

Урок по теме: “Тригонометрические формулы.”

Ельцова Н.Г., учитель МОУ «Гимназия №11»,
Г Норильск.

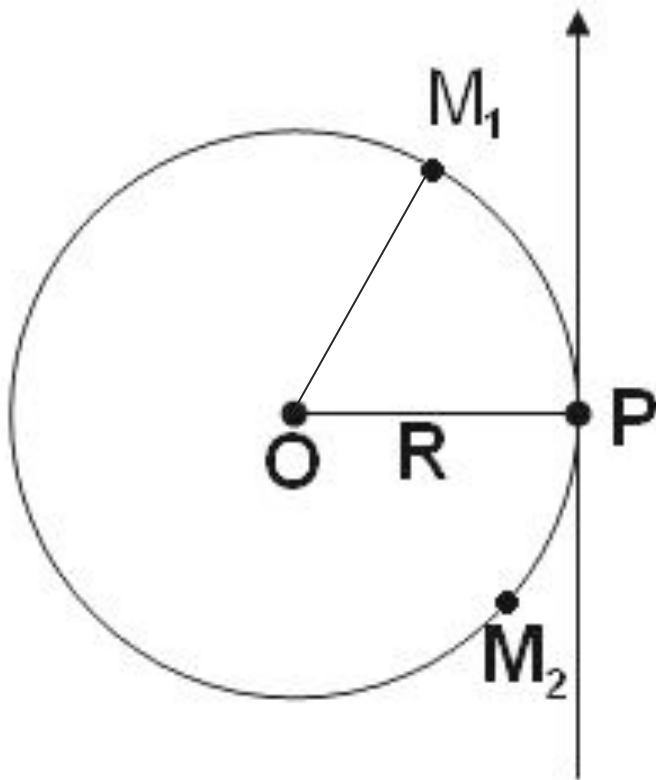
Рассмотрим следующие вопросы:

1. радианная мера угла;
2. поворот точки вокруг начала координат;
3. определение синуса, косинуса и тангенса произвольного угла;
4. знаки синуса, косинуса и тангенса;
5. зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла;
6. синус, косинус и тангенс углов α и $-\alpha$;

Повторим основные понятия:

- ☐ координатная прямая;
 - ☐ координатная плоскость;
 - ☐ центральный угол;
 - ☐ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, где $0 < \alpha < 180^\circ$;
 - ☐ Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом равным 1.
-

Вопрос 1: Радианная мера угла.



- Каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности.
- Кроме градусной меры угла существует еще и радианная.
- Рассмотрим $\text{окр}(O(0,0);R)$ дугу PM_1 , равную радиусу R .
- Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^{\circ} \quad \alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right) \cdot \alpha^{\circ}$$

Задачи.

□ Найти градусную меру угла, равного

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад}$$

решение:

$$\frac{3\pi}{4} \text{ рад} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^{\circ}$$

□ Найти радианную меру угла, равного

$$15^{\circ}$$

решение:

$$15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15 \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}$$

Задание: заполните таблицу наиболее встречающихся углов в градусной и радианной мере.

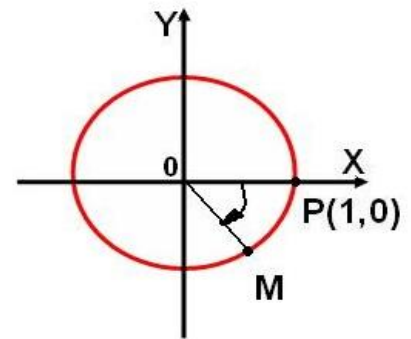
Градусы	0	30	45	60	90	180
Радииан	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Вопрос 2: Поворот точки вокруг начала координат.

- Установим соответствие между действительными числами и точками окружности с помощью поворота точки окружности.
- Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Ее называют **единичной окружностью**.
- Введем понятие поворота окружности вокруг начала координат на угол в α радиан, α - любое действительное число.

1. $\alpha > 0$ 0

2. $\alpha < 0$



3. Поворот на 0 радиан, означает, что точка остается на месте.

Вопрос 3: определение синуса, косинуса, тангенса угла.

Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки $(1,0)$ вокруг начала координат на угол α .

Обозначается $\sin \alpha$

Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки $(1,0)$ вокруг начала координат на угол α .

Обозначается $\cos \alpha$

- При повороте т.Р(1,0) на угол α , т.е на угол 90° , получается точка $(0,1)$.
 - Ордината точки равна 1, поэтому $\sin 90^\circ = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.
 - Абсцисса точки равна 0, $\cos 90^\circ = \cos \frac{\pi}{2} = 0$.
-

Задание:

- ☐ Найти $\cos 270^\circ =$
 - ☐ $\sin 270^\circ =$
 - ☐ $\sin \pi + \sin 1,5\pi =$
 - ☐ $\sin 3\pi - \cos 1,5\pi =$
-

Определение тангенса и котангенса угла

- **Тангенсом** угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу.

- $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

- **Котангенсом** угла α называется отношение косинуса угла α к его синусу.

- $$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

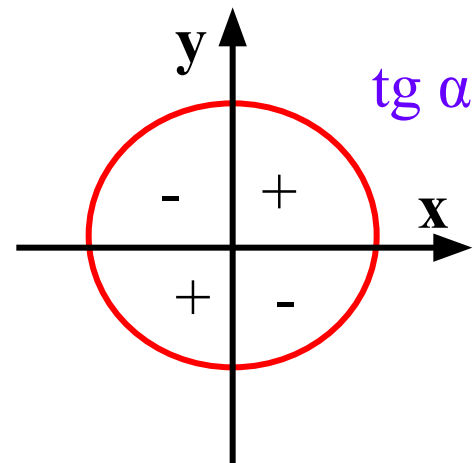
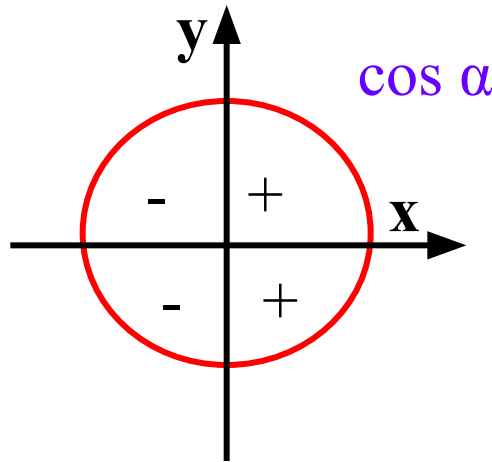
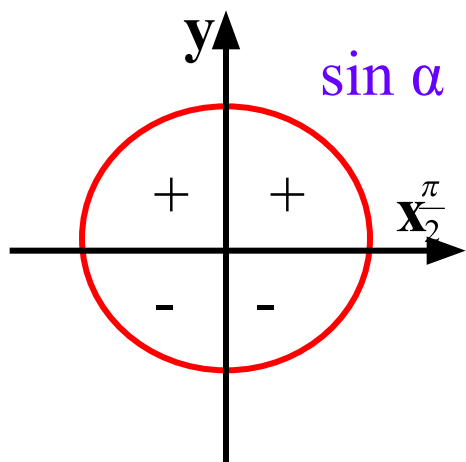
- Найдите

$$\operatorname{tg} 0^\circ =$$

$$\operatorname{ctg} 270^\circ =$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ - \operatorname{tg} 180^\circ =$$

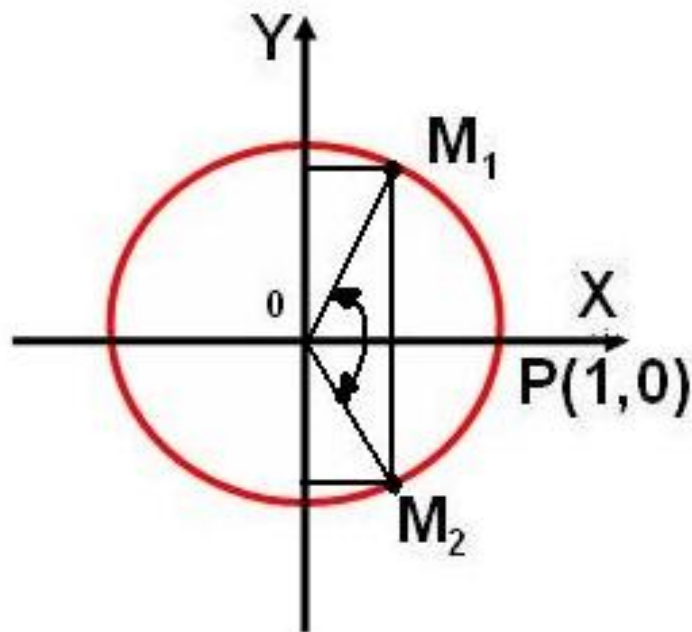
Вопрос 4: знаки синуса косинуса и тангенса. Синус косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.



Пусть $t P(1,0)$ движется по единичной окружности против часовой стрелки.

- ☐ $\alpha \in 1\text{четв}$, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.
- ☐ $\alpha \in 2\text{четв}$, $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.
- ☐ $\alpha \in 3\text{четв}$, $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.
- ☐ $\alpha \in 4\text{четв}$, $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

Вопрос 5: Синус косинус и тангенс углов α и $-\alpha$.



□ Пусть M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом $P(1,0)$ на углы α и $-\alpha$.

Тогда ось Ox делит угол M_1OM_2 пополам, поэтому M_1 и M_2 симметричны относительно оси Ox

$M_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $M_2(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$.

Значит **(1) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$**

(2) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Используя определения тангенса и котангенса

(3) $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

(4) $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

Формулы 1-2 справедливы при любых α .

Формула 3, при

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

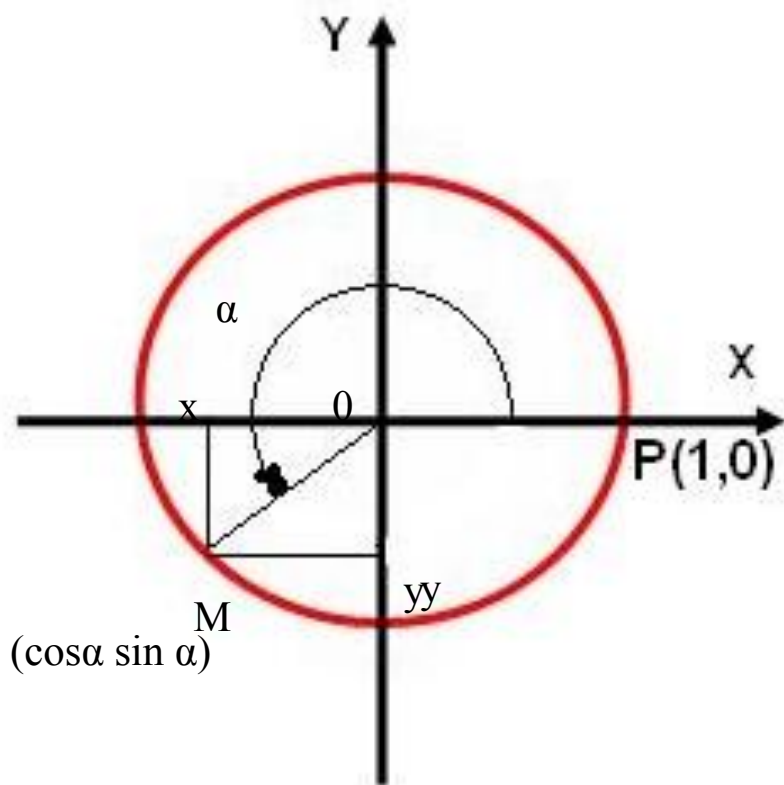
Задание: $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$

1) докажите формулу (3) самостоятельно.

2) выясните знаки синуса, косинуса и тангенса углов: а) ,

б) 745° , в)-

Вопрос 5 зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла.



- Пусть $M(x; y)$ единичной окружности получена поворотом точки $(1; 0)$ на угол α . Тогда по определению синуса и косинуса $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Точка M принадлежит единичной окружности, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению: $x^2 + y^2 = 1$, следовательно

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. (1)$$

Равенство (1) выполняется при любых значениях α и называется

ОСНОВНЫМ
тригонометрическим
тождеством.

- Зависимость между тангенсом и котангенсом определяется равенством: **(2) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$,**

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

ЗАДАЧА

Дано: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

$$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

Найти: $\sin \alpha$

Решение:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha.$$

т.к. $\alpha \in 3\text{четв}$

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

Дано: $\operatorname{tg} \alpha = 13$

Решение:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \text{ следовательно}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Найти: $\operatorname{ctg} \alpha$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{13}$$

Итог урока:

- ✓ Чему равна радианная мера угла, градусная мера угла?
 - ✓ Какой угол называется углом в один радиан?
 - ✓ Что называют синусом, косинусом, тангенсом произвольного угла α ?
 - ✓ Каким равенством определяется зависимость между синусом и косинусом одного и того же угла? Как называется это равенство?
 - ✓ Каким равенством определяется зависимость между тангенсом и котангенсом одного и того же угла?
-

Математический диктант.

1 вариант

1. Найдите радианную меру угла.

40°

ответ:

$$\frac{\pi}{6}$$

2. Найдите градусную меру угла

ответ:

3. найдите координаты точки, полученной поворотом т(1,0) единичной окружности на угол

$$\frac{\pi}{2}, -3\pi, 180^{\circ}, -360^{\circ}$$

ответ:

(0;1), (-1;0), (-1;0), (1,0)

2 вариант

150°

ответ:

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{3\pi}{4}$$

ответ:

$$-\pi, \frac{3\pi}{2}, -90^{\circ}, 270^{\circ}$$

ответ:

(-1;0), (0;-1), (0;-1), (0;-1)

1 вариант.

4. вычислите:

2 вариант.

1) $\cos 0^\circ + 3 \sin 90^\circ =$

$$= 1 + 3 \cdot 1 = 1$$

2) $\sin 270^\circ - 2 \cos 180^\circ =$

$$= -1 + 2 = 1$$

3) $1 + \operatorname{ctg} 270^\circ - 5 \operatorname{tg} 360^\circ =$

$$= 1 + 0 + 0 = 1$$

4) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

1) $\cos 180^\circ + 5 \sin 90^\circ =$

$$= -1 + 5 \cdot 1 = 5$$

2) $\sin 180^\circ - 3 \cos 0^\circ =$

$$= 0 - 3 = -3$$

3) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

4) $\operatorname{tg} 360^\circ - 2 \operatorname{ctg} 270^\circ + 3 =$

$$= 0 - 0 + 3 = 3$$