

11 класс

Виды показательных уравнений

Шарабарина Галина Гавриловна, учитель математики
МБОУ « Солоновская средняя общеобразовательная школа имени
Матренина А.П.»Алтайский край , Смоленский район

Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное (х) входит **только в показатели степени** при некоторых постоянных основаниях.

Для показательных уравнений выполнено следующее утверждение:

Уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$, $a \neq 1$) и $f(x) = g(x)$ эквивалентны.

Это утверждение используется при решении простейших уравнений.

I. Простейшие уравнения

Пример 1

$$5^{x-2} = 3$$

$$5^{x-2} = 5^{\log_5 3}$$

$$x-2 = \log_3 5$$

$$x = 2 + \log_3 5$$

Пример 2

$$3^{x+2} = 3$$

$$x+2=1$$

$$x = -1$$

$$\text{Ответ } x = -1$$

Прийти к простейшим уравнениям можно путем тождественным преобразованиям.

Пример 3

$$0,5^{3x-1} = 16^{-2}$$

$$(1/2)^{3x-1} = (2^4)^{-2}$$

$$(2^{-1})^{3x-1} = 2^{-8}$$

$$2^{-3x+1} = 2^{-8}$$

$$-3x+1 = -8$$

$$-3x = -9$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$

Пример 4

$$\sqrt{3^{x^2-5}} * 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 225$$

$$3^{\frac{x^2-5}{2}} 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 25 * 9$$

$$3^{\frac{x^2-5}{2}} 5^{\frac{x^2-5}{2}} = 5^2 * 3^2 \quad (5 * 3)^{\frac{x^2-5}{2}} = (5 * 3)^2$$

$$15^{\frac{x^2-5}{2}} = 15^2 \quad \frac{x^2-5}{2} = 2$$

$$x^2 - 5 = 4$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Ответ: $x = \pm 3$

II. Уравнения, решаемые способом замены переменных

Пример 5

$$9^{x^2} - 4 * 3^{x^2} + 3 = 0$$

$$3^{2x^2} - 4 * 3^{x^2} + 3 = 0$$

Пусть $3^{x^2} = t, t > 0$ тогда $t^2 - 4t + 3 = 0$ $t_1 = 1, t_2 = 3$

$$3^{x^2} = 1$$

$$3^{x^2} = 3$$

$$3^{x^2} = 3^0$$

$$x^2 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$x = 0$$

Ответ $x = 0, x = \pm 1$

Пример 6

1 способ

$$7^{x+2} - \frac{1}{7} 7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$$

$$7^x 7^2 - \frac{1}{7} 7^x 7 - \frac{14 * 7^x}{7} + 2 \cdot 7^x = 48$$

Пусть $7^x = t$, $t > 0$, тогда

$$49t - t - 2t + 2t = 48$$

$$48t = 48$$

$$t = 1,$$

$$7^x = 1$$

$$7^x = 7^0$$

$$x = 0$$

Ответ: $x = 0$

2 способ (более рациональный, вынесением
общего множителя)

$$7^x \left(7^2 - \frac{1}{7} 7^1 - 14 \cdot 7^{-1} + 2 \right) = 48$$

$$7^x \cdot 48 = 48$$

$$7^x = 1$$

$$7^x = 7^0$$

$$x = 0$$

Пример 7

$$2^{\sin^2 x} + 5 * 2^{\cos^2 x} = 7 \quad 2^{1-\cos^2 x} + 5 * 2^{\cos^2 x} = 7$$

$$\frac{2}{2^{\cos^2 x}} + 5 * 2^{\cos^2 x} - 7 = 0$$

$$\text{Пусть } 2^{\cos^2 x} = a \quad 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \quad 1 \leq a \leq 2$$

$$\frac{2}{a} + 5a - 7 = 0 \quad \frac{2 + 5a^2 - 7a}{a} = 0, a \neq 0$$

$$5a^2 - 7a + 2 = 0$$

$$a = 1, a = 2/5 - \text{не удовлетворяет условию } 1 \leq a \leq 2$$

$$2^{\cos^2 x} = 1$$

$$2^{\cos^2 x} = 2^{0 \cos^2 x} = 1 \quad \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 8

$$(5+2\sqrt{6})^x + (5-2\sqrt{6})^x = 10$$

Заметим $(5+2\sqrt{6})^x (5-2\sqrt{6})^x = 25 - 24 = 1,$

следовательно

$$(5-2\sqrt{6})^x = (5+2\sqrt{6})^{-1} \text{ (взаимно обратные числа)}$$

$$(5+2\sqrt{6})^x + (5+2\sqrt{6})^{-x} = 10$$

Пусть $(5+2\sqrt{6})^x = t, \quad t > 0$

$$t + 1/t = 10 \quad t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$t_1 = 5+2\sqrt{6} \quad t_2 = 5-2\sqrt{6}$$

$$(5+2\sqrt{6})^x = 5+2\sqrt{6} \quad (5+2\sqrt{6})^x = 5-2\sqrt{6}$$

$$x = 1 \quad x = -1$$

Ответ: $x = \pm 1$

III. Однородные уравнения

Пример 9

$$2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$$

$$2^{2x} \cdot 4 - 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 9 \cdot 3^{2x} = 0$$

$$\frac{2^{2x} \cdot 4}{2^{2x}} - \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} - \frac{18 \cdot 3^{2x}}{2^{2x}} = \frac{0}{2^{2x}}, \text{ т.к. } 2^{2x} > 0$$

$$4 - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0$$

Пусть $(3/2)^x = t$, $t > 0$

$$4 - t - 18t^2 = 0$$

$$-8t^2 - t + 4 = 0$$

$$D = 289$$

$t_1 = -1/2$, не удовлетворяет условию $t > 0$

$$t_2 = 4/9$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$$

$$x = -2 \quad \text{Ответ:} \quad x = -2$$

Определи к какому виду относятся
следующие показательные уравнения и
реши их

$$1) \quad 6^{x-1} = \frac{1}{\sqrt[5]{6}}$$

$$2) \quad 7 * 5^x - 5^{x+1} = 2 * 5^{-3}$$

$$3) \quad 4^{x^2+2} - 9 * 2^{x^2+2} + 8 = 0$$

$$4) \quad 8^x + 18^y = 2 * 27^y$$

$$5) \quad 3^{x-1} + 2 * 3^{-x-1} - 1 = 0$$

$$6) \quad 4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$$

$$7) \quad \left(4 + \sqrt{15}\right)^x + \left(4 - \sqrt{15}\right)^x = 8$$