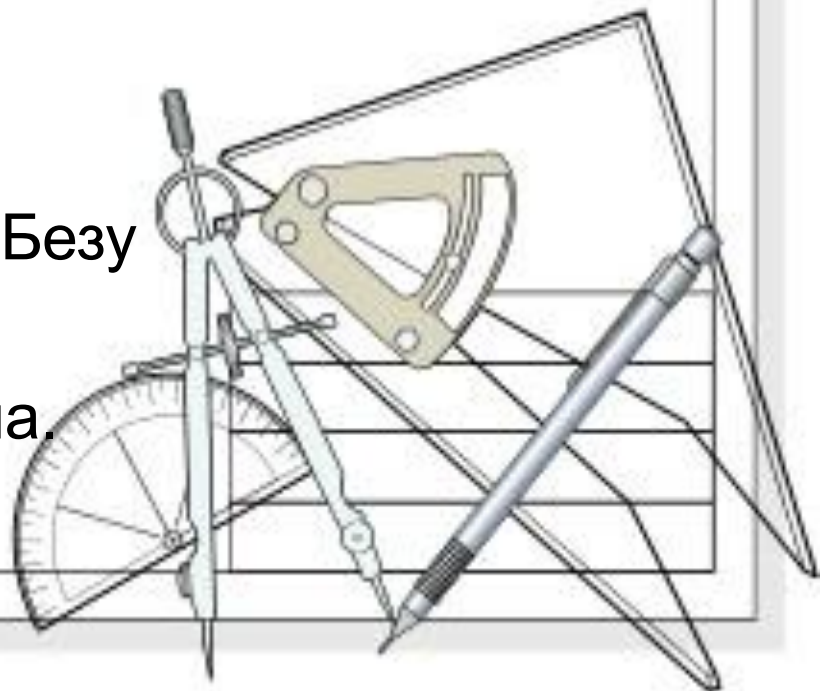


Многочлены.
Решение олимпиадных задач
по теме «Многочлены»



Теория

- 1) Понятие многочлена. Многочлен n -ой степени.
- 2) Разложения многочлена на множители.
- 3) Схема Горнера
- 4) Умножения многочленов
- 5) Деление многочленов
- 6) Алгоритм Евклида
- 7) Основная теорема Алгебры.
- 8) Корни многочлена. Теорема Безу
- 9) Следствие из Теоремы Безу
- 10) Теорема о корнях многочлена.



Многочлен $ax + b$, где $a \neq 0$, a, b – числа, x – переменная, называется многочленом **первой степени**.

Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, a, b, c – числа, x – переменная, называется многочленом **второй степени** (квадратным трёхчленом, квадратичной функцией).

Многочлен $ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a \neq 0$, a, b, c, d – числа, x – переменная, называется многочленом **третьей степени**.

Многочлен: $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_n \neq 0$, $a_k = 0, 1, 2, \dots, n$ – числа, x – переменная, называется **многочленом n -ной степени**.

a_n – старший коэффициент, a_0 – свободный член.

Действительное число a называется корнем многочлена $P_n(x)$, если $P_n(a) = 0$.

Число α -к-кратный корень многочлена $f(x)$, если $f(x) = (x - \alpha)^k \varphi(x)$, $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Необходимые теоретические выдержки для разложения многочлена на множители.

Теорема. Любой многочлен степени n вида $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$, представляется произведением постоянного множителя при старшей степени a_n и n линейных множителей $(x - x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то есть $P_n(x) = a_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$, причём x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ являются корнями многочлена.

Схема Горнера.

Если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$, $g(x)=x-c$,
то при делении $f(x)$ на $g(x)$ частное $q(x)$ имеет вид
 $g(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\dots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, где $b_0=0$, $b_k=cb_{k-1}$
 $+a_k$, $k=1,2,\dots,n-1$. Остаток r находится по формуле
 $r=cb_{n-1}+a_n$

Умножение многочленов.

$$P_n(x)Q_m(x)$$

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ два многочлена степени n и m соответственно.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0,$$

Предположим, что $n \geq m$.

$$\begin{aligned} P_n(x)Q_m(x) &= (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) = \\ &= a_n x^n (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) + a_{n-1} x^{n-1} (b_m x^m + \\ &+ b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0) + \dots + a_0 (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0). \end{aligned}$$

Деление многочленов.

$$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2, \quad g(x) = x^3 - 2x + 7.$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 + x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 10x - 2 & x^3 - 2x + 7 \\ \underline{2x^5} & \underline{2x^2 + x - 1 = q(x)} \\ x^4 - x^3 - 2x^2 + 10x - 2 & \\ - x^4 & - 2x^2 + 7x \\ \hline - x^3 & + 3x - 2 \\ - x^3 & + 2x - 7 \\ \hline & x + 5 = r(x) \end{array}$$

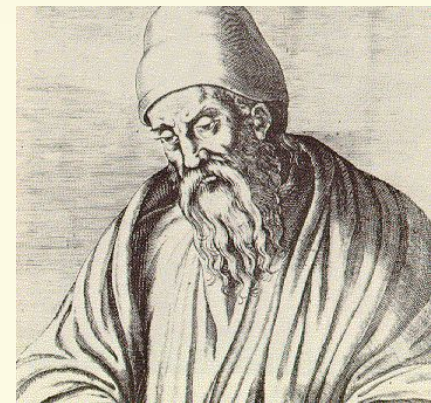
Делитель многочлена $f(x)$ - многочлен $g(x)$, такой, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.

Историческая справка. Алгоритм Евклида.

Древнегреческие математики называли этот алгоритм «взаимное вычитание». Этот алгоритм не был открыт **Евклидом**, так как упоминание о нём имеется уже в Топике

Аристотеля. В «Началах **Евклида**» он описан дважды — в VII книге для нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел и в X книге для нахождения наибольшей общей меры двух однородных величин. В обоих случаях дано геометрическое описание алгоритма, для нахождения «общей меры» двух отрезков.

Историками математики было выдвинуто предположение, что именно с помощью алгоритма **Евклида** (процедуры последовательного взаимного вычитания) в древнегреческой математике впервые было открыто существование несоизмеримых величин (стороны и диагонали квадрата, или стороны и диагонали правильного пятиугольника). Впрочем, это предположение не имеет достаточных документальных подтверждений.



Евклид



Аристотель

Алгоритм Евклида (алгоритм последовательного деления) нахождения наибольшего общего делителя многочленов $f(x)$ и $g(x)$

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x),$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x),$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x),$$

.....

$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x),$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x),$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)q_{k+1}(x).$$

Тогда $r_k(x)$ - наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$.

Основная теорема алгебры.

Всякий многочлен степени n имеет по крайней мере один корень (комплексный или действительный).

Теорема Безу. Корни многочлена.

При делении $P(x)$ на $(x-\alpha)$ в остатке может получиться лишь некоторое число r (если $r=0$, то деление выполняется без остатка). Так как степень двучлена $(x-\alpha)$ равна 1, то степень остатка должна быть меньше 1. $P(x) = (x-\alpha) Q(x) + r$ (1)

Чтобы найти значение r , положим в тождестве (1) $x = \alpha$. При этом двучлен $x-\alpha$ обращается в нуль, получаем, что $P(\alpha) = r$.

Следствие из теоремы Безу.

Если число α является корнем многочлена $P(x)$, то этот многочлен делится на $x-\alpha$ без остатка.

По теореме Безу остаток от деления $P(x)$ на $x-\alpha$ равен $P(\alpha)$, а по условию $P(\alpha)=0$. Отсюда видно, что задача решения уравнения $P(x)=0$ равносильна задаче выделения делителей многочлена P , имеющих первую степень (линейных делителей).

Если многочлен $P(x)$ имеет попарно различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то он делится без остатка на произведение $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$

Проведём доказательство с помощью математической индукции по числу корней. При $n=1$ утверждение доказано в следствии из Теоремы Безу. Пусть оно уже доказано для случая, когда число корней равно k , и пусть $P(x)$ имеет $k+1$ попарно различных корней: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$. По предположению индукции многочлен делится на произведении $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k)$: $P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) Q(x)$. При этом α_{k+1} - корень многочлена $P(x)$, т.е. $P(\alpha_{k+1}) = 0$. Значит, подставляя α_{k+1} вместо x , получаем верное равенство. $P(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1) \dots (\alpha_{k+1} - \alpha_k) Q(\alpha_{k+1}) = 0$. Но α_{k+1} по условию отлично от чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, и $\Rightarrow$ ни одно из чисел $\alpha_{k+1} - \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} - \alpha_k \neq 0$. Значит $Q(\alpha_{k+1}) = 0$, т.е. α_{k+1} - корень многочлена $Q(x)$. По следствию из Теоремы Безу $Q(x)$ делится на $x - \alpha_{k+1}$ без остатка, $Q(x) = (x - \alpha_{k+1}) Q_1(x)$, и поэтому $P(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) Q(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_k) (x - \alpha_{k+1}) Q_1(x)$. Это и значит, что $P(x)$ делится на $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{k+1})$. Итак, доказано, что теорема верна при $k=1$, а из ее справедливости при $n=k$ вытекает, что она верна и при $n=k+1$. теорема верна при любом случае корней.

Задачи

- 1) Задача №1 (на нахождение корней)
- 2) Задача №2
- 3) Задача №3 (нахождение корней 3хчлена)
- 4) Задача №4
- 5) Задача №5 (нахождение параметра)
- 6) Задача №6
- 7) Задача №7
- 8) Задача №8 (нахождение неизвестных по условию на корни и одно из неизвестных)



Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d , для которых числа $a^2+2cd+b^2$ и $c^2+2ab+d^2$ являются полными квадратами.

Предположим, что $ab=cd$. Тогда
 $a^2+2cd+b^2=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,
 $c^2+2ab+d^2=c^2+2cd+d^2=(c+d)^2$. Таким образом,
достаточно найти четыре различных натуральных
числа a, b, c и d , для которых $ab=cd$. Для этого
найдем число n , разлагающееся в произведение
двух множителей различными способами.
Например, таким числом является $n=6$; в этом
случае можно взять $a=1, b=6, c=2, d=3$.

Ответ: 1,2,3,6

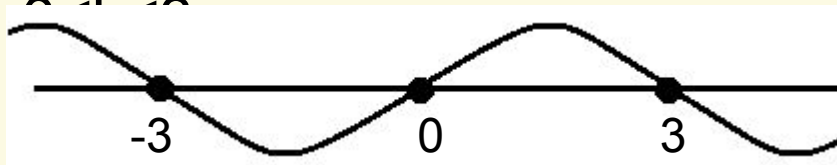
Найти все целые неотрицательные значения n и k , удовлетворяющие уравнению $5n^4 + k^5 = 81k$

$$5n^4 + k^5 = 81k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0, n \geq 0. *$$

$$5n^4 = 81k - k^5$$

$$5n^4 = k(3-k)(3+k)(9+k^2)$$

$$\text{Т.к. } 5n^4 \geq 0, \text{ то } k(3-k)(3+k)(9+k^2) \geq 0$$



$$0 \leq k \leq 3$$

Если $k=0$, $5n^4=0$, $n=0$.

Если $k=1$, $5n^4=80$, $n^4=16$, $n=2$; $n=-2$ (не удовл. условию*)

Если $k=2$, $5n^4=162-32$, $5n^4=130$, $n^4=26$ $\emptyset$

Если $k=3$, $5n^4=0$, $n=0$. Ответ: $k=0, n=0$; $k=1, n=2$; $k=3, n=3$.

Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px=q$ имеет 2 различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение при $x=11$ являются простыми числами. Найти корни трёхчлена.

Пусть x_1 и x_2 - корни многочлена, $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)$

а) пусть $x_1=2$ -простой корень

$f(11)=(11-x_1)(11-x_2)$ -простой по условию(противоречие)

$f(11)=g(11-x_2)$ - составное

б) пусть x_1 -нечётное

$f(11)=(11-x_1)(11-x_2)$ -простое, $(11-x_1)(11-x_2)=2$

$$\begin{cases} 11-x_1=1 \\ 11-x_2=2 \\ x_1=10 \\ x_2=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11-x_1=-1 \\ 11-x_2=-2 \\ x_1=12 \\ x_2=13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11-x_1=2 \\ 11-x_2=1 \\ x_1=9 \\ x_2=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11-x_1=-2 \\ 11-x_2=-1 \\ x_1=13 \\ x_2=12 \end{cases}$$

Ответ: $x_1=13, x_2=12$.

Найдите целые числа x и y , удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$.

Знаки x и y можно выбирать произвольно, поэтому будем искать только неотрицательные решения.

Ясно, что x - нечётное число, $x = 2t + 1$. Перепишем уравнение в виде

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 2t(2t + 2)(4t^2 + 4t + 2) = 2y^2.$$

Теперь видно, что y - чётное число, $y = 2u$. Получаем уравнение на неотрицательные t, u :

$$2) \quad t(t + 1)(2t(t + 1) + 1) = u^2.$$

Числа $t, t + 1$ и $2t(t + 1) + 1$ попарно взаимно просты, а их произведение - полный квадрат. Значит, каждое из них также является полным квадратом. Это возможно только при $t = 0$ (единственная пара последовательных полных квадратов - это 0 и 1). Тогда и $u = 0$. Значит, $x = \pm 1, y = 0$.

Ответ: $x = 1, y = 0$ или $x = -1, y = 0$.

Найдите все значения параметра a ,
при каждом из которых все корни уравнения
 $3ax^2(3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a - 4) = 0$
удовлетворяют неравенству $x |x| \leq 1$.

1) Пусть $3a = 0$, т.е. $a = 0$, тогда
получаем линейное уравнение $-x = 0$, которое
имеет единственный корень $x = 0$, причем
 $0 \in [-1; 1]$. Значение $a = 0$ удовлетворяет
условию задачи.

2) При $a \neq 0$ получаем квадратное уравнение,
дискриминант которого равен

$$D = (3a^3 - 12a^2 - 1)^2 + 12a^2(a - 4) = (3t - 1)^2 - 12t = (3t - 1)^2, \text{ где } t = a^3 - 4a^2.$$

а) Тогда найдём корни

$$x = \frac{-(3t - 1) - (3t + 1)}{6a} = \frac{-t}{a} = 4a - a^2,$$

$$x = \frac{-(3t - 1) + (3t + 1)}{6a} = \frac{1}{3a}$$

б) Теперь поставим условия
для корней

$$\begin{cases} -1 \leq 4a - a^2 \leq 1 \\ -1 \leq \frac{1}{3a} \leq 1 \end{cases}$$

Решим систему

Ответ $\{0\} \cup [2 + \sqrt{3}; 2 + \sqrt{5}]$

Существуют ли рациональные числа x, y, u, v , которые удовлетворяют уравнению $(x+y\sqrt{2})^6+(u-v\sqrt{2})^6=7+5\sqrt{2}$?

$$(x+y\sqrt{2})^6=x^6+6x^5(y\sqrt{2})+15x^4(y\sqrt{2})^2+20x^3(y\sqrt{2})^3+15x^2(y\sqrt{2})^4+6x(y\sqrt{2})^5+(y\sqrt{2})^6=A+B\sqrt{2}.$$

$$(u-v\sqrt{2})^6=u^6-6u^5(v\sqrt{2})+15u^4(v\sqrt{2})^2-20u^3(v\sqrt{2})^3+15u^2(v\sqrt{2})^4-6u(v\sqrt{2})^5+(v\sqrt{2})^6=A-B\sqrt{2}, \text{ то выполняется}$$

$$(x-y\sqrt{2})^6+(u-v\sqrt{2})^6=7-5\sqrt{2}$$

Но $7-5\sqrt{2}<0$, а левая часть положительна.

Противоречие. Следовательно, исходного равенства быть не может.

Ответ: таких чисел нет.

При каких целых n число $n^2 - 7n + 10$ простое?

Разложим многочлен $x^2 - 7x + 10$ на множители: $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$. Отсюда при любом целом n число $n^2 - 7n + 10$ делится на $n - 5$ и на $n - 2$.

Оно может быть простым только в том случае, если одно из чисел $n - 5$ и $n - 2$ равно 1 или -1, а другое – простое:

если $n - 5 = 1$, то $n = 6$, $n - 2 = 4$, $n^2 - 7n + 10 = 4$ – составное;

если $n - 5 = -1$, то $n = 4$, $n - 2 = 2$, $n^2 - 7n + 10 = -2$ – простое;

если $n - 2 = 1$, то $n = 3$, $n - 5 = -2$, $n^2 - 7n + 10 = -2$ – простое;

если $n - 2 = -1$, то $n = 1$, $n - 5 = -4$, $n^2 - 7n + 10 = 4$ – составное.

Ответ: при $n = 3$ и $n = 4$.

Даны три уравнения с действительными коэффициентами. 1) $x^2-(a+b)x+8=0$; 2) $x^2-x(b+1)+c=0$; 3) $x^4-b(b+1)x^2+c=0$. Каждое из них имеет по крайней мере один действительный корень. Корни 1го уравнения больше единицы. Также, корни 1го уравнения являются корнями 3го и хотя бы один корень 1го уравнения удовлетворяет 2ому уравнению. Найти числа a, b, c , если известно, что $b > 3$.

Обозначим корни первого уравнения x_1 и x_2 . Причем пусть за x_1 обозначен тот, который является корнем уравнения 2.

Заметим, что если x_1 является корнем уравнения 3, то и $-x_1$ является корнем уравнения 3. $-x_1$ не может равняться x_2 , поскольку x_1 и x_2 положительны. Значит, у уравнения 3 мы нашли уже 4 корня: x_1 , $-x_1$, x_2 и $-x_2$. У многочлена 4 степени больше корней и не может быть.

Заметим, что x_1 - корень уравнения 2. А значит, он является квадратом двух из корней уравнения 3. Поэтому $x_1 = x_1^2$ либо $x_1 = x_2^2$. Из первого уравнения следует, что $x_1 = 0$ или 1. Но этого быть не может, т.к. x_1 больше 1. Значит, $x_1 = x_2^2$.

Из теоремы Виета для первого уравнения следует, что $x_1 x_2 = 8$. Поэтому $x_2^3 = 8$. Откуда получаем, что $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

Отсюда понятно, что $a+b=6$.

Корни уравнения 3 - это ± 2 и ± 4 . Поэтому корни уравнения 2 это 4 и 16. Поэтому $c=64$; а $b(b+1)=20$. Получаем $b=4$ или $b=-5$ (не подходит, так как $b > 3$).

Ответ: $a=2; b=4; c=64$.