

6. ТЕОРЕМА О СЛОЖЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

*Вероятность суммы двух
несовместных событий A и B
равна сумме вероятностей
этих событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

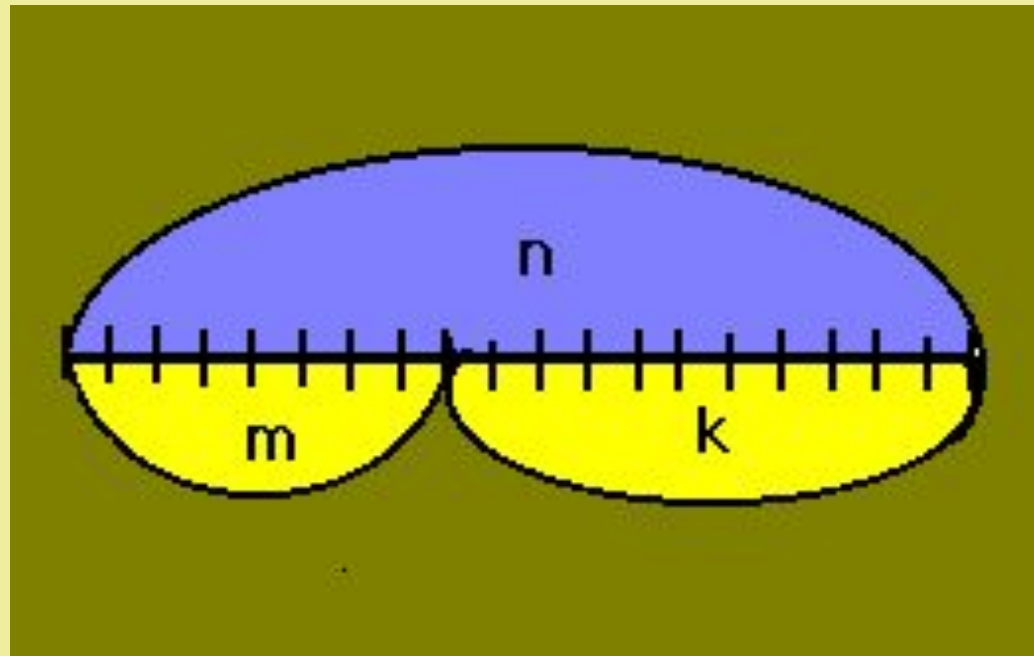
Доказательство:

Пусть все возможные исходы опыта сводятся к n случаям, из которых m случаев благоприятны событию A , а k - случаев благоприятны событию B .

Тогда вероятности событий A и B будут равны соответственно:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(B) = \frac{k}{n}$$

Так как события A и B несовместны, то нет таких случаев, которые были бы благоприятны событиям A и B вместе.



Следовательно, событию $A+B$ будет благоприятно $m+k$ случаев.

$$P(A+B) = \frac{m+k}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} = P(A) + P(B)$$



Эту теорему можно обобщить на произвольное число несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Следствие 1.

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то их суммарная вероятность равна 1.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

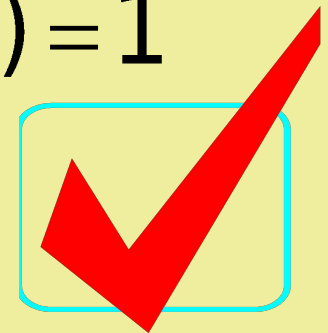
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Так как события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, то появление в опыте хотя бы одного из них будет достоверным событием. Поэтому

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1.$$

Так как эти события несовместны, то к ним применима теорема о сложении вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$



Следствие 2.

*Сумма вероятностей
противоположных событий равна 1.*

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Если события A и B совместны, то теорема о сложении вероятностей обобщается следующим образом:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Отсюда можно выразить вероятность произведения событий A и B:

$$P(AB)= P(A)+P(B)- P(A+B)$$

Пример 1.

В коллективе 40 % сотрудников принадлежат к партии любителей пива, и 20 % принадлежат к партии зеленых, причем 10 % являются одновременно членами обеих этих партий. Остальные сотрудники беспартийные. Найти вероятность того, что наугад выбранный работник будет партийным.

Решение.

Пусть событие A заключается в том, что случайно выбранный сотрудник принадлежит к партии любителей пива, а событие B - что сотрудник принадлежит к партии зеленых.

События A и B будут совместными.

Поэтому по теореме о сложении вероятностей вероятность того, что наугад выбранный сотрудник будет партийным определится по формуле

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A)=0.4, P(B)=0.2, P(AB)=0.1$$

Следовательно,

$$P(A + B) = 0.4 + 0.2 - 0.1 = 0.5$$



Пример 2.

Молодой человек рассматривает три возможности уклониться от службы в армии. Во-первых, он может поступить учиться в ВУЗ, во-вторых, он может быть освобожден от армии по состоянию здоровья, и в третьих, он может жениться и к моменту призыва обзавестись двумя детьми. Вероятности этих событий для него равны, соответственно, 0.5, 0.2 и 0.01. Считая эти события несовместными, найти вероятность того, что молодой человек не попадет в ряды призывников

Решение.

Пусть событие А заключается в том, что молодой человек поступит в ВУЗ, событие В - что он получит освобождение по состоянию здоровья и событие С - что он женится и обзаведется двумя детьми.

Т.к. эти события несовместны, то применяем теорему о сложении вероятностей в виде:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

Так как

$$P(A)=0.5$$

$$P(B)=0.2$$

$$P(C)=0.01$$

то

P

$$(A+B+C)=0.5+0.2+0.01=0$$

.7

