



Задачи с параметрами



*Учитель математики
МБОУ СОШ №1
Вольно-Надеждинское
Приморский край
Пентяшкина Татьяна Петровна*



Уравнение вида $a \cdot x = b$ с переменной x
имеет **единственное** решение при $a \neq 0$;
имеет **бесконечное множество** решений при $a = b = 0$;
не имеет решений при $a = 0, b \neq 0$.

Пример 1. При каких значениях параметра b уравнение

$$a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x$$

не имеет корней?

Решение. $a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x \Leftrightarrow a^2x - 5ax + 6x = a - 2 \Leftrightarrow x(a - 2)(a - 3) = a - 2$. Уравнение не имеет решений при $a=3$

**Ответ: $a=$
3.**



Неравенство вида $a \cdot x > b$ имеет решением
промежуток $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$ при $a > 0$;
промежуток $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ при $a < 0$;
промежуток $(-\infty; +\infty)$ при $a = 0, b < 0$;
не имеет решений при $a = 0, b \geq 0$.

Пример 2. Решить неравенство $ax+4 > 2x + a^2$

Решение. $ax+4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a-2)x > a^2 - 4$

Рассмотрим три случая.

1. $a=2$. Неравенство $0 \cdot x > 0$ решений не имеет.

2. $a > 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x > a+2$.

3. $a < 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x < a+2$.

Ответ: $x > 2$ при $a > 2$; $x < a + 2$, при $a < 2$;
 $\emptyset$ при $a=2$

Пусть коэффициенты системы уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a_1x + b_1y = c_1; \end{cases} \text{отличны от нуля.}$$



Тогда:

чтобы система имела **единственное решение**,

необходимо и достаточно выполнение условия $\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}$;

2) чтобы система имела **бесконечно много** решений,

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1};$$

3) чтобы система **не имела решений**, необходимо и

достаточно выполнение условия $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \neq \frac{c}{c_1}$.

Случай, когда коэффициенты равны нулю, нужно рассматривать отдельно.



Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения находим $y = 1 - x$ и подставляем в первое. Получим

$$2x + (9a^2 - 2)(1 - x) = 3a \Leftrightarrow (3a - 2)(3a + 2) = (3a - 2)(3a + 1).$$

- 1. Если $a \neq \pm \frac{2}{3}$, то $x = \frac{3a+1}{3a+2}$, $y = 1 - \frac{3a+1}{3a+2} = \frac{1}{3a+2}$.
- 2. $a = \frac{2}{3}$. Уравнение $x \cdot 0 = 0$ имеет бесчисленное множество решений
- 3. $a = -\frac{2}{3}$. Уравнение $x \cdot 0 = 4$ решений не имеет.

Ответ: $x = \frac{3a+1}{3a+2}$, $y = \frac{1}{3a+2}$ при $a \neq \pm \frac{2}{3}$; $x = t, t \in \mathbb{R}$ при $a = \frac{2}{3}$; $\emptyset$ при $a = -\frac{2}{3}$



2. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

а) **нет решений** тогда и только тогда, когда **$D < 0$** ;

б) **два различных корня** тогда и только тогда, когда **$D > 0$** ;

с) **два (может быть кратных) корня** тогда и только тогда, когда **$D \geq 0$** ;

д) **два положительных корня** тогда и только тогда,

$$\text{когда} \begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_B > 0; \end{cases}$$

е) **два отрицательных корня** тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{c}{a} > 0, \\ \frac{-b}{a} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ af(0) > 0, \\ x_B < 0; \end{cases}$$

f) корни разных знаков тогда и только тогда, когда $\frac{c}{a} < 0 \Leftrightarrow$

$$ac < 0 \Leftrightarrow af(0) < 0;$$

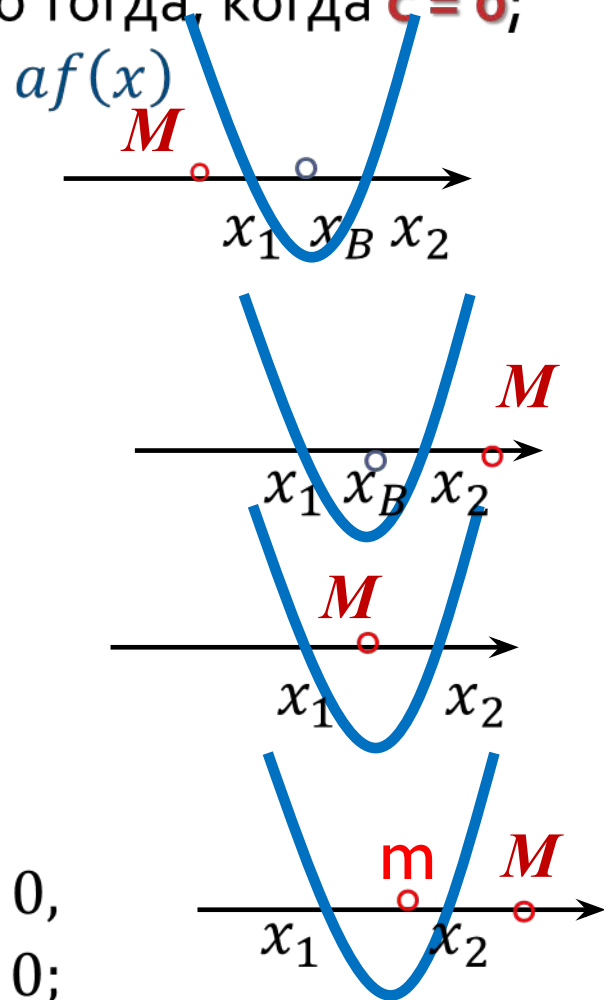
g) корень, равный нулю, тогда и только тогда, когда **$c = 0$** ;

$$h) x_2 > x_1 > M \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B > M; \end{cases}$$

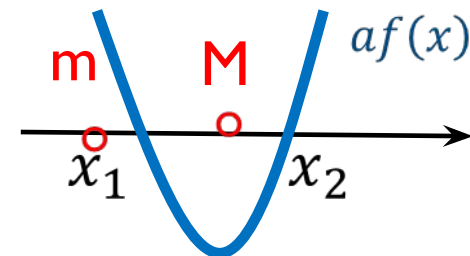
$$i) x_1 < x_2 < M \Leftrightarrow \begin{cases} D > 0, \\ a \cdot f(M) > 0, \\ x_B < M; \end{cases}$$

$$j) x_1 < M < x_2 \Leftrightarrow a \cdot f(M) < 0;$$

$$k) x_1 < m < x_2 < M \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) > 0; \end{cases}$$

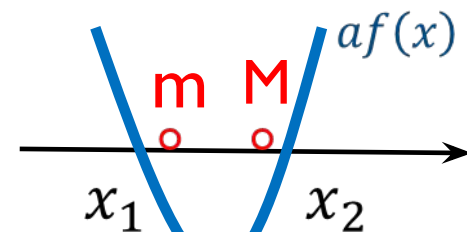


$$h) \ x_1 < m < M < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) < 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$

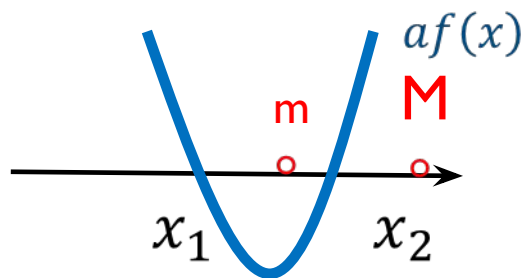
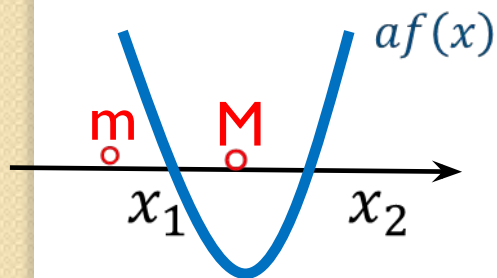


h) **один корень внутри** интервала **(m; M)**, а **другой вне** этого интервала тогда

i) и только тогда, когда $f(m) \cdot f(M) < 0$.



$$j) \ m < x_1 < M < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot f(m) > 0, \\ a \cdot f(M) < 0; \end{cases}$$





Пример 4. При каких m все корни уравнения $x^2 - (3m + 1)x + (2m^2 + 4m - 6) = 0$ а) больше 1; б) меньше -1?



Решени а) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m + 1)^2 - 4(2m^2 + 4m - 6) \geq 0 \\ \frac{1}{2}(3m + 1) > 1 \\ 1 - (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (m - 5)^2 \geq 0 \\ m > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$(2m - 3)(m + 2) > 0$$

$$m \in (-\infty; \infty)$$

$$m \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$m \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty\right),$$

получаю $m \in \left(\frac{3}{2}; \infty\right)$.



б) Решая систему

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 < -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; \infty) \\ \frac{1}{2}(3m + 1) < -1 \\ 1 + (3m + 1) + (2m^2 + 4m - 6) > 0, \end{cases}$$

получаем $m \in (-\infty; -4)$

Замечание. Если выражение для корней уравнения не содержит радикалов, то

удобно решать примеры и без применения теорем.

Так как корни квадратного трехчлена $x_1 = m + 3$, $x_2 = 2m - 2$, то в случае

а) из системы $\begin{cases} m + 3 > 1 \\ 2m - 2 > 1 \end{cases}$ имеем $m \in (\frac{3}{2}; \infty)$,

б) решением системы $\begin{cases} m + 3 < -1 \\ 2m - 2 < -1 \end{cases}$ является $m \in (-\infty; -4)$.

Пример Найти a при которых система

5.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a \\ xy = a - \frac{1}{2} \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.

Решени

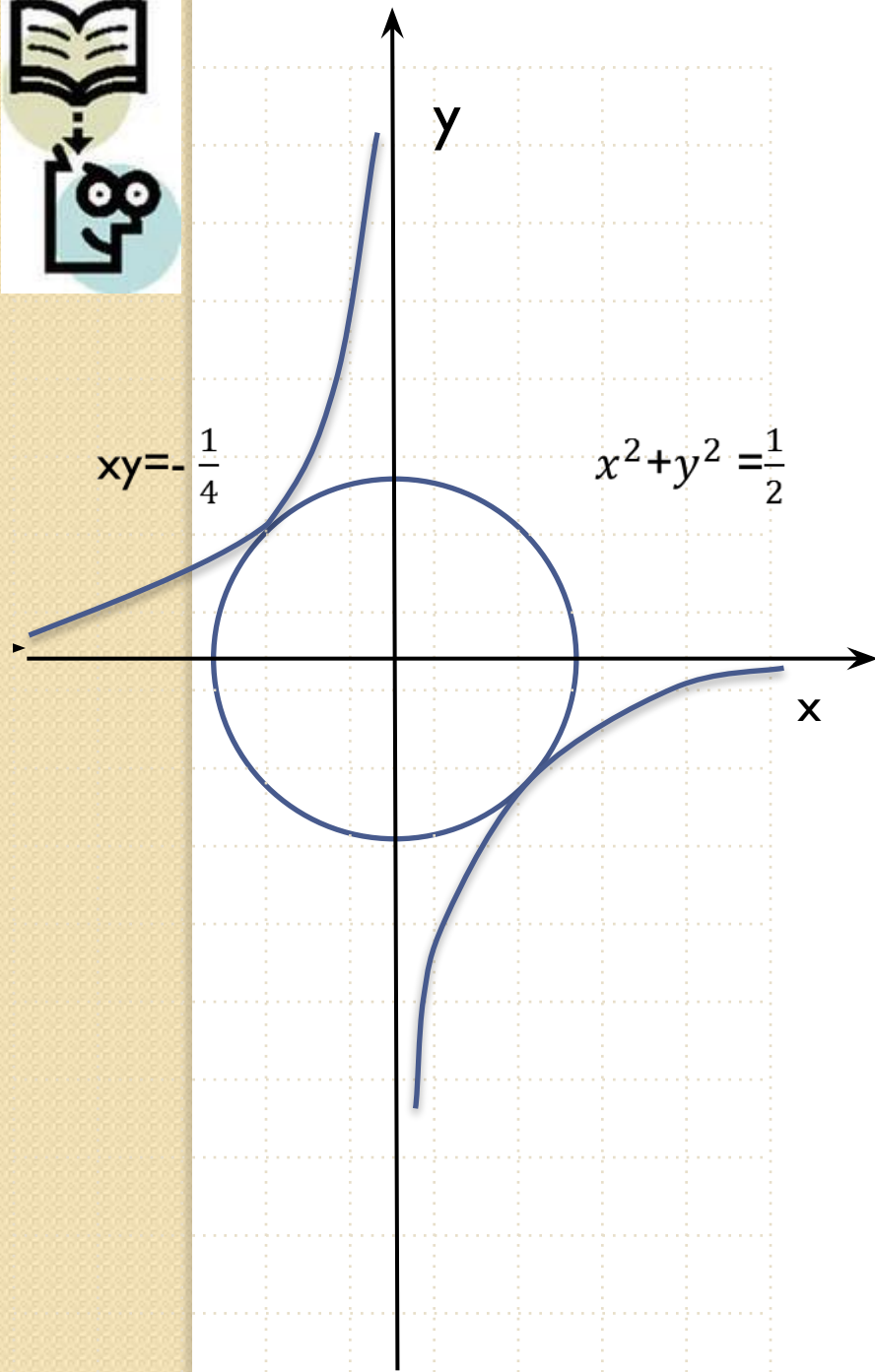
Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из первого, получим $x^2 - 2xy + y^2 = 1 \Leftrightarrow (y - x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (y - x - 1)(y - x + 1) = 0$, откуда $y = x \pm 1$.

Подставим найденные значения y в первое уравнение.

Каждое из уравнений $2x^2 + 2x + 1 - 2a = 0$ и $2x^2 - 2x + 1 - 2a = 0$ будет иметь два решения, а, следовательно, система – четыре решения, если $\frac{1}{4}D = 1 - 2(1 - 2a) = 4a - 1 > 0$.

Уравнения и система не имеет решений, если $4a - 1 > 0$. При $a = \frac{1}{4}$ каждое из уравнений имеет по одному решению ($x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$), а

система два решения $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.



Графическая иллюстрация
 $x^2 + y^2 = 2a$ ($a > 0$) – окружность с центром в начале координат,
 $R = \sqrt{2a}$. $xy = a - \frac{1}{2}$ – гипербола
($a < \frac{1}{2}$, 2 – ая и 4 – ая четверти;
 $a > \frac{1}{2}$, 1-ая и 3-я четверти),
при $a = \frac{1}{2}$ – оси OX и OY .



Пример 6.

Найти все значения m , при которых неравенство $x^2 + 2(m - 3)x + m^2 - 6m < 0$ будет выполнено для любого x , принадлежащего интервалу $(0; 2)$.

Решени е.

По условию интервал $(0; 2)$ должен содержаться во множестве решений неравенства $x^2 + 2(m - 3)x + m^2 - 6m < 0$ (2).

Так как множество решений неравенства (2) интервал $(x_1; x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного трехчлена, то задачу можно сформулировать следующим образом: При каких m выполняется соотношение $x_1 \leq 0 < 2 \leq x_2$?

На основании утверждения **h (слайд 7)** значение m находим из системы неравенств

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m \leq 0 \\ 4 + 2(m - 3) + m^2 - 6m \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \in [0; 6] \\ m \in [-2; 4] \end{cases}, \text{откуда } m \in [0; 4]. \end{aligned}$$

Литература.

- 1. Локоть В.В. Задачи с параметрами. –М.: Аркти, 2003**
- 2. Под редакцией Лысенко Ф.Ф., Кулабухова С.Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013. Ростов на Дону: Легион, 2012**
- 3. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Эффективная подготовка к ЕГЭ. - М.: Экзамен, 2008**

