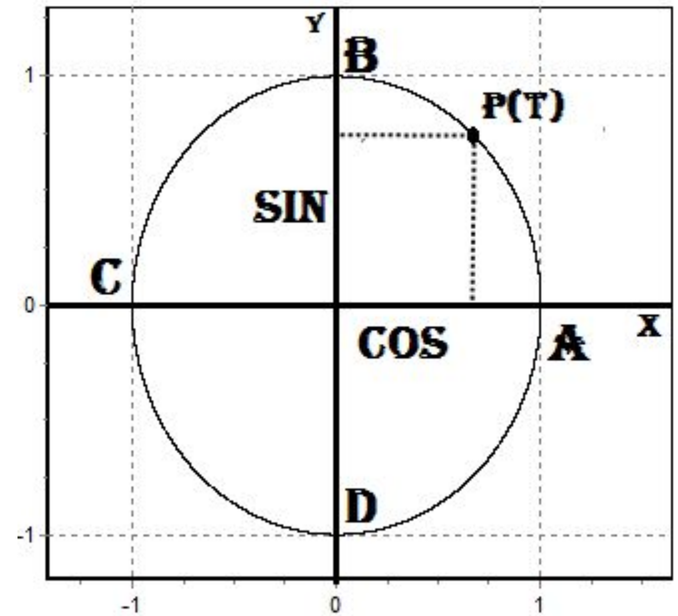
Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
СИНУС И КОСИНУС.



Синус и косинус.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение синуса и косинуса.

Определение тангенса и котангенса.

Основное тригонометрическое тождество

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

Основные свойства.

Синус и косинус в жизни.

Примеры задач.

Синус и косинус.

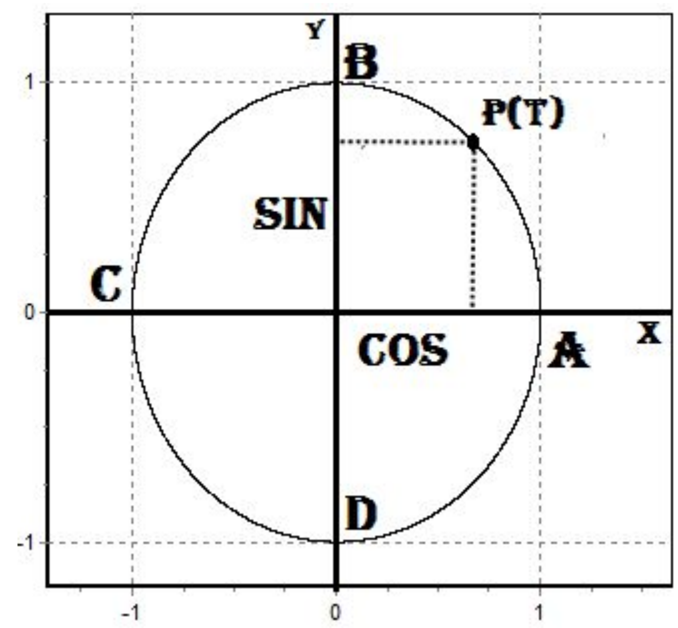
Определение.

Ребята, давайте отметим на *числовой окружности* точку **P**, посмотрите рисунок, наша точка **P** соответствует некоторому числу **t** числовой окружности, тогда ***абсциссу*** точки **P** будем называть ***косинусом*** числа **t** и обозначать **cos(t)**, а ***ординату*** точки **P** назовем ***синусом*** числа **t** и обозначим **sin(t)**.

А как будет выглядеть запись синуса и косинуса на математическом языке?

Давайте посмотрим:

Наша точка **P(t) = P(x,y)**
тогда:
X = cos(t)
Y = sin(t)



Тангенс и котангенс.

Определение.

Так же важно определить понятие тангенса и котангенса числа t числовой окружности, запишем определения:

Отношение **синуса** числа **t** к **косинусу** того же числа называют ***тангенсом*** числа **t** и обозначают **tg(t)**.
Отношение **косинуса** числа **t** к **синусу** того же числа называют ***котангенсом*** числа **t** и обозначают **ctg(t)**.

$$\operatorname{tg}(t) = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \operatorname{ctg}(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Стоит заметить, так как на 0 делить нельзя, то, для тангенса cos(t) ≠ 0, а для котангенса sin(t) ≠ 0

Синус и косинус.

Основное тригонометрическое тождество.

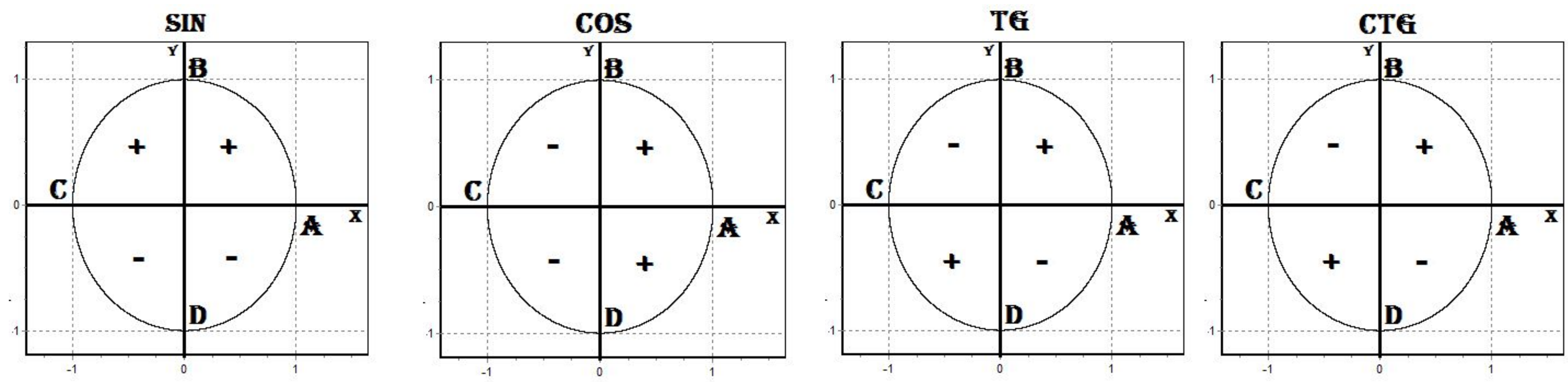
Давайте вспомним уравнение числовой окружности: $X^2 + Y^2 = 1$

нашему числу X соответствует *абсцисса* координатной плоскости, а числу Y – *ордината*, посмотрим *определение синуса и косинуса* на первом слайде и получим:

$$X^2 + Y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Важно, запомните!

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса в четвертях окружности:



Синус и косинус.

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

T	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SIN(T)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
COS(T)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
TG(T)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
CTG(T)	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.

не сущ. – не существует значение, т.к. на 0 делить нельзя

Синус и косинус.

Основные свойства.

Для любого числа t справедливы равенства:

$\sin(-t) = -\sin(t)$

$\cos(-t) = \cos(t)$

$\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}(t)$

$\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}(t)$

$\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$

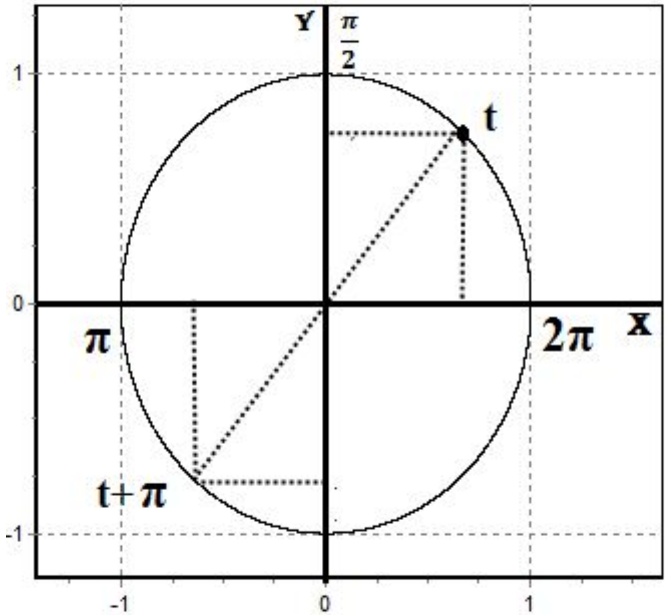
$\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$

$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$

$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$

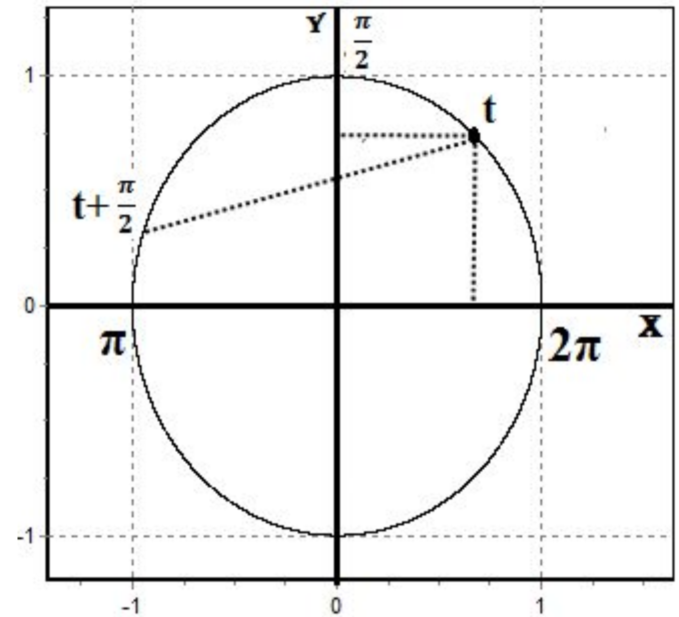
$\mathrm{tg}(t + \pi \cdot k) = \mathrm{tg}(t)$

$\mathrm{ctg}(t + \pi \cdot k) = \mathrm{ctg}(t)$



$\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$

$\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$

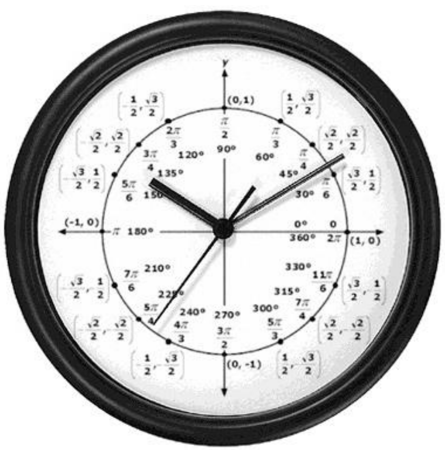


Синус и косинус.

Синус и косинус в жизни.

Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?

На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.



Синус и косинус.

Пример

Вычислить синус и косинус t при: $t = 53\pi/4$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k-целое число) соответствует одна и тоже точка числовой окружности:

$$53\pi/4 = (12 + 5/4) \cdot \pi = 12\pi + 5\pi/4 = 5\pi/4 + 2\pi \cdot 6$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$, $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$

$$\sin(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \sin(5\pi/4) = \sin(\pi/4 + \pi)$$

$$\cos(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \cos(5\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi)$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$, $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$

$$\sin(\pi/4 + \pi) = -\sin(\pi/4)$$

$$\cos(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4)$$

Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:

$$\sin(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Синус и косинус.

Пример

Вычислить синус и косинус t при: *t= -49π/3*

Решение:

Т.к. числам t и t+2π•k (k-целое число) соответствует одна и тоже точка числовой окружности то:

$$-49\pi/3 = -(16 + 1/3) \cdot \pi = -16\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi \cdot (-8)$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$, $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$

$$\sin(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \sin(-\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \cos(-\pi/3)$$

Воспользуемся свойством $\sin(-t) = -\sin(t)$, $\cos(-t) = \cos(t)$

$$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3)$$

Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:

$$\sin(-49\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-49\pi/3) = \frac{1}{2}$$

Синус и косинус.

Пример

Решить уравнение а) $\sin(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

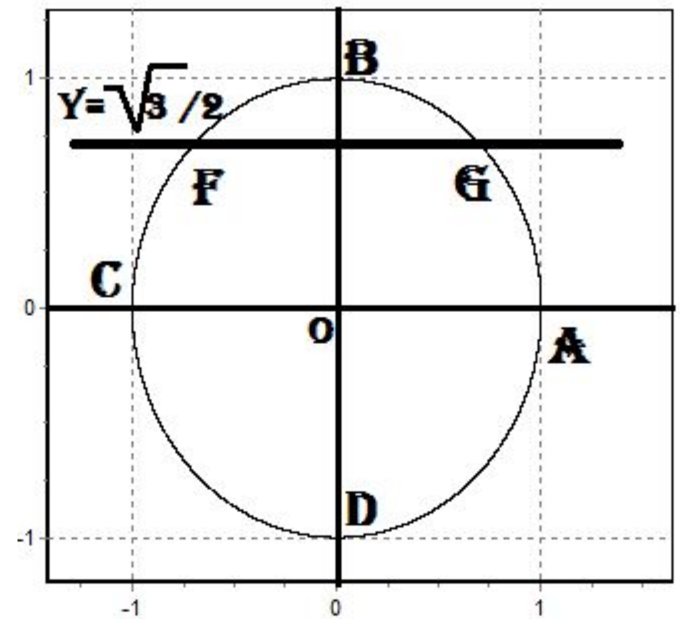
sin(t) – из определения, это ордината точки числовой окружности. Значит на числовой окружности нужно найти точки с ординатой $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t, они соответствуют - точки F и G на рисунке.

а) Точка F и G имееют координаты:
π/3 +2 π •k и 2π/3 +2 π •k

б) Уравнению y > ½ это дуга FG тогда:
π/3 +2 π •k <t<2π/3 +2 π •k

Ответ : *а) t= π/3 +2 π •k и t= 2π/33 +2 π •k*

*б)*π/3 +2 π •k <t<2π/3 +2 π •k



Синус и косинус.

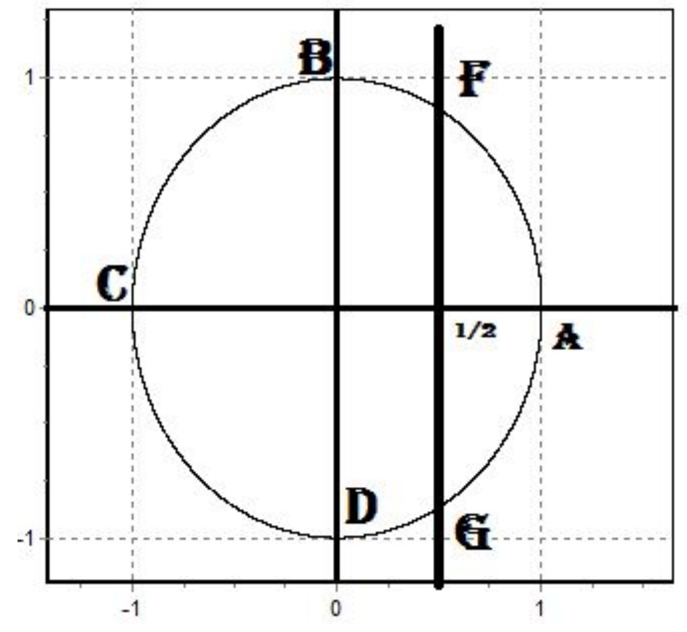
Пример

Решить уравнение а)cos(t)=1/2 б) cos(t)>1/2

cos(t) – из определения, это абсцисса точки числовой окружности.
Значит на числовой окружности нужно найти точки с абсциссой равной 1/2 и записать, каким числам t, они соответствуют – точки F и G на рисунке

а) Точка F и G соответствуют координаты:
$-\pi/3 + 2\pi \cdot k$ и $\pi/3 + 2\pi \cdot k$

б) Уравнению $x > 1/2$
соответствует дуга FG тогда:
$-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$



Ответ : а) $t = -\pi/3 + 2\pi \cdot k$ и $t = \pi/3 + 2\pi \cdot k$

б) $-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$

Синус и косинус.

Пример

Вычислить тангенс и котангенс t при: *t= -7π/3*

Решение:

Т.к. числам t и t+2π•k (k-целое число) соответствует одна и тоже точка числовой окружности то:

$$-7\pi/3 = -(2 + 1/3) \cdot \pi = -2\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi$$

Воспользуемся свойством **tg(x+ π •k) = tg(x), ctg(x+π •k) = ctg(x)**

$$\mathrm{tg}((-\pi/3) + 2\pi) = \mathrm{tg}(-\pi/3)$$

$$\mathrm{ctg}((-\pi/3) + 2\pi) = \mathrm{ctg}(-\pi/3)$$

Воспользуемся свойством **tg(-x) = -tg(x), ctg(-x) = -ctg(x)**

$$\mathrm{tg}(-\pi/3) = -\mathrm{tg}(\pi/3)$$

$$\mathrm{ctg}(-\pi/3) = -\mathrm{ctg}(\pi/3)$$

Из таблицы значений получаем:

$$\mathrm{tg}(-7\pi/3) = -\mathrm{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

$$\mathrm{ctg}(-7\pi/3) = -\mathrm{ctg}(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Синус и косинус.

Задачи для самостоятельного решения.

1) **Вычислить синус и косинус t при**: $t=61\pi/6$, $t= -52\pi/3$

2) **Решить уравнение** а) $\sin(t)= -\frac{1}{2}$, б) $\sin(t) > -\frac{1}{2}$ в) $\sin(t) < -\frac{1}{2}$

3) **Решить уравнение** а) $\cos(t) = -\frac{1}{2}$, б) $\cos(t) > -\frac{1}{2}$, в) $\cos(t) < \frac{1}{2}$,

4) **Вычислить тангенс и котангенс t при**: а) $t= 19\pi/6$ б) $t= 41\pi/4$