

***ПРЕЗЕНТАЦИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ  
НА ТЕМУ ТРИГОНОМЕТРИЯ.***

# ТРИГОНОМЕТРИЯ

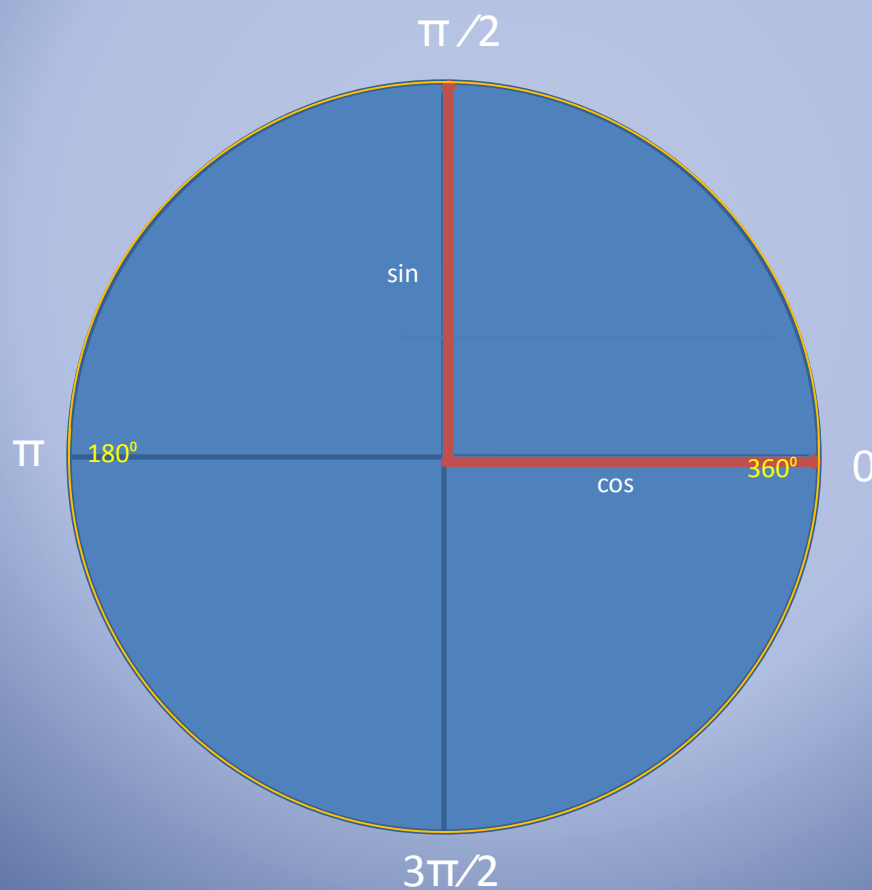
# Тригонометрия

- **тригонометрия** (от греч. *τρίγωνο* (треугольник) и греч. *μετρέιν* (измерять), то есть измерение треугольников) — раздел математики, в котором изучаются тригонометрические функции и их приложения к геометрии. Данный термин впервые появился в 1595 г. как название книги немецкого математика Бартоломеуса Питискуса (Bartholomäus Pitiscus, 1561—1613), а сама наука ещё в глубокой древности использовалась для расчётов в астрономии, геодезии и архитектуре.

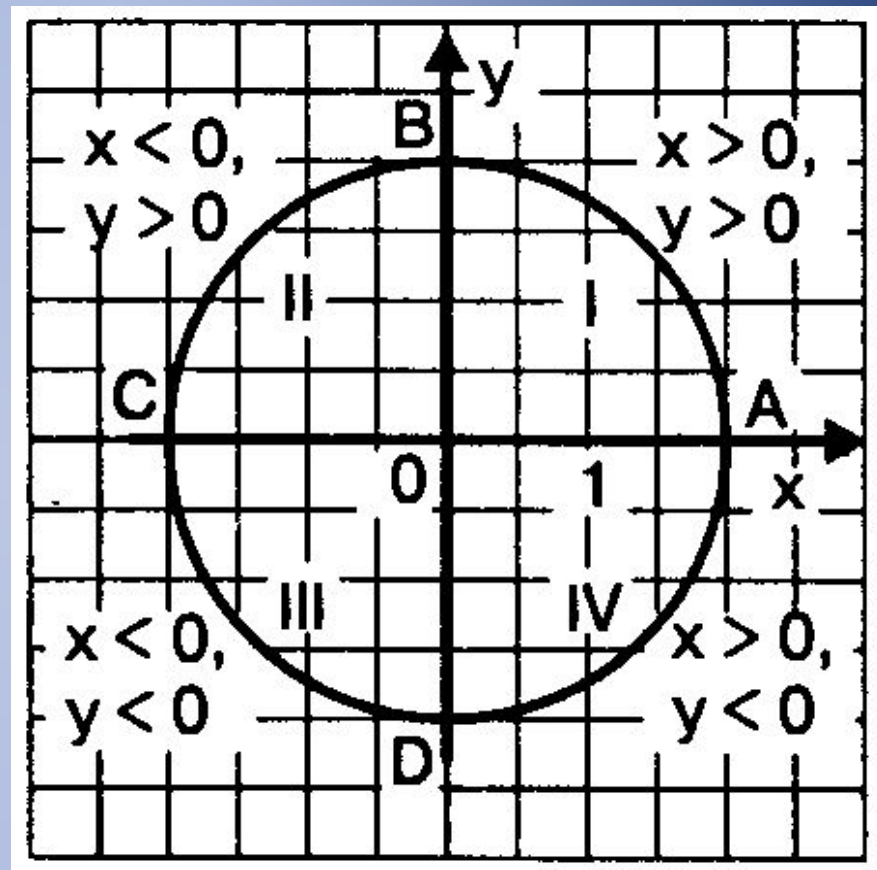
# Применение тригонометрии

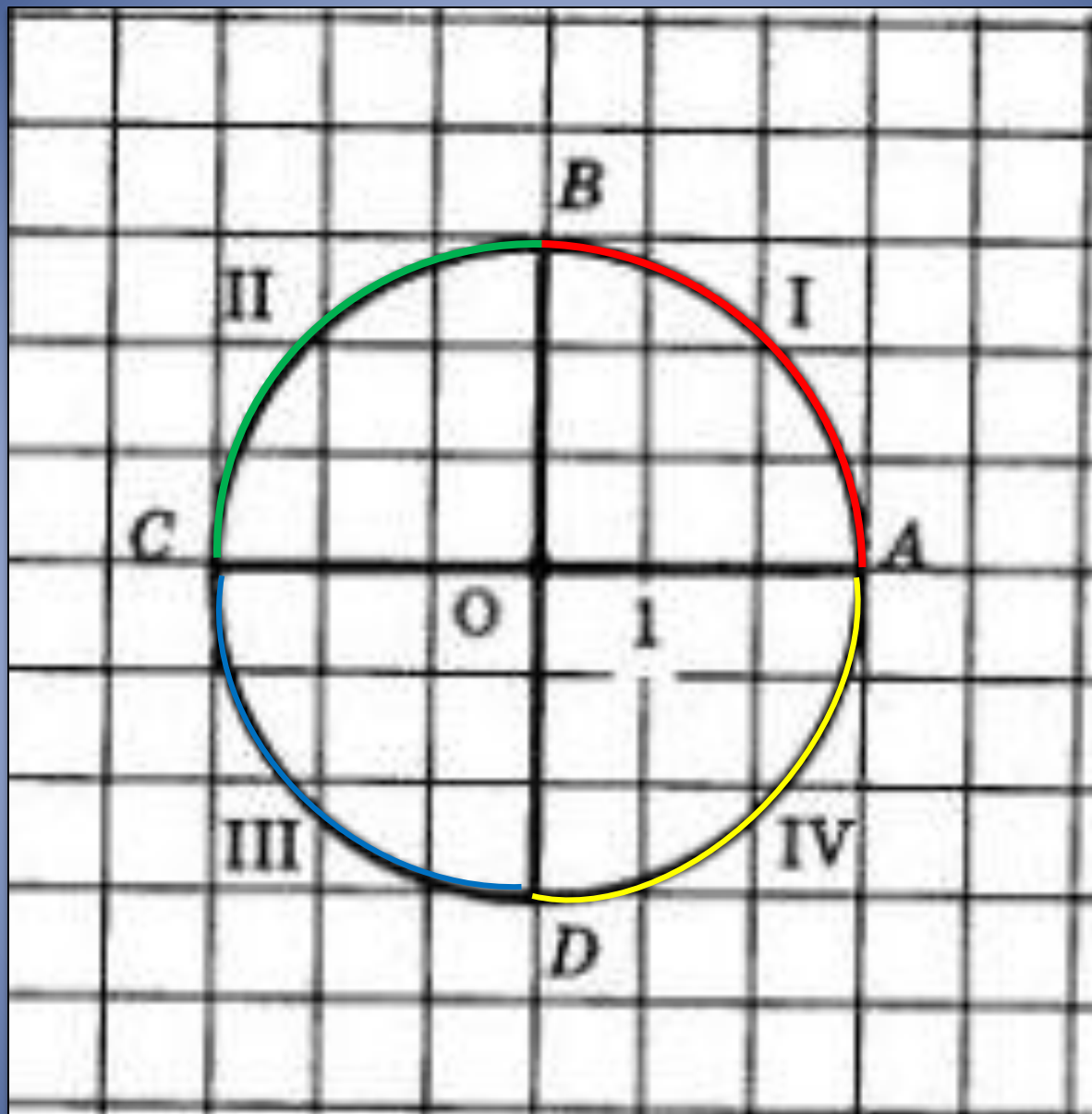
- Тригонометрические вычисления применяются практически во всех областях геометрии, физики и инженерного дела. Большое значение имеет техника триангуляции, позволяющая измерять расстояния до недалёких звёзд в астрономии, между ориентирами в географии, контролировать системы навигации спутников. Также следует отметить применение тригонометрии в таких областях, как теория музыки, акустика, оптика, анализ финансовых рынков, электроника, теория вероятностей, статистика, биология, медицина (включая ультразвуковое исследование (УЗИ) и компьютерную томографию), фармацевтика, химия, теория чисел (и, как следствие, криптография), сейсмология, метеорология, океанология, картография, многие разделы физики, топография и геодезия, архитектура, фонетика, экономика, электронная техника, машиностроение, компьютерная графика, кристаллография.

# Числовая окружность



- Тригонометрический круг— построенная на плоскости с прямоугольными декартовыми координатами окружность, имеющая центр в точке начала координат и единичный радиус, т.е. единичная окружность, которая используется для геометрического определения тригонометрических функций. Название «тригонометрический круг» не совсем удачно, поскольку речь идёт об окружности, а не о круге; тем не менее, часто используется именно это название.





- Древнегреческие математики в своих построениях, связанных с измерением дуг круга, использовали технику хорд. Перпендикуляр к хорде, опущенный из центра окружности, делит пополам дугу и опирающуюся на неё хорду. Половина поделенной пополам хорды — это синус половинного угла, и поэтому функция синус известна также как «половина хорды». Благодаря этой зависимости, значительное число тригонометрических тождеств и теорем, известных сегодня, были также известны древнегреческим математикам, но в эквивалентной хордовой форме.

# Тригонометрические тождества

- Тригонометрические тождества — математические выражения для тригонометрических функций, которые выполняются при всех значениях аргумента

| ФОРМУЛА                                                                                     | ДОПУСТИМЫЕ<br>ЗНАЧЕНИЯ АРГУМЕНТА                      | НОМЕР |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------|
| $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$                                                         | $\forall \alpha$                                      | (1)   |
| $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$                  | $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | (2)   |
| $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$ | $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$                 | (3)   |

Поскольку синус и косинус являются соответственно ординатой и абсциссой точки, соответствующей на единичной окружности углу  $\alpha$ , то, согласно уравнению единичной окружности или теореме Пифагора, имеем:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Это соотношение называется основным тригонометрическим тождеством. Деля это уравнение на квадрат косинуса и синуса соответственно имеем далее:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$$

# Непрерывность

- Синус и косинус — непрерывные функции. Тангенс и секанс имеют точки разрыва

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots;$$

котангенс и косеканс

$$0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$$

# Чётность

- Косинус и секанс — чётные. Остальные четыре функции — нечётные, то есть:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sec(-\alpha) = \sec \alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha.$$

# Периодичность

- Функции

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x$$

- периодические с периодом  $2\pi$ , функции  $y = \operatorname{ctg} x$  и  $y = \operatorname{tg} x$
- с периодом  $\pi$ .

# ТРЕГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

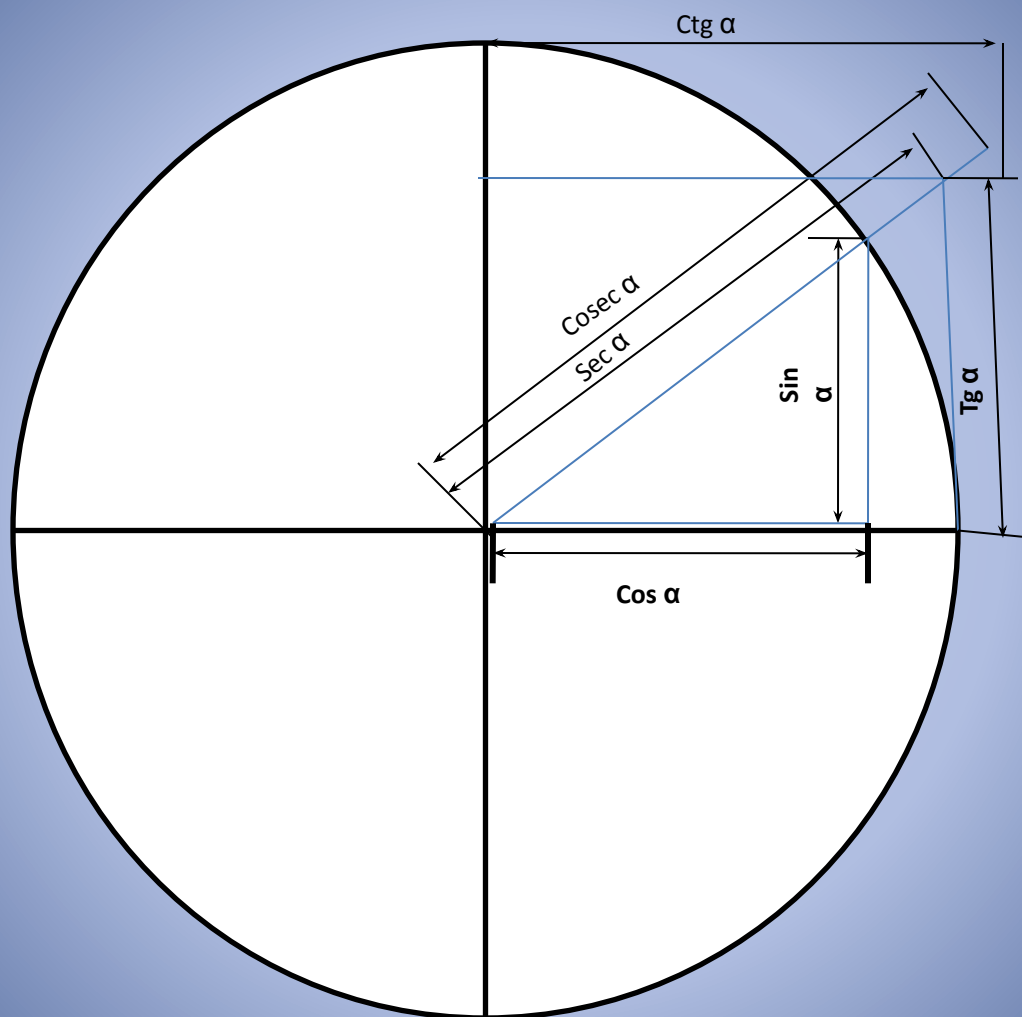
- **Тригонометрические функции** — элементарные функции, которые исторически возникли при рассмотрении прямоугольных треугольников и выражали зависимости сторон этих треугольников от острых углов при гипотенузе (или, что эквивалентно, зависимость хорд и высот от центрального угла в круге). Эти функции нашли широчайшее применение в самых разных областях науки. Впоследствии определение тригонометрических функций было расширено, их аргументом теперь может быть произвольное вещественное или даже комплексное число. Наука, изучающая свойства тригонометрических функций, называется тригонометрией.

# К тригонометрическим функциям относятся:

- во-первых, прямые тригонометрические функции
- **синус** ( $\sin x$ ),
- **косинус** ( $\cos x$ );
- 
- во-вторых, противоположные им тригонометрические функции:
- **секанс** ( $\sec x$ )
- **косеканс** ( $\operatorname{cosec} x$ );
- 
- и, в-третьих, производные тригонометрические функции:
- **тангенс** ( $\operatorname{tg} x$ ),
- **котангенс** ( $\operatorname{ctg} x$ ).

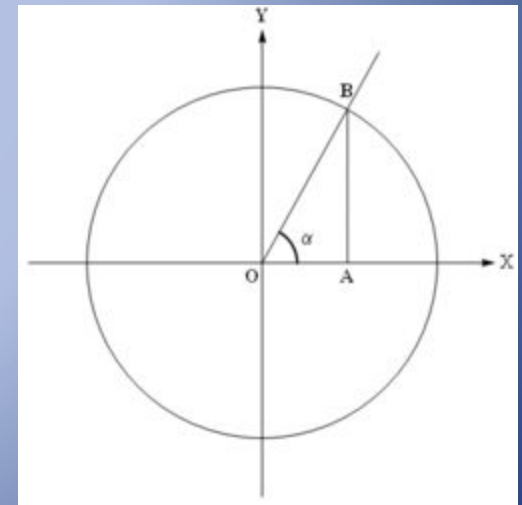
Первоначально тригонометрические функции были связаны с соотношениями сторон в прямоугольном треугольнике. Их единственным аргументом является угол (один из острых углов этого треугольника).

- Синус — отношение противолежащего катета к гипотенузе.
- Косинус — отношение прилежащего катета к гипотенузе.
- Тангенс — отношение противолежащего катета к прилежащему.
- Котангенс — отношение прилежащего катета к противолежащему.
- Секанс — отношение гипотенузы к прилежащему катету.
- Косеканс — отношение гипотенузы к противолежащему катету.



- 
- Данные определения позволяют вычислить значения функций для острых углов, то есть от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  (от 0 до радиан). В XVIII веке Леонард Эйлер дал современные, более общие определения, расширив область определения этих функций на всю числовую ось. Рассмотрим в прямоугольной системе координат окружность единичного радиуса и отложим от горизонтальной оси угол  $\theta$  (если величина угла положительна, то откладываем против часовой стрелки, иначе по часовой стрелке). Точку пересечения построенной стороны угла с окружностью обозначим А. Тогда:

- Синус угла  $\theta$  определяется как ордината точки А.
- Косинус — абсцисса точки А.
- Тангенс — отношение синуса к косинусу.
- Котангенс — отношение косинуса к синусу (то есть величина, обратная тангенсу).
- Секанс — величина, обратная косинусу.
- Косеканс — величина, обратная синусу.



- Синус и косинус вещественного аргумента являются периодическими непрерывными и неограниченно дифференцируемыми вещественнозначными функциями. Остальные четыре функции на вещественной оси также вещественнозначные, периодические и неограниченно дифференцируемые на области определения, но не непрерывные. Тангенс и секанс имеют разрывы второго рода в точках  $\pm\pi n + \pi/2$ , а котангенс и косеканс — в точках  $\pm\pi n$ .

# Определение тригонометрических функций

- Обычно тригонометрические функции определяются геометрически. Пусть нам дана декартова система координат на плоскости, и построена окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат  $O$ . Измерим углы как повороты от положительного направления оси абсцисс до луча  $OB$ . Направление против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке отрицательным. Абсциссу точки  $B$  обозначим  $x_B$ , ординату обозначим  $y_B$

Синусом называется отношение  $\sin \alpha = \frac{y_B}{R}$ .

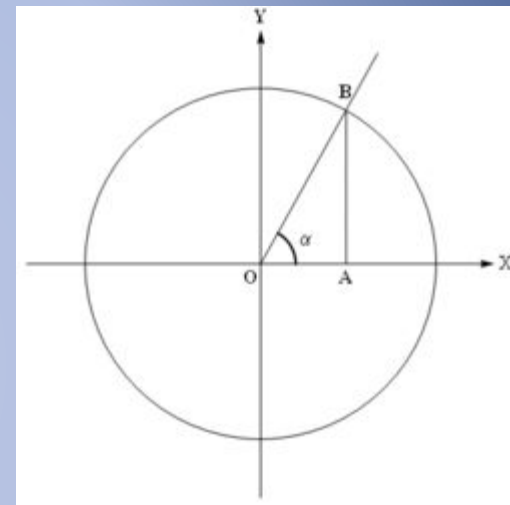
Косинусом называется отношение  $\cos \alpha = \frac{x_B}{R}$ .

Тангенс определяется как  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_B}{x_B}$ .

Котангенс определяется как  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_B}{y_B}$ .

Секанс определяется как  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{R}{x_B}$ .

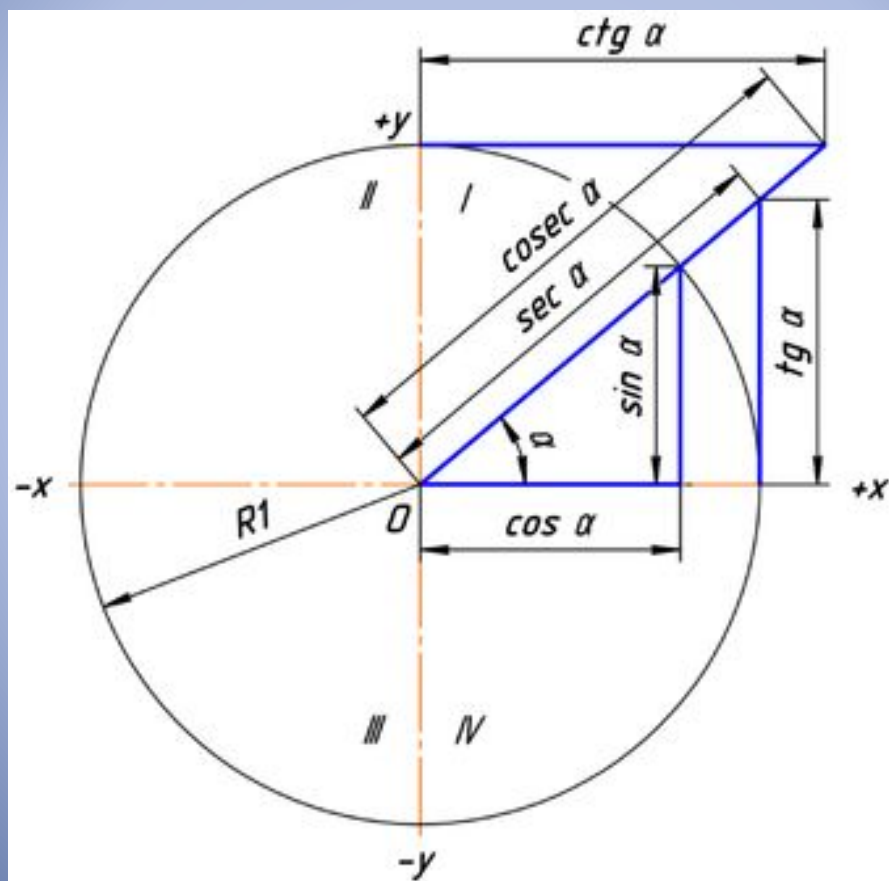
Косеканс определяется как  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{R}{y_B}$ .



Определение тригонометрических функций

- Ясно, что значения тригонометрических функций не зависят от величины радиуса окружности  $R$  в силу свойств подобных фигур. Часто этот радиус принимают равным величине единичного отрезка, тогда синус равен просто ординате  $y_B$ , а косинус — абсциссе  $x_B$ .

# Численные значения тригонометрических функций угла $\alpha$ в тригонометрической окружности с радиусом, равным $e$



# Тригонометрические функции острого угла

Во многих учебниках элементарной геометрии до настоящего времени тригонометрические функции острого угла определяются как отношения сторон прямоугольного треугольника. Пусть  $OAB$  — треугольник с углом  $\alpha$ . Тогда:

Синусом угла  $\alpha$  называется отношение  $AB/OB$  (отношение противолежащего катета к гипотенузе).

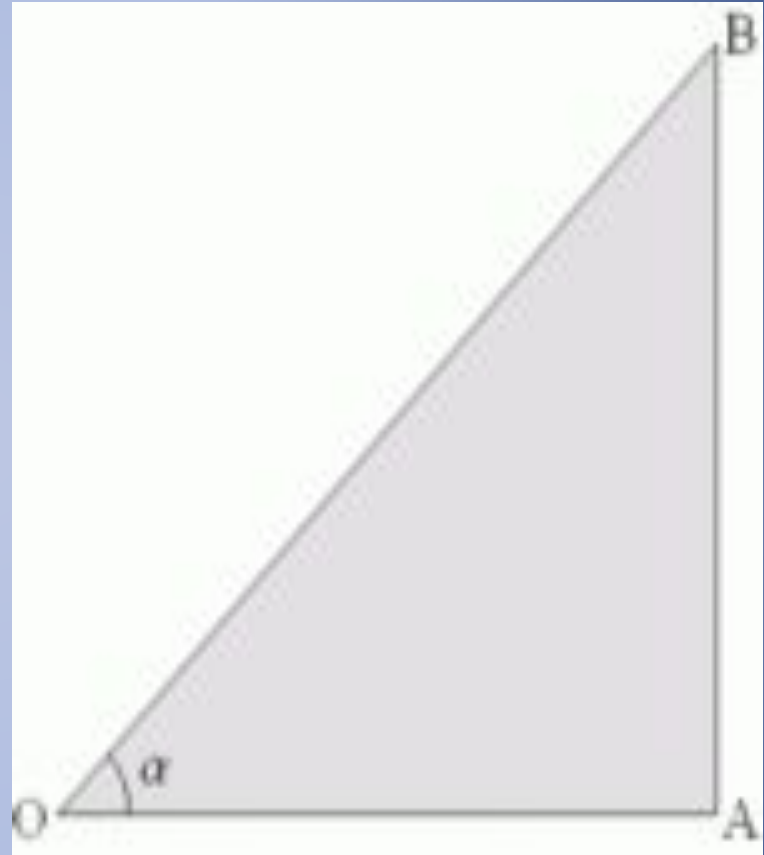
Косинусом угла  $\alpha$  называется отношение  $OA/OB$  (отношение прилежащего катета к гипотенузе).

Тангенсом угла  $\alpha$  называется отношение  $AB/OA$  (отношение противолежащего катета к прилежащему).

Котангенсом угла  $\alpha$  называется отношение  $OA/AB$  (отношение прилежащего катета к противолежащему).

Секансом угла  $\alpha$  называется отношение  $OB/OA$  (отношение гипотенузы к прилежащему катету).

Косекансом угла  $\alpha$  называется отношение  $OB/AB$  (отношение гипотенузы к противолежащему катету).



# Определение тригонометрических функций как решений дифференциальных уравнений

- Функции косинус и синус можно определить как чётное (косинус) и нечётное (синус) решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} R(\varphi) = -R(\varphi),$$

с начальными

$$\cos(0) = \sin'(0) = 1 \quad \text{то есть как функций}$$

условиями

одной переменной, вторая производная которых равна самой функции, взятой со знаком минус:

$$(\cos x)'' = -\cos x,$$

$$(\sin x)'' = -\sin x.$$

## Определение тригонометрических функций как решений функциональных уравнений

- Функции косинус и синус можно определить как непрерывные решения ( $f$  и  $g$  соответственно) системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y) \end{cases}$$

# Определение тригонометрических функций через ряды

- Используя геометрию и свойства пределов, можно доказать, что производная синуса равна косинусу и что производная косинуса равна минус синусу. Тогда можно воспользоваться теорией рядов Тейлора и представить синус и косинус в виде суммы степенных рядов:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

- Пользуясь этими формулами, а также уравнениями

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

можно найти разложения в ряд Тейлора и других тригонометрических функций:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)|B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} - \dots = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} |B_{2n}|}{(2n)!} x^{2n-1} \quad (-\pi < x < \pi),$$

$$\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{csc} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + \frac{127}{604800}x^7 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2(2^{2n-1}-1)B_{2n}x^{2n-1}}{(2n)!}$$

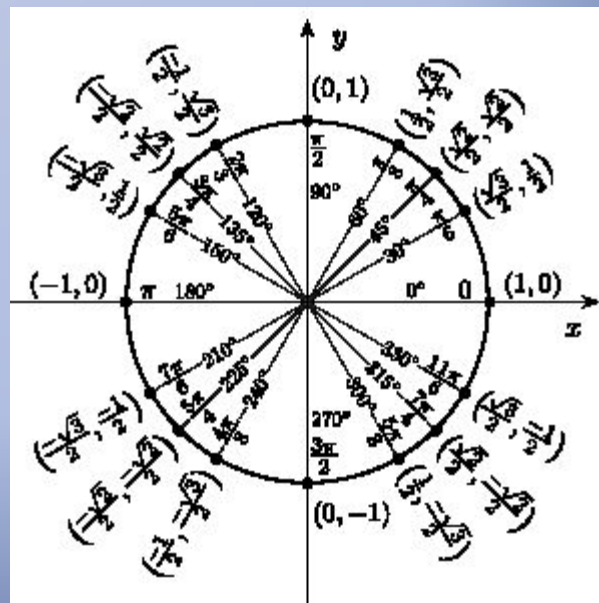
где

$B_n$  — числа Бернулли,

$E_n$  — числа Эйлера.

# Значения тригонометрических функций для некоторых углов

- Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса для некоторых углов приведены в таблице. («N/A» означает, что это значение не определено).



Значения косинуса и синуса на окружности.

# Значения тригонометрических функций для некоторых углов

| $\alpha$                      | $0^\circ$ (0 рад) | $30^\circ$ ( $\pi/6$ ) | $45^\circ$ ( $\pi/4$ ) | $60^\circ$ ( $\pi/3$ ) | $90^\circ$ ( $\pi/2$ ) | $180^\circ$ ( $\pi$ ) | $270^\circ$ ( $3\pi/2$ ) | $360^\circ$ ( $2\pi$ ) |
|-------------------------------|-------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|--------------------------|------------------------|
| $\sin \alpha$                 | 0                 | $\frac{1}{2}$          | $\frac{\sqrt{2}}{2}$   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$   | 1                      | 0                     | -1                       | 0                      |
| $\cos \alpha$                 | 1                 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$   | $\frac{1}{2}$          | 0                      | -1                    | 0                        | 1                      |
| $\operatorname{tg} \alpha$    | 0                 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$   | 1                      | $\sqrt{3}$             | N/A                    | 0                     | N/A                      | 0                      |
| $\operatorname{ctg} \alpha$   | N/A               | $\sqrt{3}$             | 1                      | $\frac{1}{\sqrt{3}}$   | 0                      | N/A                   | 0                        | N/A                    |
| $\sec \alpha$                 | 1                 | $\frac{2}{\sqrt{3}}$   | $\sqrt{2}$             | 2                      | N/A                    | -1                    | N/A                      | 1                      |
| $\operatorname{cosec} \alpha$ | N/A               | 2                      | $\sqrt{2}$             | $\frac{2}{\sqrt{3}}$   | 1                      | N/A                   | -1                       | N/A                    |

# Значения тригонометрических функций нестандартных углов

| $\alpha$                    | $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$    | $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$    | $\frac{\pi}{8} = 22,5^\circ$  | $\frac{\pi}{5} = 36^\circ$            | $\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$          | $\frac{3\pi}{8} = 67,5^\circ$ | $\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$           |
|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| $\sin \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$         | $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ |
| $\cos \alpha$               | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$                | $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$                |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | $2-\sqrt{3}$                   | $\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$  | $\sqrt{2}-1$                  | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$                  | $\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$         | $\sqrt{2}+1$                  | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$                  |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | $2+\sqrt{3}$                   | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$           | $\sqrt{2}+1$                  | $\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$         | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$                  | $\sqrt{2}-1$                  | $\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$         |

$$\sin \frac{\pi}{60} = \cos \frac{29\pi}{60} = \sin 3^\circ = \cos 87^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - 2(\sqrt{3}-1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16},$$

$$\cos \frac{\pi}{60} = \sin \frac{29\pi}{60} = \cos 3^\circ = \sin 87^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1) + 2(\sqrt{3}+1)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{16},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{60} = \operatorname{ctg} \frac{29\pi}{60} = \operatorname{tg} 3^\circ = \operatorname{ctg} 87^\circ = \frac{2 + \sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{(2 + \sqrt{3})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + 1},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{60} = \operatorname{tg} \frac{29\pi}{60} = \operatorname{ctg} 3^\circ = \operatorname{tg} 87^\circ = \frac{(2 + \sqrt{3})\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + 1}{2 + \sqrt{3} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}},$$

$$\sin \frac{\pi}{30} = \cos \frac{7\pi}{15} = \sin 6^\circ = \cos 84^\circ = \frac{\sqrt{6(5 - \sqrt{5})} - \sqrt{5} - 1}{8},$$

$$\cos \frac{\pi}{30} = \sin \frac{7\pi}{15} = \cos 6^\circ = \sin 84^\circ = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})} + \sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{8},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{30} = \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{15} = \operatorname{tg} 6^\circ = \operatorname{ctg} 84^\circ = \frac{\sqrt{2(5 - \sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{30} = \operatorname{tg} \frac{7\pi}{15} = \operatorname{ctg} 6^\circ = \operatorname{tg} 84^\circ = \frac{\sqrt{2(25 + 11\sqrt{5})} + \sqrt{3}(\sqrt{5} + 3)}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{15} = \cos \frac{13\pi}{30} = \sin 12^\circ = \cos 78^\circ = \frac{\sqrt{2(5 + \sqrt{5})} - \sqrt{3}(\sqrt{5} - 1)}{8},$$

$$\cos \frac{\pi}{15} = \sin \frac{13\pi}{30} = \cos 12^\circ = \sin 78^\circ = \frac{\sqrt{6(5 + \sqrt{5})} + \sqrt{5} - 1}{8},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{120} = \operatorname{ctg} \frac{59\pi}{120} = \operatorname{tg} 1.5^\circ = \operatorname{ctg} 88.5^\circ = \sqrt{\frac{8 - \sqrt{2(2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{5})} - \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{5})}}{8 + \sqrt{2(2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{5})} + \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{5})}}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{120} = \operatorname{ctg} \frac{59\pi}{120} = \operatorname{tg} 1.5^\circ = \operatorname{ctg} 88.5^\circ = \sqrt{\frac{8 - \sqrt{2(2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{5})} - \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{5})}}{8 + \sqrt{2(2 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{5})} + \sqrt{2(2 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{5})}}},$$

$$\cos \frac{\pi}{17} = \sin \frac{15\pi}{34} = \frac{1}{8} \sqrt{2 \left( 2 \sqrt{\sqrt{\frac{17(17 - \sqrt{17})}{2}}} - \sqrt{\frac{17 - \sqrt{17}}{2}} - 4 \sqrt{2(17 + \sqrt{17})} + 3\sqrt{17} + 17 + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} + \sqrt{17} + 15 \right)}.$$

# Формулы приведения

- ♦ Формулами приведения называются формулы следующего вида:

$$f(n\pi + \alpha) = \pm f(\alpha),$$

$$f(n\pi - \alpha) = \pm f(\alpha),$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} + \alpha\right) = \pm g(\alpha),$$

$$f\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} - \alpha\right) = \pm g(\alpha).$$

Здесь  $f$  — любая тригонометрическая функция,  $g$  — соответствующая ей кофункция (то есть косинус для синуса, синус для косинуса и аналогично для остальных функций),  $n$  — целое число. Перед полученной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в заданной координатной четверти при условии, что угол  $\alpha$  острый, например:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$$

# Некоторые формулы приведения:

|                        | $\sin$         | $\cos$         | $\tan$         | $\cot$         |
|------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $-\alpha$              | $-\sin \alpha$ | $+\cos \alpha$ | $-\tan \alpha$ | $-\cot \alpha$ |
| $90^\circ - \alpha$    | $+\cos \alpha$ | $+\sin \alpha$ | $+\cot \alpha$ | $+\tan \alpha$ |
| $90^\circ + \alpha$    | $+\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $-\cot \alpha$ | $-\tan \alpha$ |
| $180^\circ - \alpha$   | $+\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\tan \alpha$ | $-\cot \alpha$ |
| $180^\circ + \alpha$   | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $+\tan \alpha$ | $+\cot \alpha$ |
| $270^\circ - \alpha$   | $-\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $+\cot \alpha$ | $+\tan \alpha$ |
| $270^\circ + \alpha$   | $-\cos \alpha$ | $+\sin \alpha$ | $-\cot \alpha$ | $-\tan \alpha$ |
| $360^\circ k - \alpha$ | $-\sin \alpha$ | $+\cos \alpha$ | $-\tan \alpha$ | $-\cot \alpha$ |
| $360^\circ k + \alpha$ | $+\sin \alpha$ | $+\cos \alpha$ | $+\tan \alpha$ | $+\cot \alpha$ |

## Формулы сложения

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

# Аналогичные формулы для суммы трёх углов:

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma,$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

# Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \frac{2}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

# Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.$$

# Формулы половинного угла

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq \pi.$$

◆ Формулы для произведений функций двух углов:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)},$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}.$$

# Аналогичные формулы для произведений синусов и косинусов трёх углов:

$$\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{4}.$$

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)}{4}.$$

$$\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta + \gamma) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{4}.$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)}{4}.$$

# Степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha},$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4},$$

$$\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha},$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4},$$

$$\operatorname{ctg}^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha},$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}{8},$$

$$\operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3},$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}{8},$$

$$\operatorname{ctg}^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}.$$

# Суммы

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2.$$

- Для функций от аргумента  $x$  существует представление:

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \phi),$$

где угол  $\phi$  находится из соотношений:

$$\sin \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \cos \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

# Однопараметрическое представление

- Все тригонометрические функции можно выразить через тангенс половинного угла.

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

# Производные и интегралы

- Все тригонометрические функции непрерывно и неограниченно дифференцируемы на всей области определения:

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

**Интегралы тригонометрических функций на области определения выражаются через элементарные функции следующим образом:**

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \sec x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

# Тригонометрические функции комплексного аргумента

- Формула Эйлера:

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$$

позволяет определить тригонометрические функции от комплексных аргументов через экспоненту или (с помощью рядов) как аналитическое продолжение их вещественных аналогов:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{\operatorname{sh} iz}{i};$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch} iz;$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos x} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}};$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin x} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}};$$

Соответственно, для вещественного  $x$ ,

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}),$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

- Комплексные синус и косинус тесно связаны с гиперболическими функциями:

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

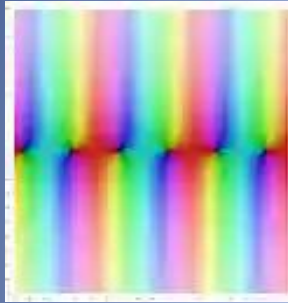
Большинство перечисленных выше свойств тригонометрических функций сохраняются и в комплексном случае. Некоторые дополнительные свойства:

- ◆ комплексные синус и косинус, в отличие от вещественных, могут принимать сколь угодно большие по модулю значения;
- ◆ все нули комплексных синуса и косинуса лежат на вещественной оси.

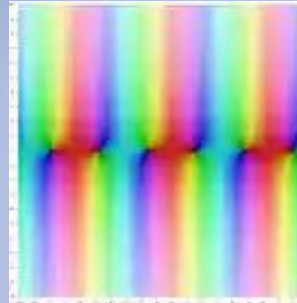
# *Комплексные графики*

- *На следующих графиках изображена комплексная плоскость, а значения функций выделены цветом. Яркость отражает абсолютное значение (чёрный — ноль). Цвет изменяется от аргумента и угла согласно карте*

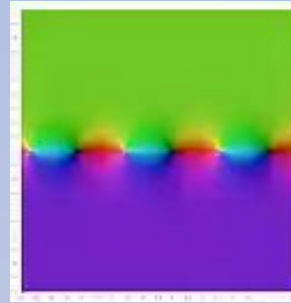
# Тригонометрические функции в комплексной плоскости



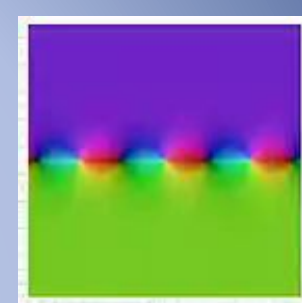
$\sin z$



$\cos z$



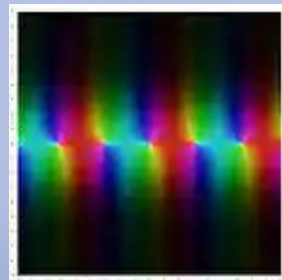
$\operatorname{tg} z$



$\operatorname{ctg} z$

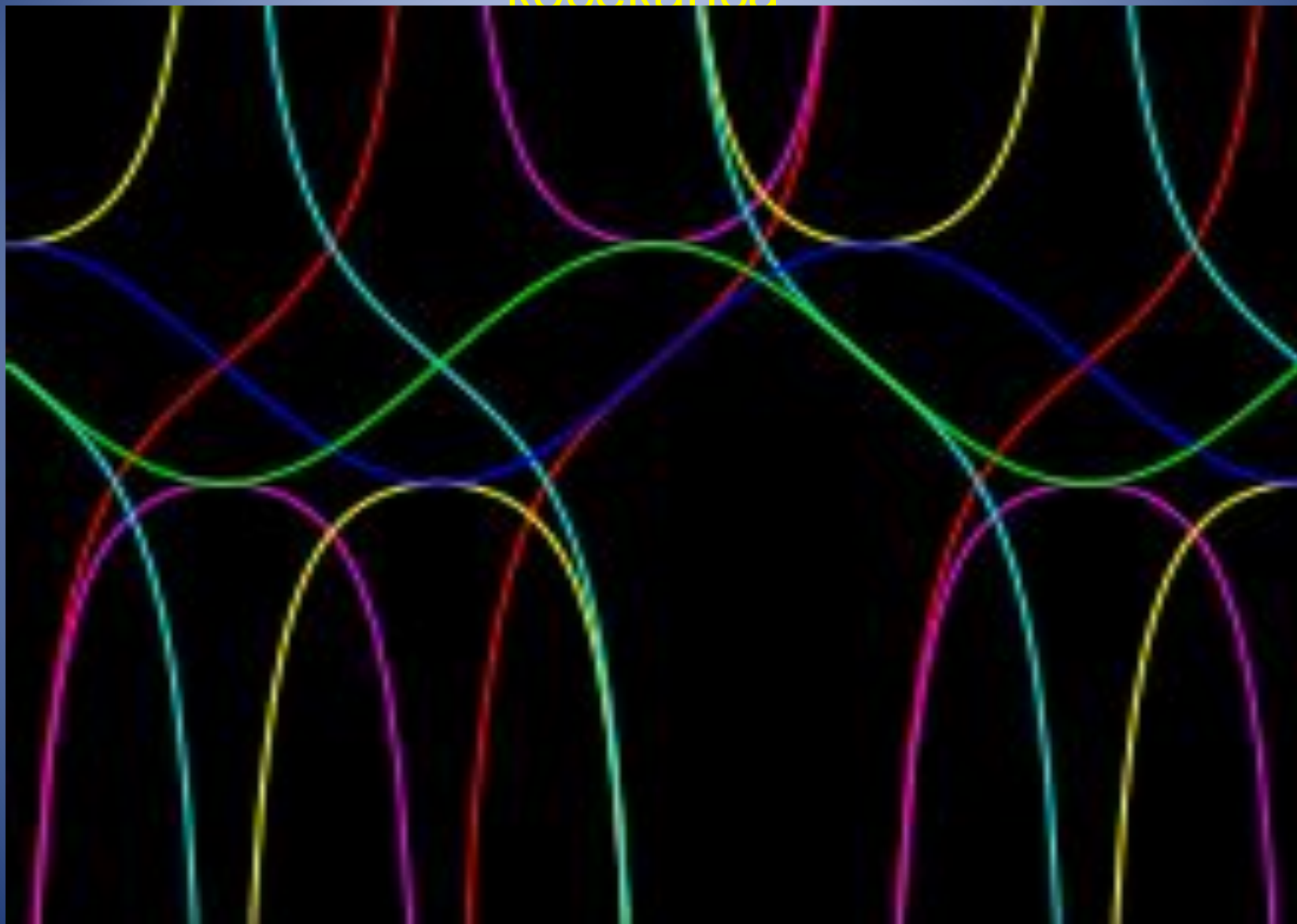


$\sec z$



$\operatorname{cosec} z$

# Графики тригонометрических функций: синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса, косеканса



# Обратные тригонометрические функции

- Обратные тригонометрические функции (круговые функции, аркфункции) — математические функции, являющиеся обратными к тригонометрическим функциям. К обратным тригонометрическим функциям обычно относят шесть функций:
- арксинус (обозначение:  $\arcsin$ )
- арккосинус (обозначение:  $\arccos$ )
- арктангенс (обозначение:  $\arctg$ ; в иностранной литературе  $\arctan$ )
- арккотангенс (обозначение:  $\text{arcctg}$ ; в иностранной литературе  $\text{arccot}$  или  $\text{arccotan}$ )
- арксеканс (обозначение:  $\text{arcsec}$ )
- арккосеканс (обозначение:  $\text{arccosec}$ ; в иностранной литературе  $\text{arccsc}$ )

- Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. arc — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку. Изредка в иностранной литературе пользуются обозначениями типа  $\sin^{-1}$  для арксинуса и т. п.; это считается не совсем корректным, так как возможна путаница с возведением функции в степень  $-1$ .

- Основное соотношение

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

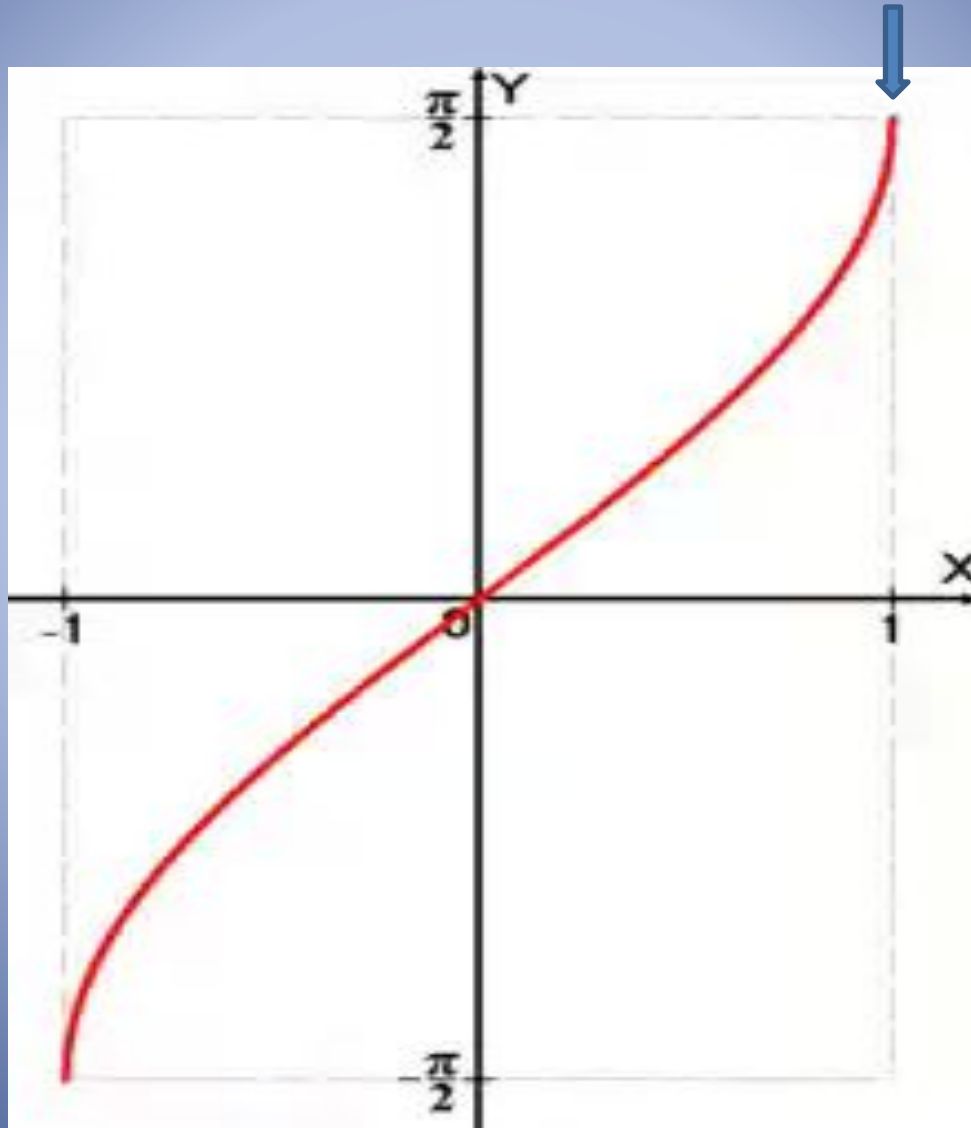
## Функция $\arcsin$

- Арксинусом числа  $m$  называется такое значение угла  $x$ , для которого

$$\sin x = m, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad |m| \leq 1.$$

Функция  $y = \sin x$  непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция  $y = \arcsin x$  является строго возрастающей.

# График функции $y = \arcsin x$ .



$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{при} \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\arcsin(\sin y) = y \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

$$D(\arcsin x) = [-1; 1] \quad (\text{область определения}),$$

$$E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad (\text{область значений}).$$

# Свойства функции $\arcsin$

♦  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$  (функция является нечётной).

♦  $\arcsin x > 0$  При  $0 < x \leq 1$

♦  $\arcsin x = 0$  при  $x = 0$ .

♦  $\arcsin x < 0$  При  $-1 \leq x < 0$ .

♦  $\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

♦  $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

♦  $\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ -\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

# Получение функции arcsin

- Дана функция  $y = \sin x$ . На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие  $y = \arcsin x$  функцией не является. Поэтому мы рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все значения области значений  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Так как для функции  $y = \sin x$  на интервале  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, то на этом отрезке существует обратная функция  $y = \arcsin x$ , график которой симметричен графику функции  $y = \sin x$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  относительно прямой  $y = x$ .

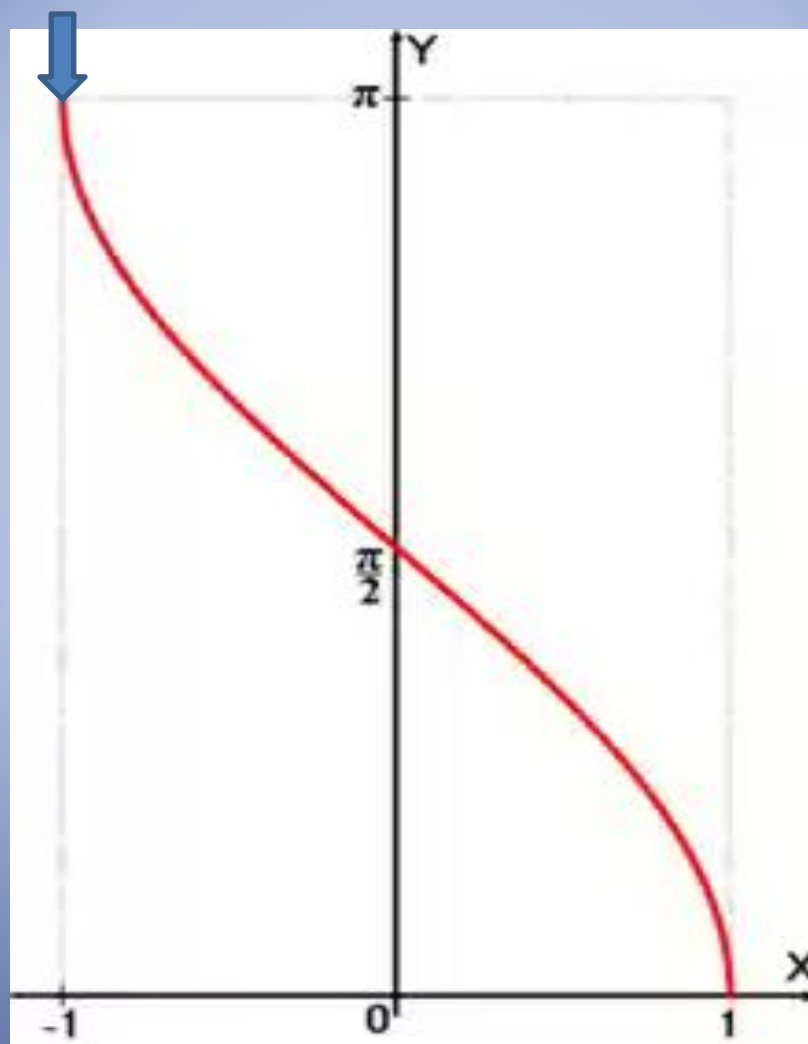
## Функция $\arccos$

- Арккосинусом числа  $m$  называется такое значение угла  $x$ , для которого

$$\cos x = m, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad |m| \leq 1.$$

График функции  $y = \arccos x$ .

Функция  $y = \cos x$  непрерывна и на всей своей числовой прямой. Функция  $y = \arccos x$  является строго убывающей.



- $\cos(\arccos x) = x$  при  $-1 \leq x \leq 1$ ,
- $\arccos(\cos y) = y$  при  $0 \leq y \leq \pi$ .
- $D(\arccos x) = [-1; 1]$ , (область определения),
- $E(\arccos x) = [0; \pi]$ . (область значений).

# Свойства функции $\arccos$

- $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$  (функция центрально-симметрична относительно точки  $(0; \frac{\pi}{2})$ ).

$$\arccos x > 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq x < 1.$$

$$\arccos x = 0 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\arccos x = 2 \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

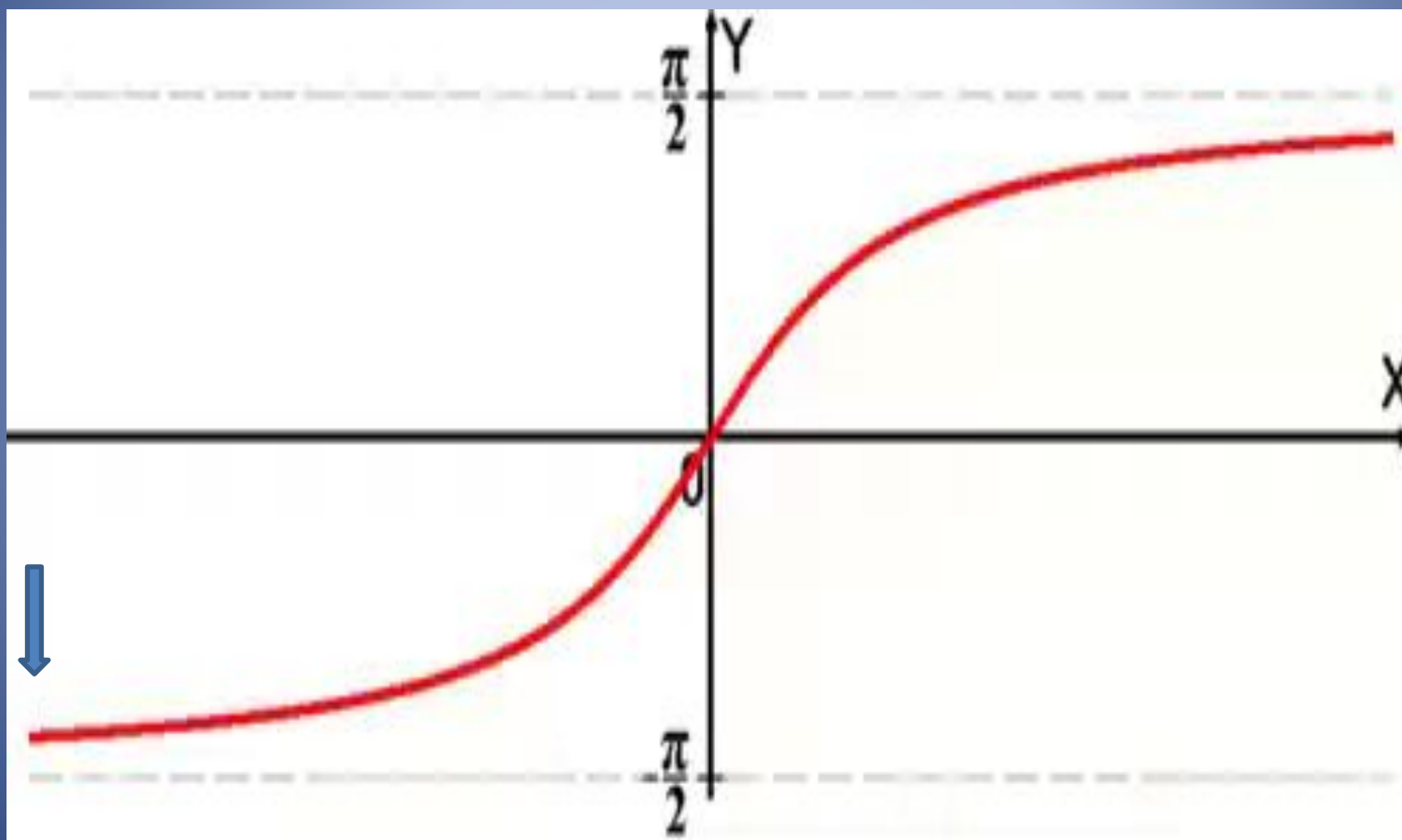
$$\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$$

$$\arccos x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

# Получение функции $\arccos$

- Дана функция  $y = \cos x$ . На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие  $y = \arccos x$  функцией не является. Поэтому мы рассмотрим отрезок, на котором она строго убывает и принимает все свои значения —  $[0; \pi]$ . На этом отрезке  $y = \cos x$  строго монотонно убывает и принимает все свои значения только один раз, а значит, на отрезке  $[0; \pi]$  существует обратная функция  $y = \arccos x$ , график которой симметричен графику  $y = \cos x$  на отрезке  $[0; \pi]$  относительно прямой  $y = x$ .

# Функция $\arctg$



- Арктангенсом числа  $m$  называется такое значение угла  $\alpha$ , для

$$\operatorname{tg} \alpha = m, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Функция  $y = \operatorname{arctg} x$  и ограничена на всей

своей числовой  
прямой.

$y = \operatorname{arctg} x$  является строго возрастающей.

Функция  $y = \operatorname{arctg} x$  является строго возрастающей.

♦  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$  При  $x \in \mathbb{R},$

♦  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} y) = y$  При  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$

♦  $D(\operatorname{arctg} x) = (-\infty; \infty),$

♦  $E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

# Свойства функции arctg

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

# Получение функции $\operatorname{arctg}$

- Дана функция  $y = \operatorname{tg} x$ . На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие  $y = \operatorname{arctg} x$  функцией не является. Поэтому рассмотрим отрезок, на котором она строго возрастает и принимает все свои значения только один раз —  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . На этом отрезке строго монотонно возрастает и принимает все свои значения только один раз, следовательно,  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  — на интервале  $y = \operatorname{arctg} x$  обратная функция, график которой  $y = \operatorname{tg} x$  симметричен  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  относительно прямой  $y = x$ .



# Функция $\operatorname{arcsctg}$



# функции $y = \operatorname{arcctg} x$

- Арккотангенсом числа  $m$  называется такое значение угла  $x$ , для которого  $\operatorname{ctg} x = m, \quad 0 < x < \pi.$

Функция  $y = \operatorname{arcctg} x$  непрерывна и ограничена на всей своей числовой прямой. Функция  $y = \operatorname{arcctg} x$  является строго убывающей.

◆  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \text{При } x \in \mathbb{R},$

◆  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} y) = y \quad \text{При } 0 < y < \pi,$

◆  $D(\operatorname{arcctg} x) = (-\infty; \infty),$

◆  $E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$

# Свойства функции $\operatorname{arctg}$

- $\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x$  (график функции центрально-симметричен относительно точки  $(0; \frac{\pi}{2})$ ).
- $\operatorname{arctg} x > 0$  при любых  $x$ .
- $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \end{cases}$

# Получение функции $\operatorname{arccotg}$

- Дана функция  $y = \operatorname{ctg} x$ . На всей своей области определения она является кусочно-монотонной, и, значит, обратное соответствие функцией не является. Поэтому рассмотрим отрезок, на котором она строго убывает и принимает все свои значения только один раз —  $(0; \pi)$ . На этом отрезке  $y = \operatorname{ctg} x$  строго убывает и принимает все свои значения только один раз, следовательно, на интервале  $(0; \pi)$  существует обратная функция  $y = \operatorname{arccotg} x$ , график которой симметричен графику  $y = \operatorname{ctg} x$  на отрезке  $(0; \pi)$  относительно прямой  $y = x$ . График  $y = \operatorname{arccotg} x$  симметричен к арктангенсу  $y = \operatorname{arctg} x$ .

# Функция arcsec

$$\operatorname{arcsec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

# Функция arccosec

$$\operatorname{arccosec}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

# Производные от обратных тригонометрических функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

# Интегралы от обратных тригонометрических функций

Неопределённые интегралы

Для действительных и комплексных  $x$ :

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$$\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$$

$$\int \operatorname{arcctg} x \, dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C,$$

$$\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln \left( x \left( 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) \right) + C,$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \, dx = x \operatorname{arccosec} x + \ln \left( x \left( 1 + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) \right) + C.$$

- Для действительных  $x \geq 1$ :

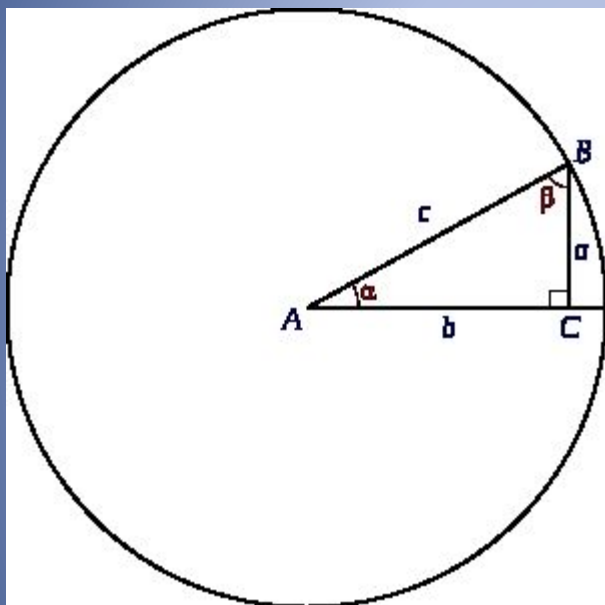
$$\int \operatorname{arcsec} x \, dx = x \operatorname{arcsec} x - \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) + C,$$

$$\int \operatorname{arccosec} x \, dx = x \operatorname{arccosec} x + \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right) + C.$$

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОМЕТРИИ

- Обратные тригонометрические функции используются для вычисления углов треугольника, если известны его стороны, например с помощью теоремы косинусов.

- В прямоугольном треугольнике, эти функции от отношений сторон сразу дают угол:
- $\alpha = \arcsin (a/c) = \arccos (b/c) = \operatorname{arctg} (a/b) = \operatorname{arccosec} (c/a) = \operatorname{arcsec} (c/b) = \operatorname{arcctg} (b/a)$



Прямоугольный треугольник ABC

*Решение простейших тригонометрических уравнений*

- •  $\sin x = a$ .
- Если  $|a| > 1$  — вещественных решений нет.
- Если  $|a| \leq 1$  — решением является число вида  $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n; n \in \mathbb{Z}$ .
- •  $\cos x = a$ .
- Если  $|a| > 1$  — решений нет.
- Если  $|a| \leq 1$  — решением является число вида  $x = \pm \arccos a + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ .

- •  $\operatorname{tg} x = a$ . Решением является число вида

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

- $\operatorname{ctg} x = a$ . Решением является число  
вида

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n; n \in \mathbb{Z}.$$

# универсальная тригонометрическая подстановка

- Тождества имеют смысл, только когда существуют обе части  $\alpha \neq \pi + 2\pi n$  при ).

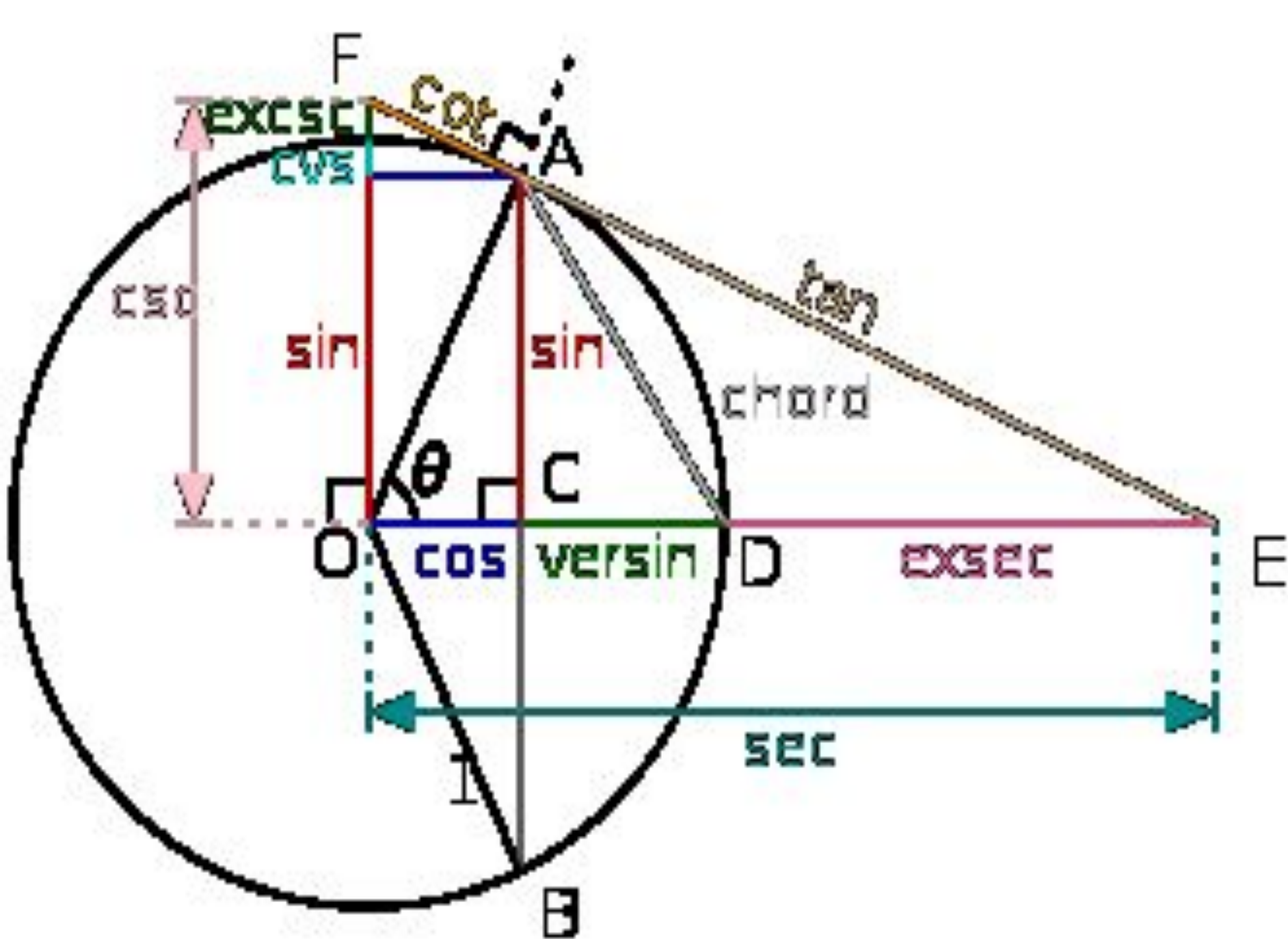
$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

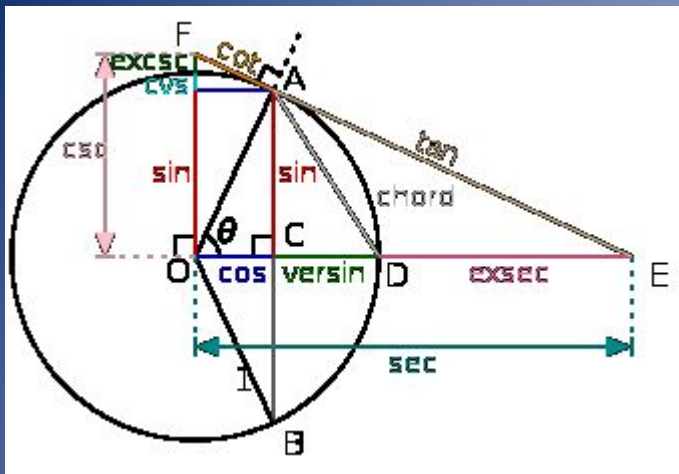
$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

# Редко используемые тригонометрические функции

- Редко используемые тригонометрические функции — функции угла, которые в настоящее время используются редко по сравнению с шестью основными тригонометрическими функциями (синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом, секансом и косекансом). К НИМ ОТНОСЯТСЯ:





- Определение тригонометрических функций через окружность. Отрезки CD и DE описывают соответственно версинус и эксеканс.

- Синус-верзус** (другие написания: версинус, синус версус, называется также «стрелка дуги»). Определяется

$$\text{versin } \vartheta = 1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Представляет собой расстояние от центральной точки дуги, измеряемой удвоенным данным углом, до центральной точки хорды, стягивающей дугу. Иногда используются обозначения  $\text{vers } \vartheta$ ,  $\sin \text{ vers } \vartheta$ .

С ним связаны ещё несколько функций:

- Косинус-верзус** (другие написания: коверсинус, косинус версус).

Определяется как  $\text{vercos } \vartheta = \text{versin} \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = 1 - \sin \vartheta$ .

Иногда используются обозначения  $\text{cvs } \vartheta$ ,  $\cos \text{ vers } \vartheta$ .

- **Гаверсинус** (англ. haversinus, сокращение от half the versed sine). Определяется  $\text{hav} \vartheta = \frac{\text{versin } \vartheta}{2} = \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$

Используется также обозначение  $\text{hav } \vartheta.$

- **Эксеканс** (англ. exsecant) или эксеканс. Определяется  $\text{exsec } \vartheta = \sec \vartheta - 1.$

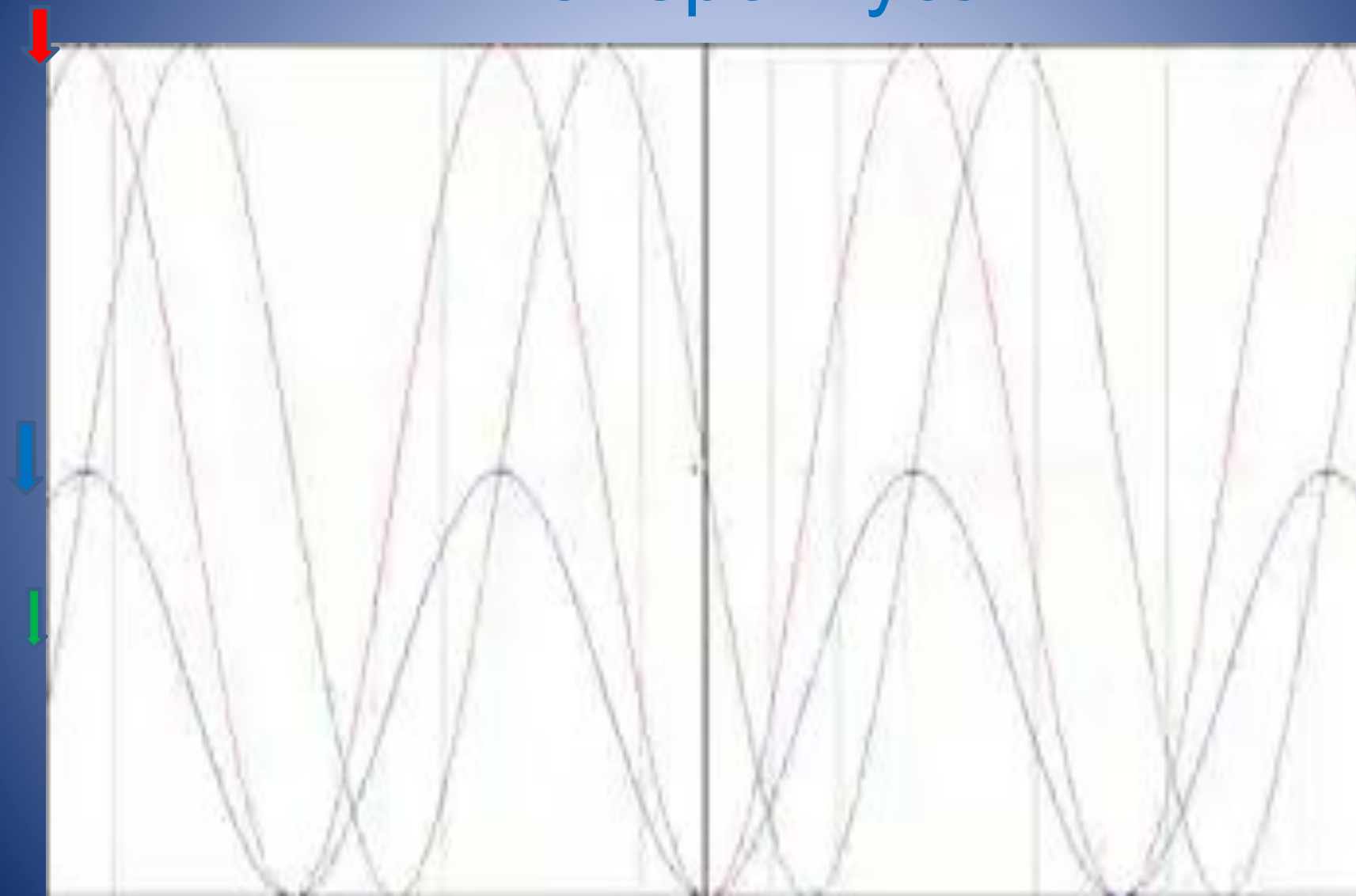
• **Эксекосеканс** – дополнительная функция к эксекансу:

$$\text{excsc } \vartheta = \text{exsec} \left( \frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = \text{cosec } \vartheta - 1.$$

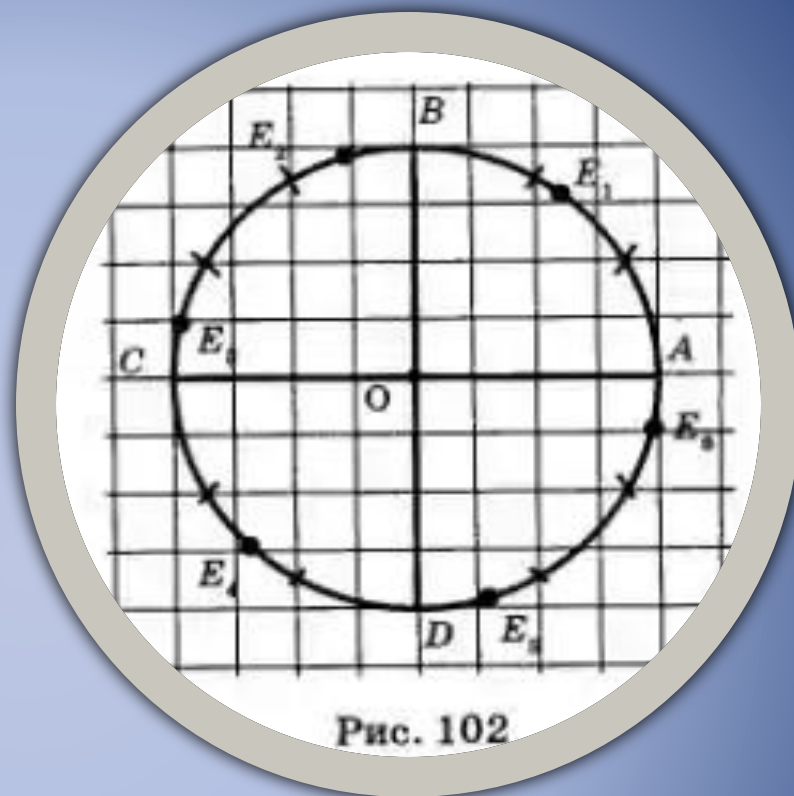
# Использовани

- Версинус, коверсинус и гаверсинус были удобны для ручных расчётов с использованием логарифмов, поскольку они всюду неотрицательны, однако в связи с развитием вычислительных средств эта область применения неактуальна. В настоящее время эти функции используются для описания соответствующих сигналов в электронике (например, в функциональных генераторах). Гаверсинус также используется в навигационных расчётах для избежания ошибок округления в вычислительных системах с ограниченной разрядностью.

# Графики **версинуса**, **коверсинуса** и **гаверсинуса**



- Рассуждая аналогичным образом, делаем вывод, что на единичной окружности можно найти и точку  $E_\Gamma$ , для которой  $AE_\Gamma = 1$ , и точку  $E_2$ , для которой  $AE_\Gamma = 2$ , и точку  $E_3$ , для которой  $AE_3 = 3$ , и точку  $E_4$ , для которой  $AE_4 = 4$ , и точку  $E_\Psi$ , для которой  $AE_\Psi = 5$ , и точку  $E_6$ , для которой  $AE_6 = 6$ . На рис. 102 отмечены (приблизительно) соответствующие точки (причем для ориентировки каждая из четвертей единичной окружности разделена черточками на три равные части).



- Пример.
- Найти на числовой окружности точку, соответствующую числу  $-7$ .
- **Решение.** Нам нужно, отправляясь из точки  $A(0)$  и двигаясь в отрицательном направлении (в направлении по часовой стрелке), пройти по окружности путь длиной  $7$ . Если пройти одну окружность, то получим (приблизленно)  $6,28$ , значит, нужно еще пройти (в том же направлении) путь длиной  $0,72$ . Что же это за дуга? Немного меньше половины четверти окружности, т.е. ее

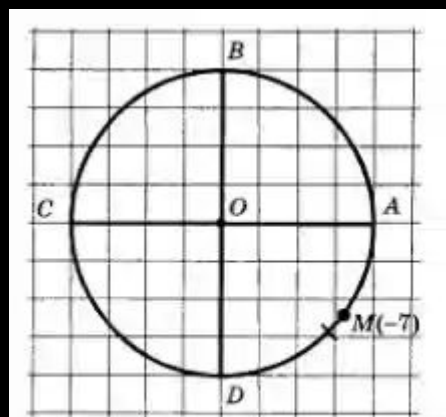


Рис. 103

- Итак, на числовой окружности, как и на числовой прямой, каждому действительному числу соответствует одна точка (только, разумеется, на прямой ее найти легче, чем на окружности). Но для прямой верно и обратное: каждая точка соответствует единственному числу. Для числовой окружности такое утверждение неверно, выше мы неоднократно убеждались в этом. Для числовой окружности справедливо следующее утверждение.
- Если точка  $M$  числовой окружности соответствует числу  $l$ , то она соответствует и числу вида  $l + 2\pi k$ , где  $k$  — любое целое число ( $k \in \mathbb{Z}$ ).
- В самом деле,  $2\pi$  — длина числовой (единичной) окружности, а целое число  $|k|$  можно рассматривать как количество полных обходов окружности в ту или другую сторону. Если, например,  $k = 3$ , то это значит, что мы делаем три обхода окружности в положительном направлении; если  $k = -7$ , то это значит, что мы делаем семь ( $|k| = |-7| = 7$ ) обходов окружности в отрицательном направлении. Но если мы находимся в точке  $M(1)$ , то, выполнив еще  $|k|$  полных обходов окружности, мы снова окажемся в точке  $M$ .

