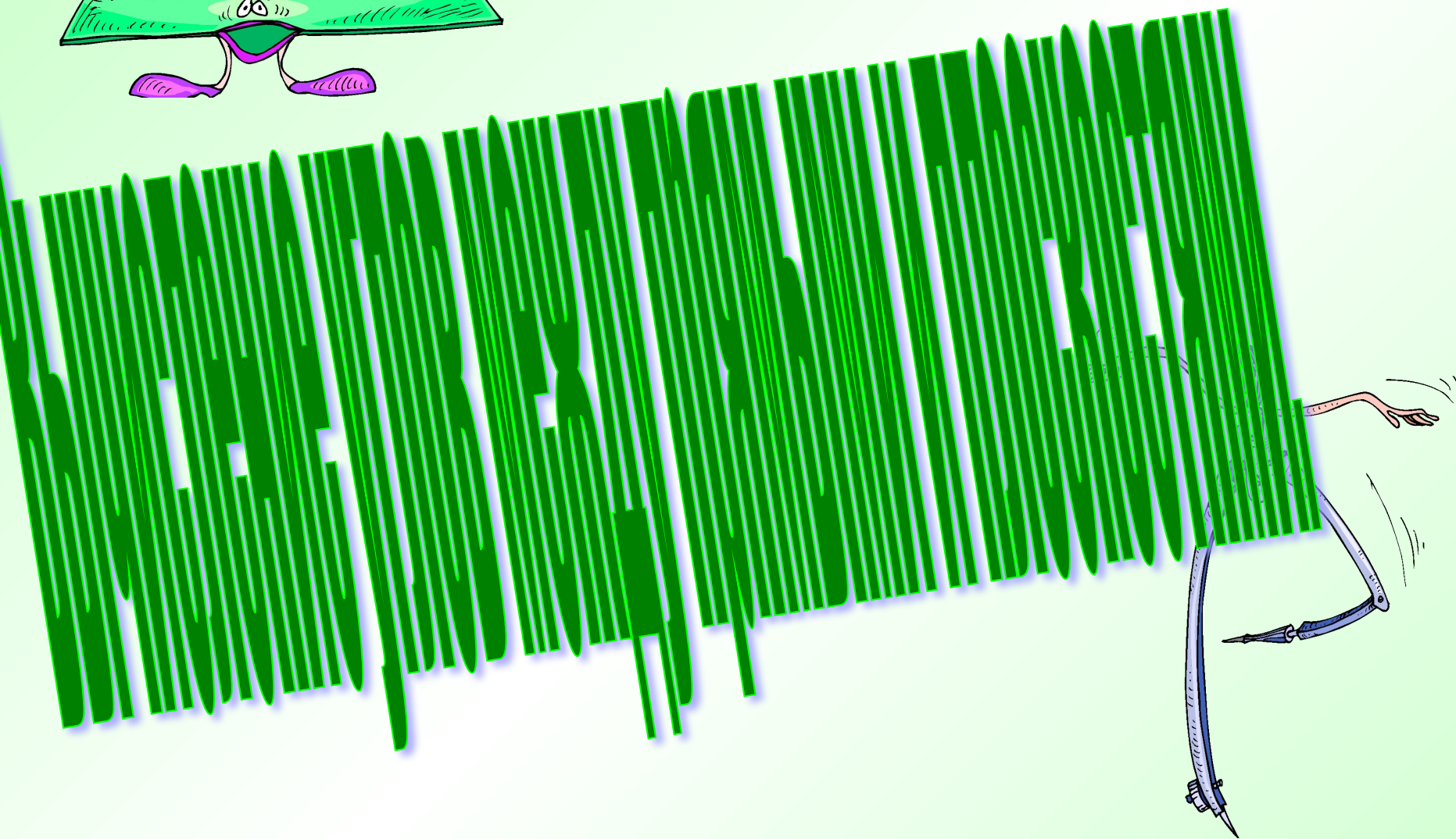
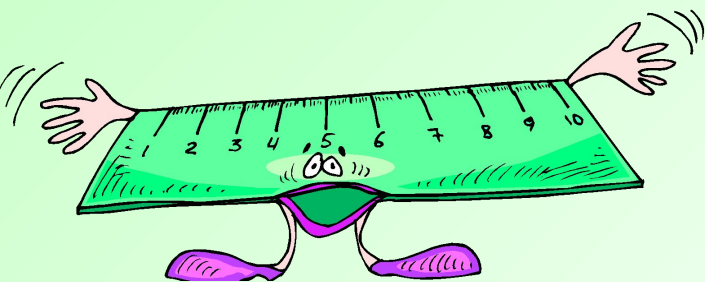
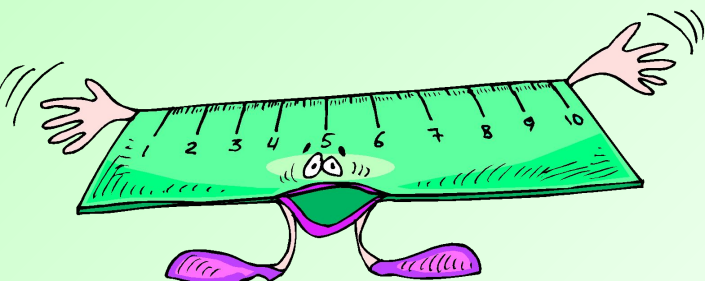


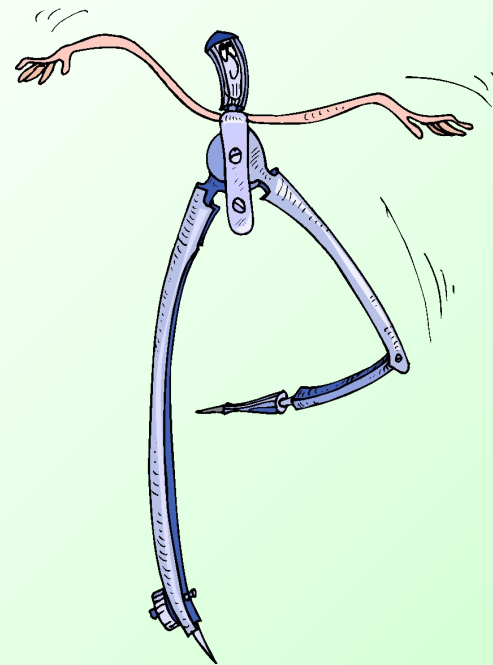


11 класс.



## Цели урока:

**Показать, как используется  
скалярное произведение  
векторов при решении задач  
на вычисление углов между  
двумя прямыми, между  
прямой и плоскостью.**



# Повторяем теорию:

- *Как находят координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?*

$$\overrightarrow{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$$

- *Как находят координаты середины отрезка?*

$$\frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{z_A + z_B}{2}$$

- *Как находят длину вектора?*

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- *Как находят расстояние между точками?*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- *Как вы понимаете выражение «угол между векторами»?*

# Повторяем теорию:

- *Какие векторы называются перпендикулярными?*
- *Что называется скалярным произведением векторов?*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

- *Чему равно скалярное произведение перпендикулярных векторов?*

**0**

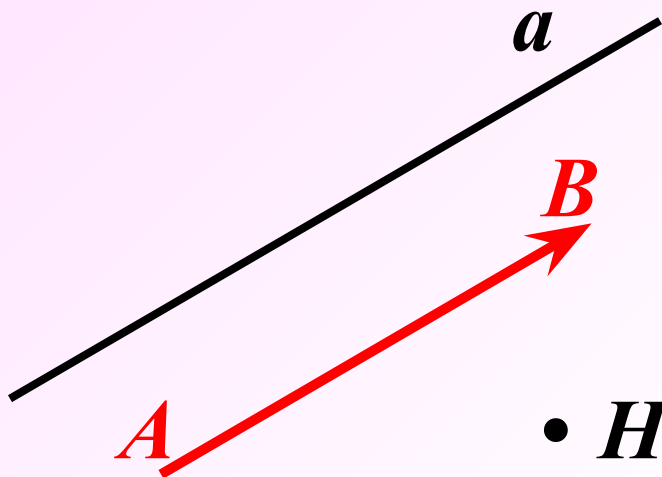
- *Чему равен скалярный квадрат вектора?*

**Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.**

- *Свойства скалярного произведения?*

$$\begin{aligned} \vec{a}^2 &\geq 0 & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} & k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (k \vec{a}) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

# Направляющий вектор прямой.



- *Ненулевой вектор называется **направляющим вектором** прямой, если он лежит на самой прямой, либо на прямой, параллельной ей.*

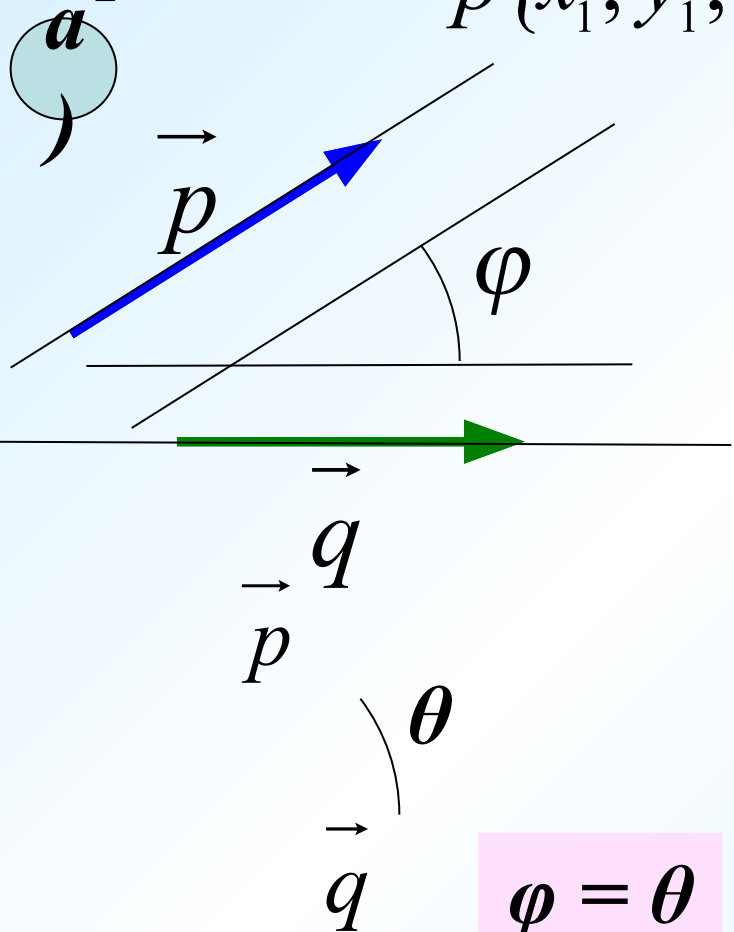


# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

**№1. Найти угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися), если известны координаты направляющих векторов этих прямых.**

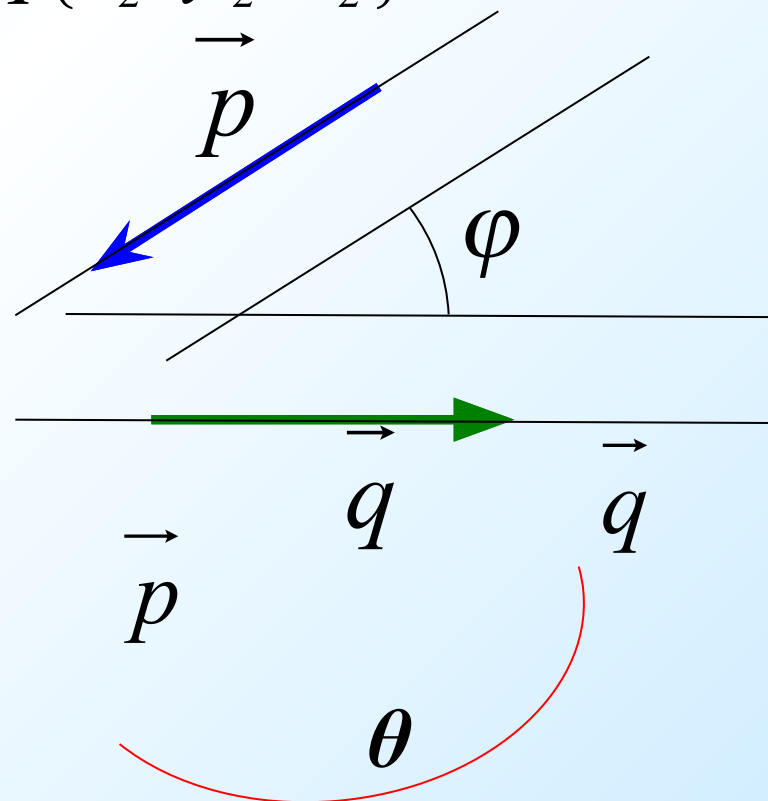
$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

$$\vec{q}\{x_2; y_2; z_2\}$$



$$\varphi = \theta$$

**б)**



$$\varphi = 180^\circ - \theta$$

# Визуальный разбор задач из учебника (п.48).

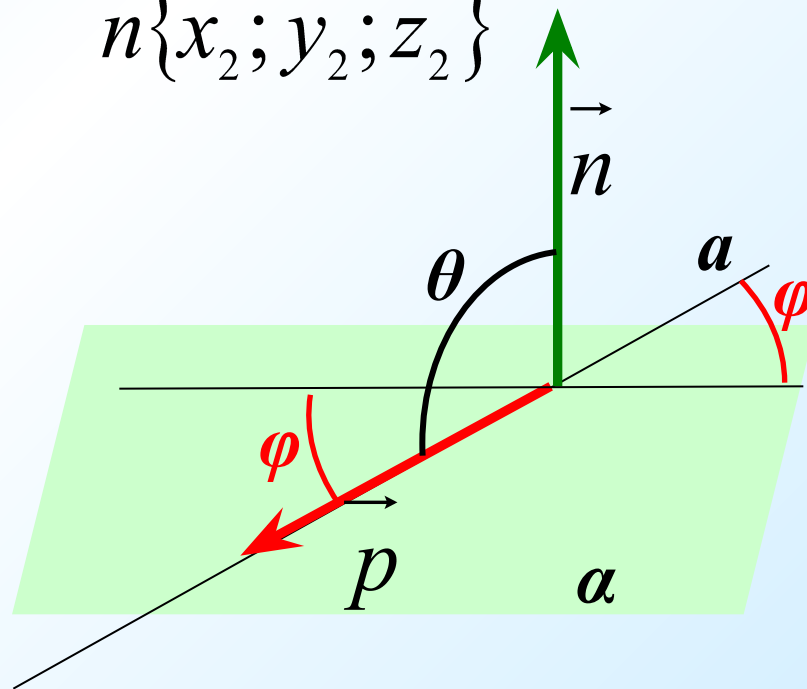
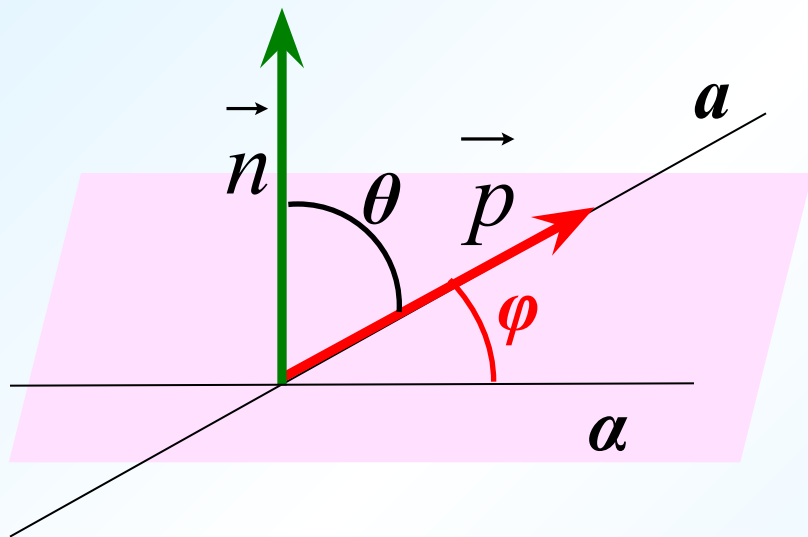
**№2. Найти угол между прямой и плоскостью, если известны координаты направляющего вектора прямой и координаты ненулевого вектора, перпендикулярного к плоскости..**

**а)**

$$\vec{p}\{x_1; y_1; z_1\}$$

**б)**

$$\vec{n}\{x_2; y_2; z_2\}$$



## № 464 (а)

**Дано:**  $A(3;-2;4)$   $B(4;-1;2)$   $C(6;-3;2)$   $D(7;-3;1)$

**Найти:** угол между прямыми  $AB$  и  $CD$ .

***Ваши предложения...***

***1. Найдем координаты векторов***

$\overrightarrow{AB} \{1;1;-2\}$  ***и***  $\overrightarrow{CD} \{1;0;-1\}$

***2. Воспользуемся формулой:***

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\varphi = 30^\circ$$



## № 466 (а)

*Дано: куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$*

*точка  $M$  принадлежит  $AA_1$*

*$AM : MA_1 = 3 : 1$ ;  $N$  – середина  $BC$*

*Вычислить косинус угла между прям.  $MN$  и  $DD_1$*

*1. Введем систему координат.*

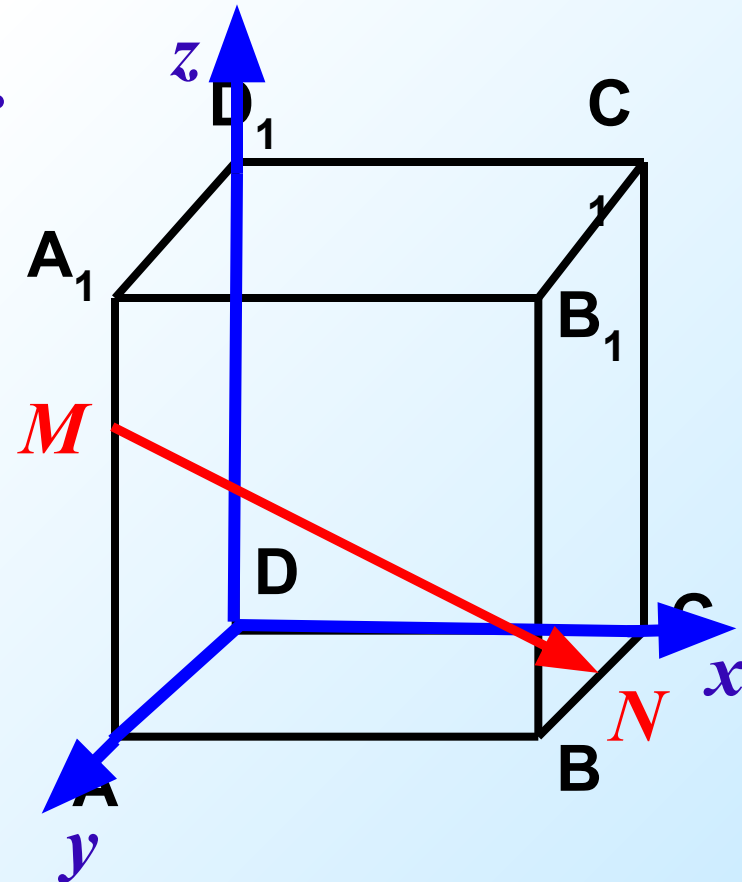
*2. Рассмотрим  $DD_1$  и  $MN$ .*

*3. Пусть  $AA_1 = 4$ , тогда*

$$M(0;4;3) \quad N(4;2;0)$$

*4. Найдем координаты векторов  $DD_1$  и  $MN$ .*

*5. По формуле найдем  $\cos \varphi$ .*



**Ответ:**  $\frac{3}{\sqrt{29}}$

## Задача.

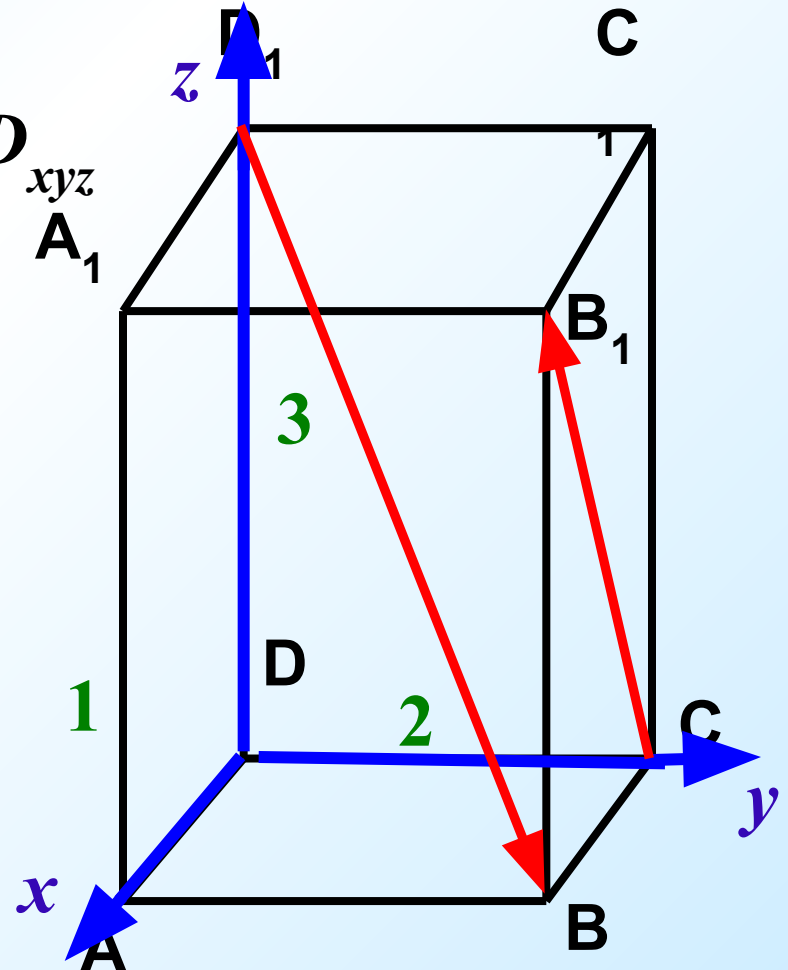
Дано: прямоугольный параллелепипед  
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ;  $DA = 2$ ;  $DC = 2$ ;  $DD_1 = 3$ .  
Найти угол между прямыми  $CB_1$  и  $D_1B$ .

### Ваши предложения...

1. Введем систему координат  $D_{xyz}$
2. Рассмотрим направляющие  
прямых  $D_1B$  и  $CB_1$ .  
 $\overrightarrow{CB_1} \{1; 0; 3\}$      $\overrightarrow{D_1B} \{1; 2; -3\}$
3. По формуле найдем  $\cos \varphi$ .

$$\cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{35}}$$

$$\varphi \approx 47^\circ 28'$$



**Дано: прямоугольный параллелепипед**

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

**Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .**

**1 способ:**

**1. Введем систему координат  $B_{xyz}$**

**2. Пусть  $AA_1 = 2$ , тогда**

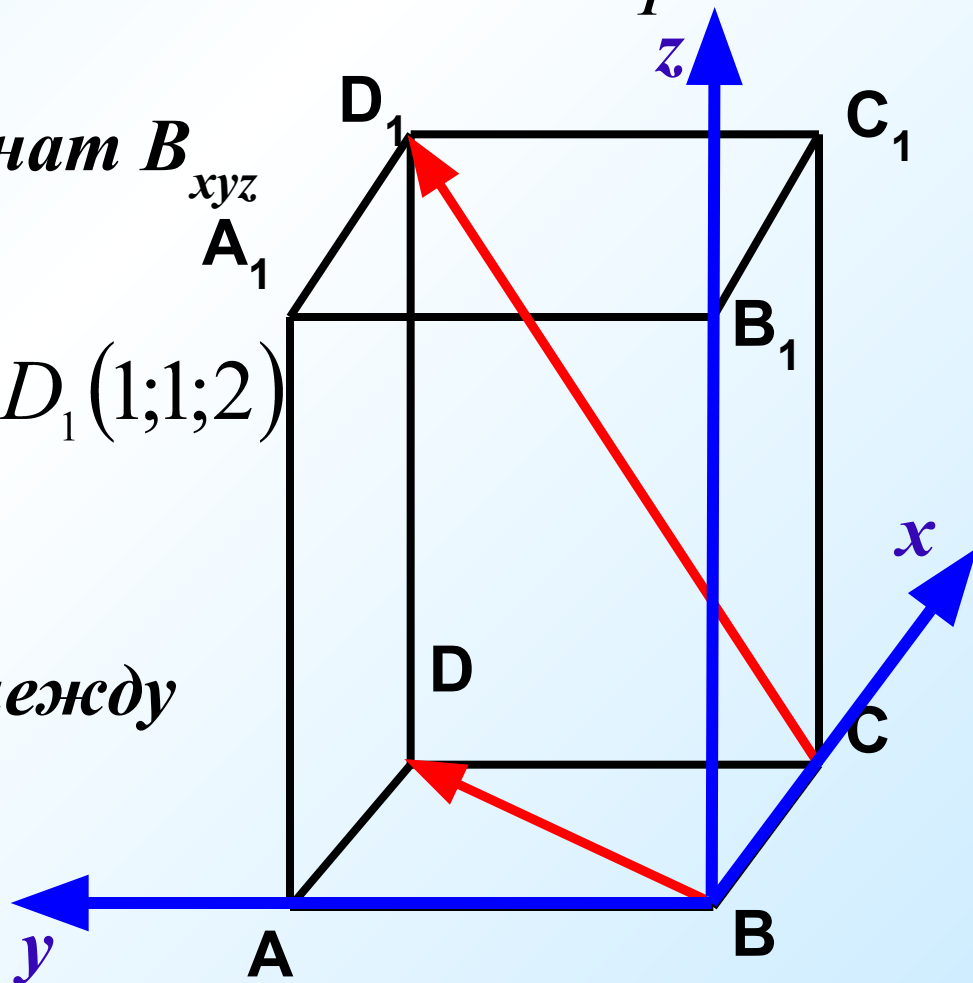
$$AB = BC = 1.$$
$$B(0;0;0) \quad C(1;0;0) \quad D(1;1;0) \quad D_1(1;1;2)$$

**3. Координаты векторов:**

$$\overrightarrow{BD} \{1;1;0\} \quad \overrightarrow{CD_1} \{0;1;2\}$$

**4. Находим косинус угла между  
прямыми:**

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



**Дано: прямоугольный параллелепипед**

$$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1; AB = BC = \frac{1}{2} AA_1$$

**Найти угол между прямыми  $BD$  и  $CD_1$ .**

**2 способ:**

1. Т.к.  $CD_1 \parallel BA_1$ , то углы между  $BD$  и  $BA_1$ ;  $BD$  и  $CD_1$  – равны.

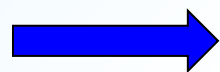
2. В  $\triangle BDA_1$ :  $BA_1 = \sqrt{5}$ ,  $A_1D = \sqrt{5}$

3.  $\triangle BDA$ : по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} \quad BD = \sqrt{2}$$

4. По теореме косинусов:

$$A_1D^2 = A_1B^2 + BD^2 - 2A_1B \cdot BD \cdot \cos \varphi$$



$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

