

Электронный справочник «Способы решения квадратных уравнений»

900igr.net

Открыть

Способы решений полных квадратных уравнений.

С помощью Дискриминанта

Разложение

«Переброска»

Выделение

Свойство коэффициентов

Теорема Виета

Графическое решение

Выйти

С помощью Дискриминанта.

- Дискриминант позволяет определить сколько же корней имеет данное квадратное уравнение.

$$D = b^2 - 4ac$$

- Формула корней квадратного уравнения имеет вид:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

она позволяет найти корни любого квадратного уравнения (если они есть), в том числе приведенного и неполного.

- Таким образом, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$,
 - если $D > 0$, то имеет два различных корня;
 - если $D = 0$, то имеет единственный корень;
 - если $D < 0$, то не имеет корней.

Разложение на множители.

● Пример 1

$x^2 - 4x + 4 = 0$, разложим левую часть уравнения на множители;

$$x^2 - 2x - 2x + 4 = 0,$$

$$x(x - 2) - 2(x - 2) = 0,$$

$(x - 2)(x - 2) = 0$, произведение равно нулю, значит хотя бы один из его множителей равен нулю

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

● Пример 2

$$x^2 + 10x - 24 = 0,$$

$$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0,$$

$$x(x + 12) - 2(x + 12) = 0,$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0,$$

$$x + 12 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -12 \quad \quad \quad x = 2.$$

Ответ: -12 и 2.

Метод выделения полного квадрата.

● Пример 1

$x^2 - 4x + 4 = 0$, используем формулу сокращенного умножения;

$$(x - 2)^2 = 0,$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2

● Пример 2

$x^2 + 6x - 7 = 0$, выделим в левой части полный квадрат

$x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = 0$, первое слагаемое – квадрат числа x , а второе – удвоенное произведение x на 3, поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2 .

Преобразуем левую часть уравнения прибавляя к ней и вычитая 3^2 .

$$(x + 3)^2 - 9 - 7 = 0,$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0,$$

$$(x + 3)^2 = 16,$$

$$x + 3 = 4 \quad \text{или} \quad x + 3 = -4$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = -7.$$

Ответ: 1 и -7.

Решение уравнений с использованием теоремы Виета

- Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$.

Его корни удовлетворяют теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = q$

$$x_1 + x_2 = -p.$$

По коэффициентам можно предсказать знаки корней:

Свободный член «+»

Свободный член «-»

Назад

Свободный член положительный.

- Если свободный член приведенного уравнения положителен, то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента.

Если $q > 0$ и $p > 0$, то оба корня отрицательны.

Если $q > 0$ и $p < 0$, то оба корня положительные.

- Пример 1**

$$x^2 + 10x + 9 = 0,$$

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -9,$$

т.к. $q = 9 > 0$ и $p = 10 > 0$;

- Пример 2**

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = 3,$$

т.к. $q = 9 > 0$ и $p = -6 < 0$.

Свободный член отрицательный.

- Если свободный член приведенного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня.

Если $q < 0$ и $p > 0$, то больший по модулю корень будет отрицателен.

Если $q < 0$ и $p < 0$, то больший по модулю корень будет положителен.

- Пример 1**

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$x_1 = -4 \text{ и } x_2 = 2,$$

т.к. $q = -8 < 0$ и $p = 2 > 0$;

- Пример 2**

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -3,$$

т.к. $q = -15 < 0$ и $p = -2 < 0$.

Решение уравнения способом «переброски».

- Умножая обе части квадратного уравнения на a , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть $ax = y$, откуда $x = \frac{y}{a}$; тогда получим уравнение $y^2 + by + ac = 0$, равносильное данному. С помощью теоремы Виета найдем корни: y_1 и y_2 , где $y_1 y_2 = ac$ и $y_1 + y_2 = -b$.

Окончательно получаем $x_1 = \frac{y_1}{a}$ $x_2 = \frac{y_2}{a}$.

При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски».

Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

- Пример**

$2x^2 - 11x + 15 = 0$, «перебросим» коэффициент 2 к свободному члену:

$y^2 - 11y + 30 = 0$, согласно теореме Виета найдем корни:

$$y_1 y_2 = 30 \text{ и } y_1 + y_2 = 11,$$

$y_1 = 5$ и $y_2 = 6$, окончательно получим:

$$x_1 = 5/2 \text{ и } x_2 = 6/2,$$

$$x_1 = 2,5 \text{ и } x_2 = 3.$$

Ответ: 2,5 и 3.

Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

- Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Первое свойство

Второе свойство

Третье свойство

Назад

Первое свойство коэффициентов.

- Если сумма коэффициентов равна нулю, т.е. $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
- Доказательство: Разделим обе части уравнения на a , получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
- Согласно теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
- По условию, $a + b + c = 0$, тогда $b = -a - c$. Значит,
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \cdot \frac{c}{a}$, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{-a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$.
- Получаем $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$, что и требовалось доказать.
- Пример**

$$3x^2 + 5x - 8 = 0,$$

$$\text{т.к. } a + b + c = 0$$

$$(3 + 5 - 8 = 0), \text{ то получим}$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{3}$$

$$\text{Ответ: } 1 \text{ и } -\frac{8}{3}$$

Второе свойство коэффициентов.

- Если $a - b + c = 0$, или $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Доказательство аналогично.

- Пример**

$$11x^2 + 27x + 16 = 0,$$

Т.к. $a - b + c = 0$ ($11 - 27 + 16 = 0$), значит

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{16}{11}.$$

Ответ: -1 и $-\frac{16}{11}$

Третье свойство коэффициентов.

- Если второй коэффициент $b = 2k$ четное число, то формулу корней можно записать в виде $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

- Пример**

$$4x^2 - 36x + 77 = 0,$$

$$a = 4, b = -36, c = 77, k = -18;$$

$$D = k^2 - ac = (-18)^2 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16, \quad D > 0, \text{ два различных корня;}$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{18 \pm 4}{4}$$

$x_1 = 5,5, \quad x_2 = 3,5$

Ответ: 5,5 и 3,5.

Графическое решение квадратных уравнений.

- Преобразуем уравнение $x^2 + px + q = 0$ и получим вид: $x^2 = -px - q$.
- Построим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = -px - q$.
- График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат.
- График второй зависимости – прямая . ([приложение 1, рис.1](#)).

Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться и имеют одну общую точку, значит уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Примеры

Назад

Примеры.

● Пример 1

$x^2 - 3x - 4 = 0$, запишем уравнение в виде $x^2 = 3x + 4$, рассмотрим графики зависимостей $y = x^2$ и $y = 3x + 4$,

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Прямую $y = 3x + 4$ построим по двум точкам $M(0; 4)$ и $N(3; 13)$ ([приложение 1, рис.2](#)).

Прямая и парабола пересекаются в двух точках А и В с абсциссами $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$.

Ответ: -1 и 4.

● Пример 2.

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

Построим параболу $y = x^2$ по координатам (см. таблицу выше) и прямую

$y = 2x - 1$ по двум точкам $M(0; -1)$ и $N(1; 0)$ ([приложение 1, рис.3](#)).

Прямая и парабола пересекаются в точке А с абсциссой $x = 1$.

Ответ: 1.

● Пример 3.

$$x^2 - 2x + 5 = 0,$$

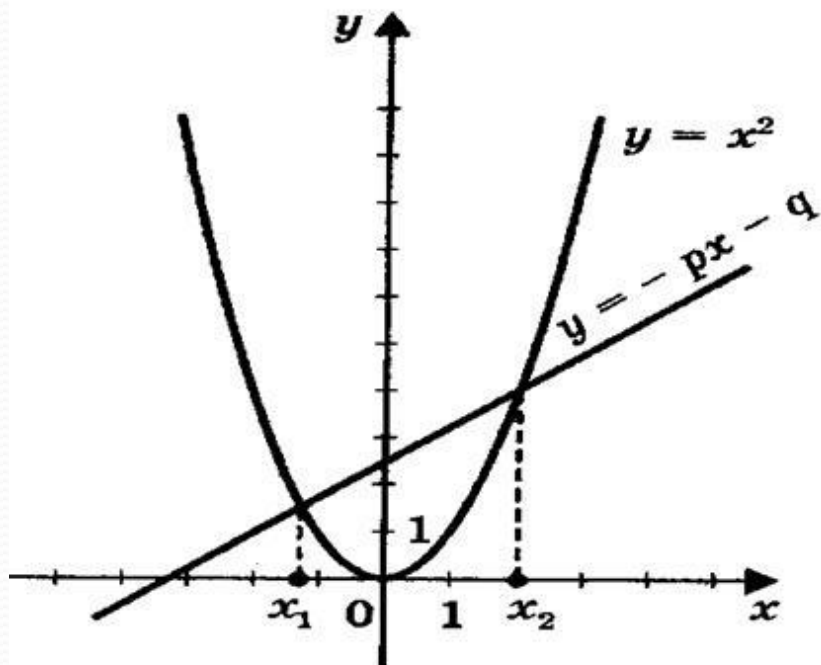
Построим параболу $y = x^2$ по координатам (см. таблицу выше) и прямую

$y = 2x - 5$ по двум точкам $M(0; -5)$ и $N(2,5; 0)$ ([приложение 1, рис.4](#)).

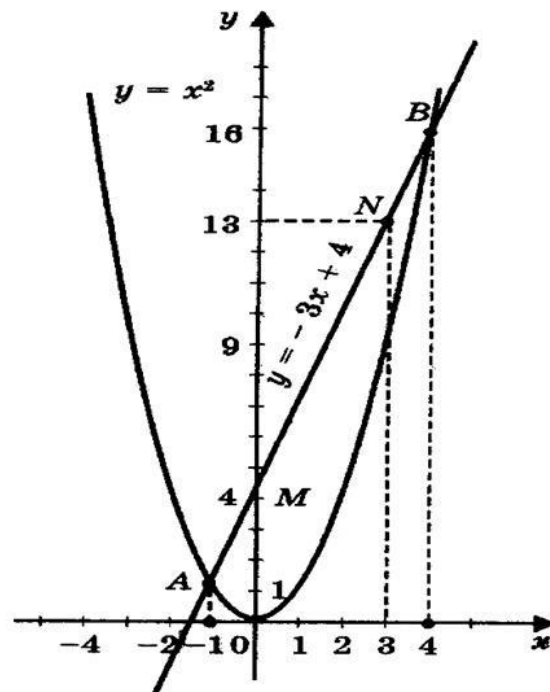
Прямая и парабола не имеют точек пересечения, значит данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Приложение.

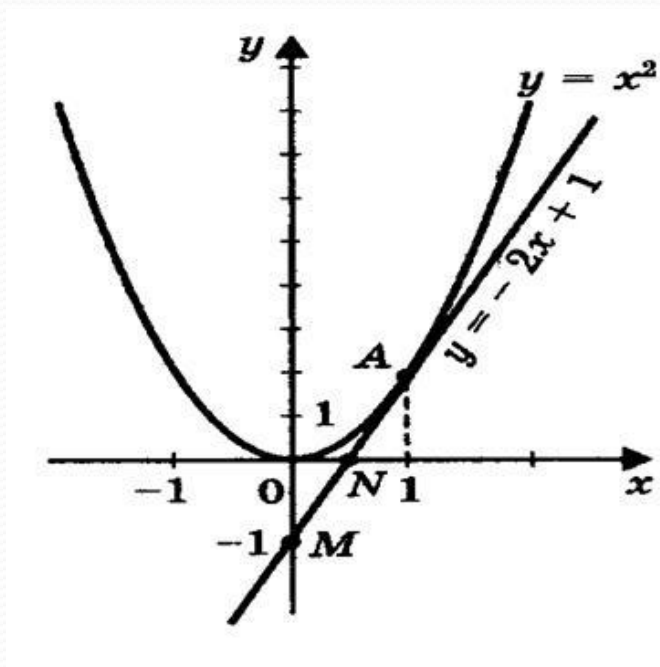


● Рисунок 1

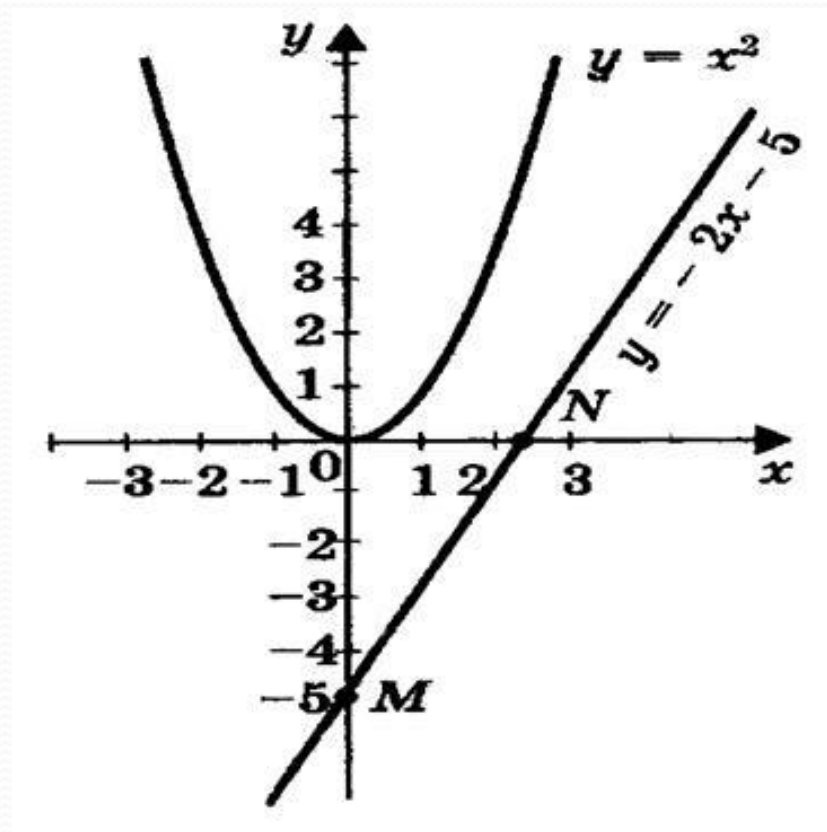


● Рисунок 2

Приложение.



● Рисунок 3



● Рисунок 4

Назад



Спасибо за
внимание!