

По геометрическому смыслу производной, значение производной функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$ равно $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Таким образом, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = 1$.

План нахождения производной функции $f(x) = e^x$.

1. Находим приращение функции Δf :

$$\Delta f = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1);$$

2. Вычислим отношение приращения функции к приращению аргумента $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Тогда по определению производной получаем:

$$y' = e^x \quad \text{или} \quad (e^x)' = e^x$$

любом при x .

По основному логарифмическому тождеству
 $x = e^{\ln x}$

при всех положительных x , т.е. в этом равенстве справа и слева стоит одна и та же функция, определенная на $\mathbb{R}_+$. Поэтому производные x и $e^{\ln x}$ равны.

$x' = 1$. Производную правой части вычисляем по правилу нахождения сложной функции

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} (\ln x)' = x \cdot (\ln x)'. \text{ Имеем } 1 = x \cdot (\ln x)'$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N, \quad N > 0, a > 0, a \neq 1.$$

1. Найдите числовое значение:

$$a^{\log_a 2}$$

$$a^{3 \log_a 2}$$

$$e^{2 \ln x}$$

2. Представъте в виде степени с основанием **e**:

4

6

a

4^x

6^x

a^x

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N, \quad N > 0, a > 0, a \neq 1.$$

1. Найдите числовое значение:

$$a^{\log_a 2}$$

2

$$a^{3 \log_a 2}$$

8

$$e^{2 \ln x}$$

$$x^2$$

2. Представьте в виде степени с основанием e :

4

$$e^{\ln 4}$$

6

$$e^{\ln 6}$$

a

$$e^{\ln a}$$

4^x

$$e^{x \ln 4}$$

6^x

$$e^{x \ln 6}$$

a^x

$$a^{x \ln a}$$

Найдем производные полученных функций:

$$(e^{x \ln 4})' = e^{x \ln 4} \cdot \ln 4 = 4^x \ln 4$$

$$(e^{x \ln 6})' = e^{x \ln 6} \ln 6 = 6^{x \ln 6}$$

$$(a^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a$$

$$(a^{x \ln a})' = a^x \cdot \ln a$$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Найти производную: а) $(\log_2 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 2} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 2}$;

б) $(\log_3 x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \left(\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln 3}$;

в) $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

I уровень

Задание	Ответы			
	1	2	3	4
1. Найдите значение производной функции при $x = 0$. а) $y = 3^x$	0	$\ln 3$	1	-1
б) $y = x^{2^x}$	-2	-1	1	2
в) $y = \log_2(x + 1)$	- $\frac{1}{\ln 2}$	$\frac{1}{\ln 2}$	1	-1
2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2^x + \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.	$\ln 2$	- $\ln 2$	1	$\frac{1}{\ln 2}$

II уровень.

1. Найдите значение $f'(e^2)$, если $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

- 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) e^2 ; 4) e^4

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 5\operatorname{tg}x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Ответ : _____

3. Докажите, что функция $y = \log_3(1 - 3x)$ убывает на $D(y)$.

I уровень

1. Найдите значение производной функции при $x = 0$.

а) $y = 3^x$. Решение. $(3^x)' = 3^x \ln 3$. $f'(0) = 3^0 \ln 3 = \ln 3$. **Ответ: 2.**

б) $y = x \cdot 2^x$. Решение. $(x \cdot 2^x)' = 2^x + (2^x)' \cdot x = 2^x + 2^x \ln 2 \cdot x$.
 $f'(0) = 2^0 + 0 \cdot 2^0 \ln 2 = 1$. **Ответ: 3.**

в) $y = \log_2(x + 1)$. Решение. $(\log_2(x + 1))' = \frac{1}{(x + 1) \ln 2}$.

$f'(0) = \frac{1}{(0 + 1) \ln 2} = \frac{1}{\ln 2}$. **Ответ: 2.**

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 2^x + \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$. Найдем производную функции $f'(x) = (2^x + \cos x)' = 2^x \ln 2 - \sin x$. $K = f'(0) = 2^0 \ln 2 - \sin 0 = \ln 2$. **Ответ: 1.**

II уровень

1. Найдите значение $f'(e^2)$, если $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Решение. $f'(x) = \frac{x' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

$$f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1.

2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 5 \lg x - \cos x$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.

Решение. Так как тангенс угла наклона касательной равен $f'(x_0)$. Найдем производную функции: $y' = (5 \lg x - \cos x)' = 5 \lg x - \cos x \ln 5 \cdot \left(\frac{1}{(\cos x)^2} + \sin x \right)$.

$$\operatorname{tg} \alpha = 5 \lg 0 - \cos 0 \ln 5 \cdot \left(\frac{1}{(\cos 0)^2} + \sin 0 \right) = 5^{-1} \ln 5 \cdot 1 = \frac{\ln 5}{5}.$$

Ответ: $\frac{\ln 5}{5}$.

3. Докажите, что функция $y = \log_3(1 - 3x)$ убывает на $D(y)$.

Решение. Область определения данной функции промежуток $-\infty; \frac{1}{3}$);

$$y'(x) = \frac{-3}{(1-3x)\ln 3} < 0 \text{ на интервале } -\infty; \frac{1}{3} \text{), следовательно, функция}$$

$y = \log_3(1 - 3x)$ убывает на $D(y)$.