СХЕМА ГОРНЕРА

Занятие элективного курса
по алгебре в 10 классе.

Учитель математики Ковальчук Л.Л.
МОУ СОШ №36

2010

Схема Горнера

- Схема Горнера - это алгоритм вычисления значения многочлена при определенном значении переменной. Использование схемы Горнера значительно упрощает вычисления, а также помогает эффективно подбирать корни.

- Горнер Вильямс Джордж (1786-22.9.1837)-английский математик. Родился в Бристоле. Учился и работал там же, затем в школах Бата. Основные труды по алгебре. В 1819г. опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который называется теперь способом Руффини-Горнера (этот способ был известен китайцам еще в XIII в.) Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен $x-a$.

СХЕМА ГОРНЕРА

—способ деления многочлена n -й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

на линейный двучлен $x - a$,

основанный на том, что коэффициенты неполного частного

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$$

и остаток r связаны с коэффициентами делимого многочлена и с a формулами:

$$b_0 = a_0, \quad b_k = ab_{k-1} + a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{и} \quad r = ab_{n-1} + a_n.$$

Вычисления по схеме Горнера располагают в таблицу:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	b_0	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\dots$	$b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1}$	$r = ab_{n-1} + a_n$

Пример 1.
Разделить

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x + 3 \text{ на } x + 3.$$

	1	2	0	-4	3
-3	1	-1	3	-13	42

**Неполное частное равно $x^3 - x^2 + 3x - 13$
и остаток равен $42 = f(-3)$.**

- Основным преимуществом этого метода является компактность записи и возможность быстрого деления многочлена на двучлен. По сути, схема Горнера является другой формой записи метода группировки, хотя, в отличие от последнего, является совершенно ненаглядной. Ответ (разложение на множители) тут получается сам собой, и мы не видим самого процесса его получения. Мы не будем заниматься строгим обоснованием схемы Горнера, а лишь покажем, как она работает.

Пример2.

Докажем, что многочлен $P(x)=x^4-6x^3+7x-392$ делится на $x-7$, и найдем частное от деления.

■ Решение.

Используя схему Горнера, найдем $P(7)$:

	1	-6	0	7	-392
7	1	1	7	56	0

- Отсюда получаем $P(7)=0$, т.е. остаток при делении многочлена на $x-7$ равен нулю и, значит, многочлен $P(x)$ кратен $(x-7)$. При этом числа во второй строке таблицы являются коэффициентами частного от деления $P(x)$ на $(x-7)$, поэтому
- $P(x)=(x-7)(x^3+x^2+7x+56)$.

Разложить на множители многочлен

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 16.$$

Данный многочлен имеет целые коэффициенты. Если целое число является корнем этого многочлена, то оно является делителем числа 16. Таким образом, если у данного многочлена есть целые корни, то это могут быть только числа $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что число 2 является корнем этого многочлена, то есть $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = (x - 2)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен второй степени

	1	-5	-2	16
2	1	-3	-8	0

- Полученные числа $1, -3, -8$ являются коэффициентами многочлена, который получается при делении исходного многочлена на $x - 2$. Значит, результат деления:
 $1 \cdot x^2 + (-3)x + (-8) = x^2 - 3x - 8$. Степень многочлена, полученного в результате деления, всегда на 1 меньше, чем степень исходного. Итак:
 $x^3 - 5x^2 - 2x + 16 = (x - 2)(x^2 - 3x - 8)$.

- Например, деление по схеме Горнера многочлена $2x^3 - 4x^2 + 5$ на многочлен $x + 3$ запишется так:

	2	-4	0	5
-3	2	-10	30	-85

- В процессе деления сначала заполняется верхняя строка и крайняя левая клетка нижней строки; затем по приведенным выше формулам определяются коэффициенты частного – по очереди, начиная со старшего, – и помещаются в клетки нижней строки. Последним определяется остаток, который оказывается в крайней правой клетке. В нашем примере частное равно $2x^2 - 10x + 30$, а остаток равен -85 .)

Пример 2. Разделить, пользуясь схемой Горнера, многочлен $x^4 + 6x^2 - 5x - 3$ на двучлен $x + 1$.

Здесь $\alpha = -1$. В остальном решение выполняется так же:

	1	0	6	-5	-3
-1	1	-1	7	-12	9

Частное равно $x^3 - x^2 + 7x - 12$, остаток равен 9.

Спасибо за внимание!
Успехов!