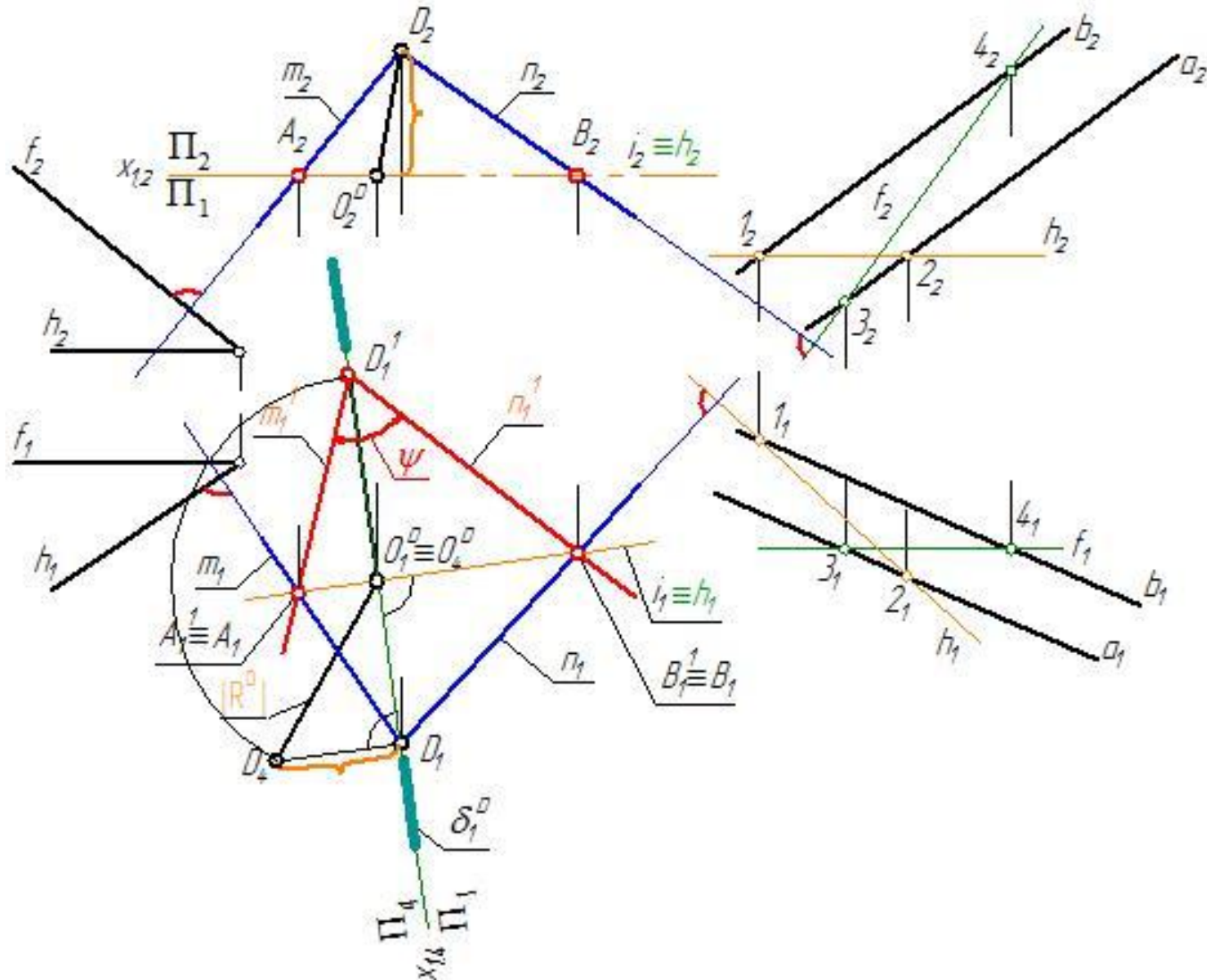
3. В плоскости, образованной прямыми m и n , проводят горизонталь (фронталь), которая является осью вращения ($h \equiv i$).
4. Задают плоскость вращения δ точки D вокруг оси i . $\delta_1 \perp i_1$
5. Отмечают центр вращения точки D – точку O .



6. Способом замены плоскостей проекций определяют истинную величину радиуса вращения точки ***D***.



7. Выполняют поворот точки D до совмещения с плоскостью уровня, в которой расположена ось вращения.
8. Проводят новые проекции m^1 и n^1 прямых m и n .
9. Отмечают угол ψ , образованный прямыми m^1 и n^1 .



10. Достраивают угол ψ до развернутого и отмечают угол φ .

