

Производная и графики функций



Курышова Н. Е. СТПб лицей 488

Доказать, что ϕ функция монотонна на заданном промежутке:

$$y = 4x - 2008; \text{ если } x \in \mathbb{R};$$

$$y = -2x + \sin x; \text{ если } x \in \mathbb{R};$$

$$y = x^5 + x^3 - 448; \text{ если } x \in \mathbb{R}.$$

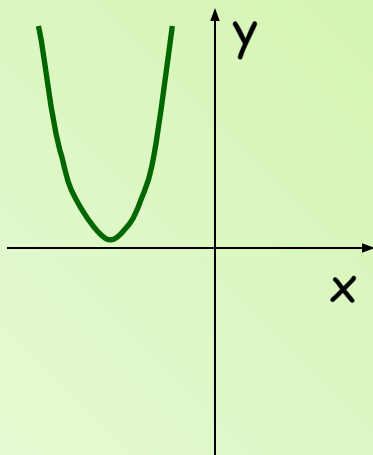


Дана непрерывная на $\mathbb{R}$ функция.
Используя график производной этой
функции, определите, имеет ли функция
точки экстремума.

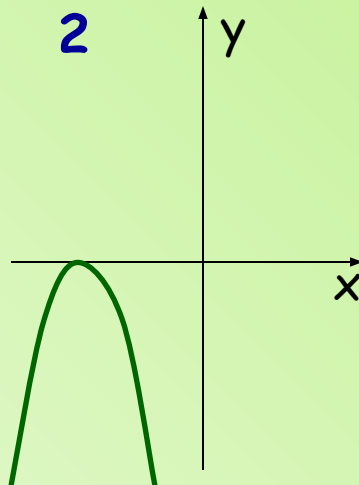


Найти пары $(f(x); f'(x))$.

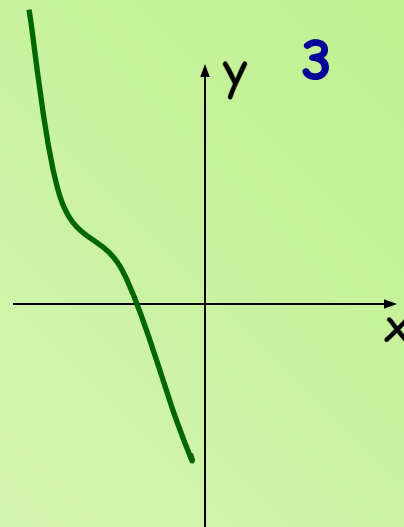
1



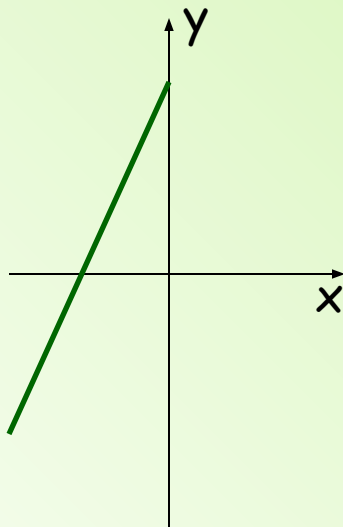
2



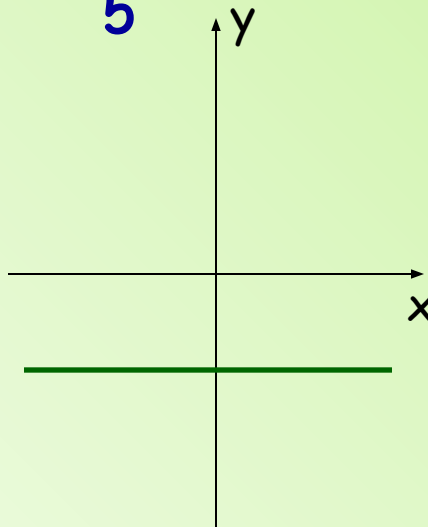
3



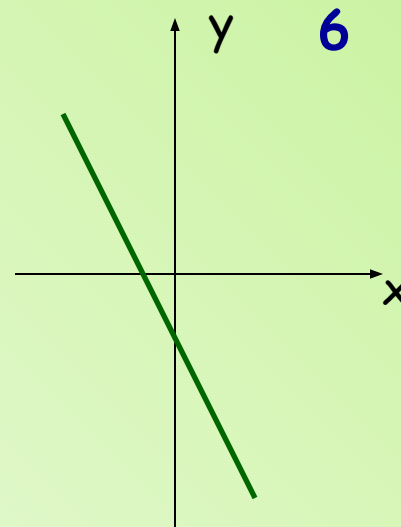
4



5



6

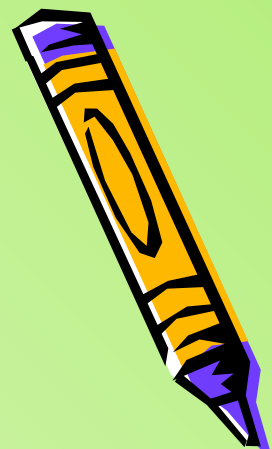


$(1; 4); (3; 2); (6; 5)$

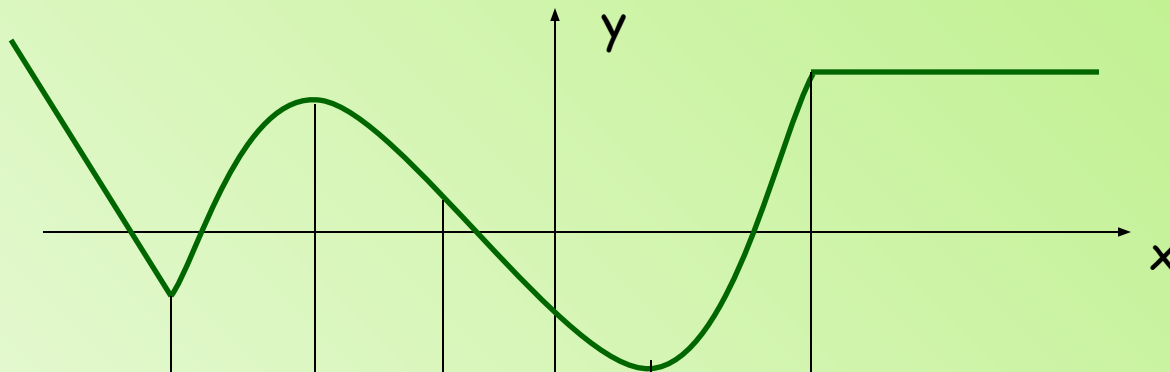


Нарисовать эскизы графиков

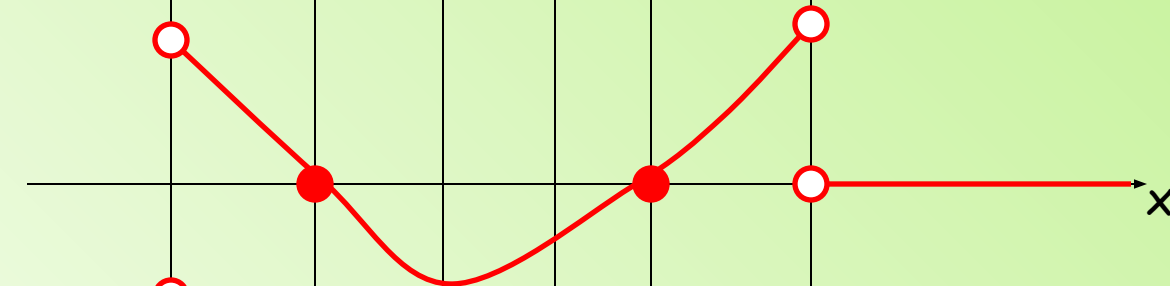
$f'(x)$ и $f''(x)$



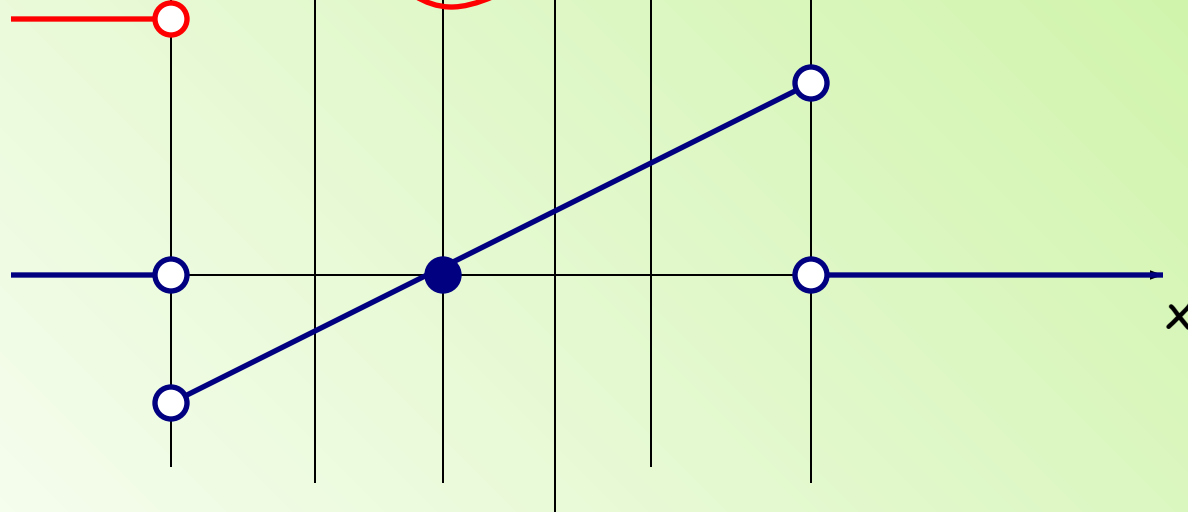
$y = f(x)$



$y = f'(x)$

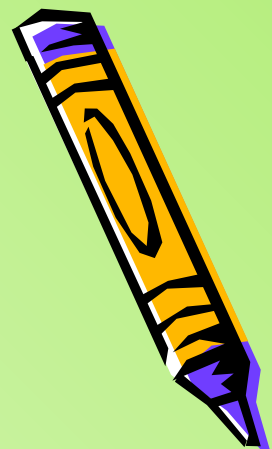


$y = f''(x)$



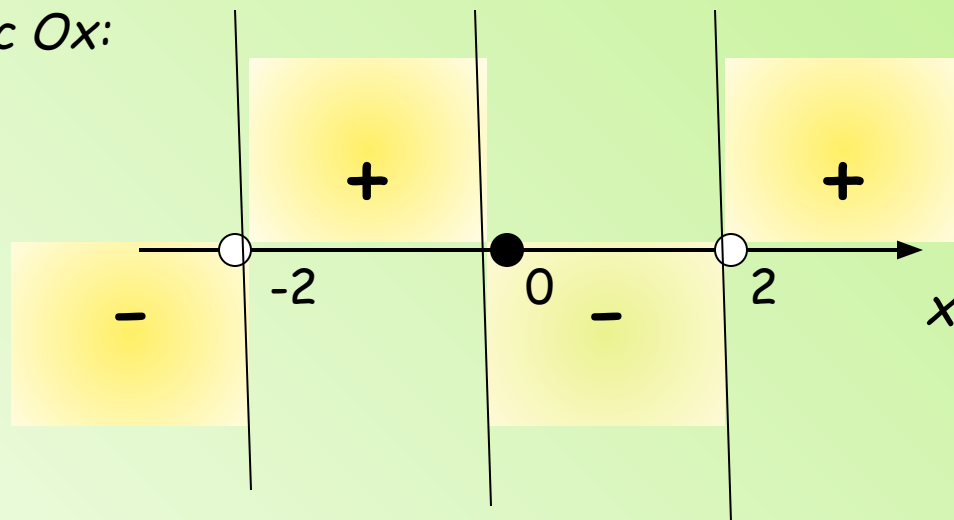
Исследовать функцию
и построить её график

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$



$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty);$$

2. Функция нечётная, график симметричен относительно начала отсчёта.
3. Точки пересечения с осями: с Oy : $(0; 0)$; с Ox : $(0; 0)$.
4. Промежутки знакопостоянства функции:



5. Вертикальные асимптоты:

$x=2$ и $x=-2$, так как

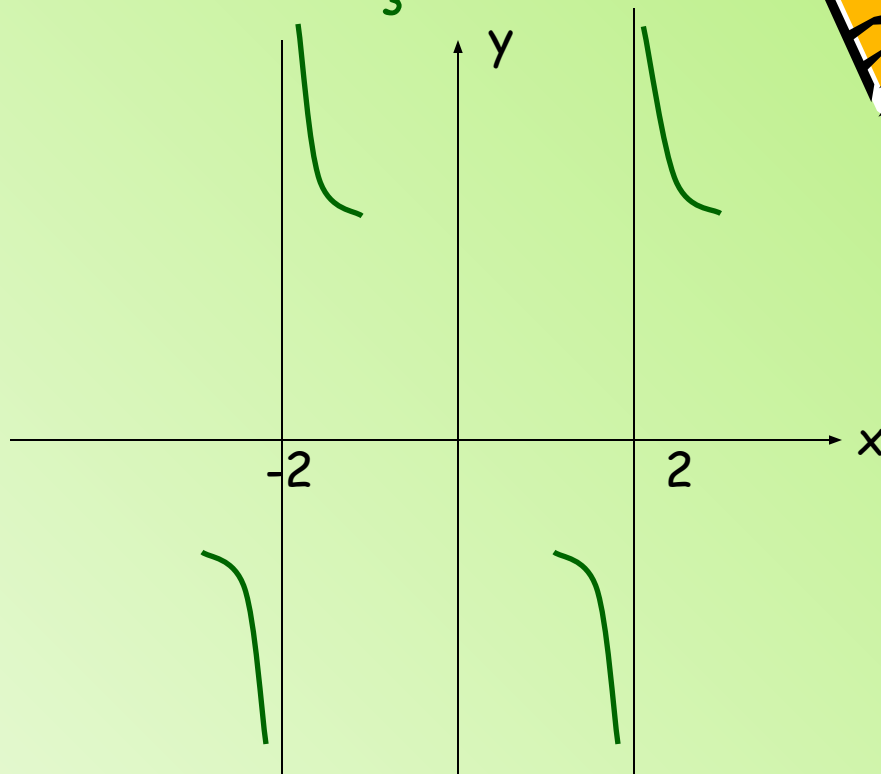
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left| \frac{8}{0} \right| = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2_-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2_+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \left| \frac{-8}{0} \right| = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2_-} \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2_+} \frac{x^3}{x^2 - 4} = +\infty.$$

ЭСКИ
3



6. Наклонные асимптоты

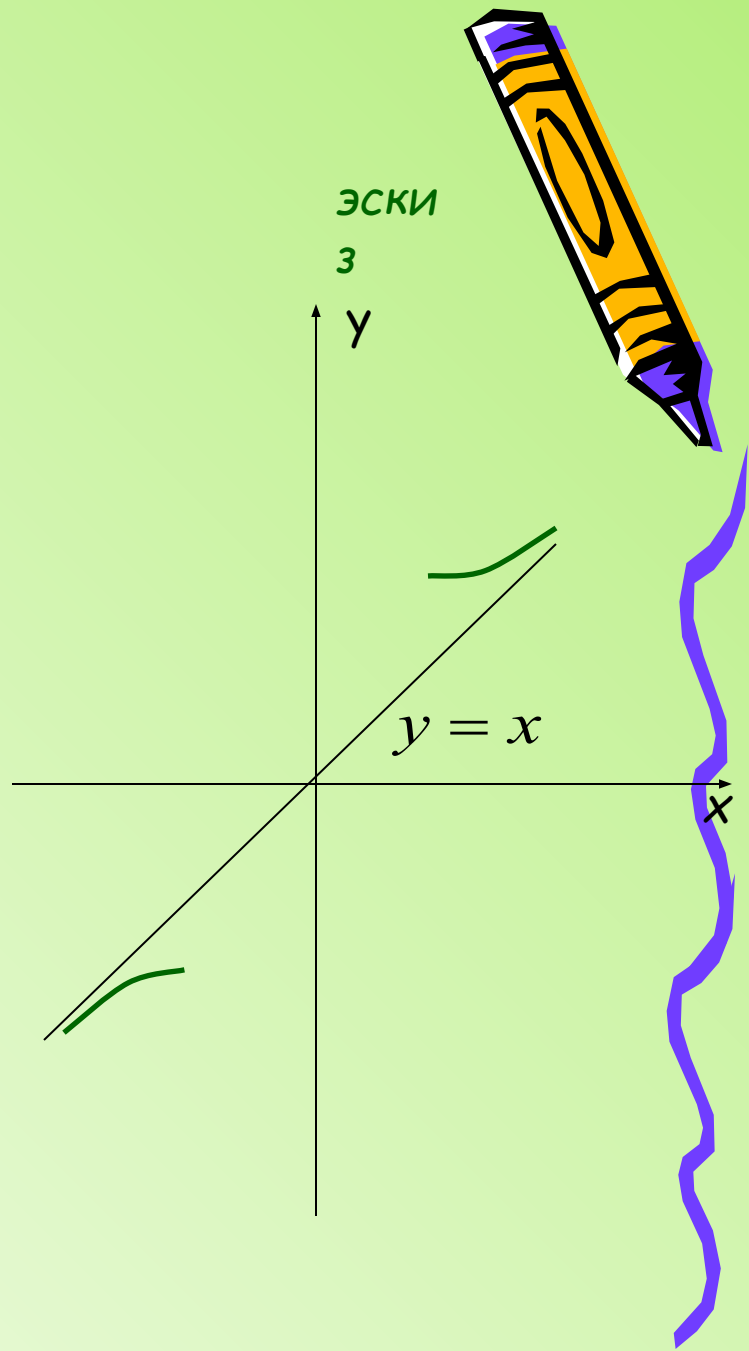
$$y = x$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 4)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 4)x} = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0_+;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2 - 4} = 0_-.$$



7. Исследование на монотонность и наличие точек экстремума.

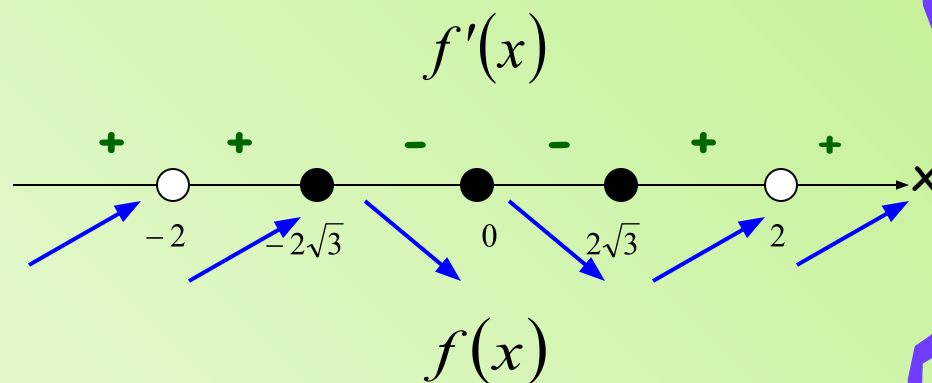
$$f'(x) = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2 - 4)^2};$$

$$f'(x) = 0, \text{ если } x^4 - 12x^2 = 0$$
$$x^2 = 0; \quad x = \pm 2\sqrt{3}.$$

$f'(x)$ — не существует, если

$$(x^2 - 4)^2 = 0,$$
$$x = 2; \quad x = -2.$$

$x = -2\sqrt{3}$ — точка локального максимума
 $f(-2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$



$x = 2\sqrt{3}$ — точка локального минимума
 $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$

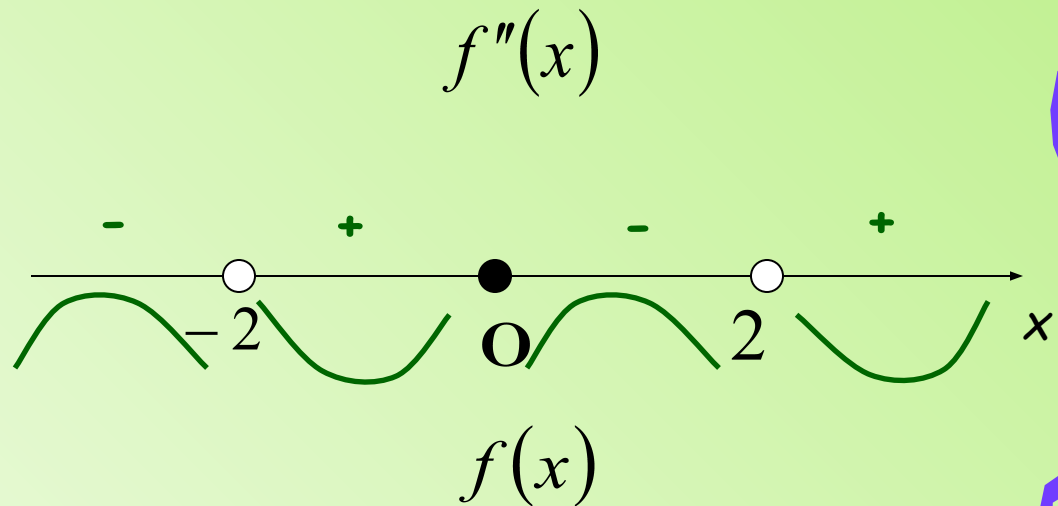
Исследование на направление выпуклостей и
наличие точек перегиба.



$$f''(x) = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3};$$

$$f''(x) = 0, \text{ если } x = 0.$$

$f''(x)$ – не существует, если
 $x = -2, x = 2$



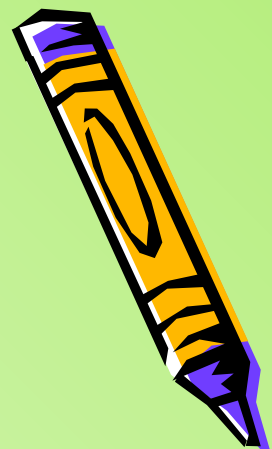
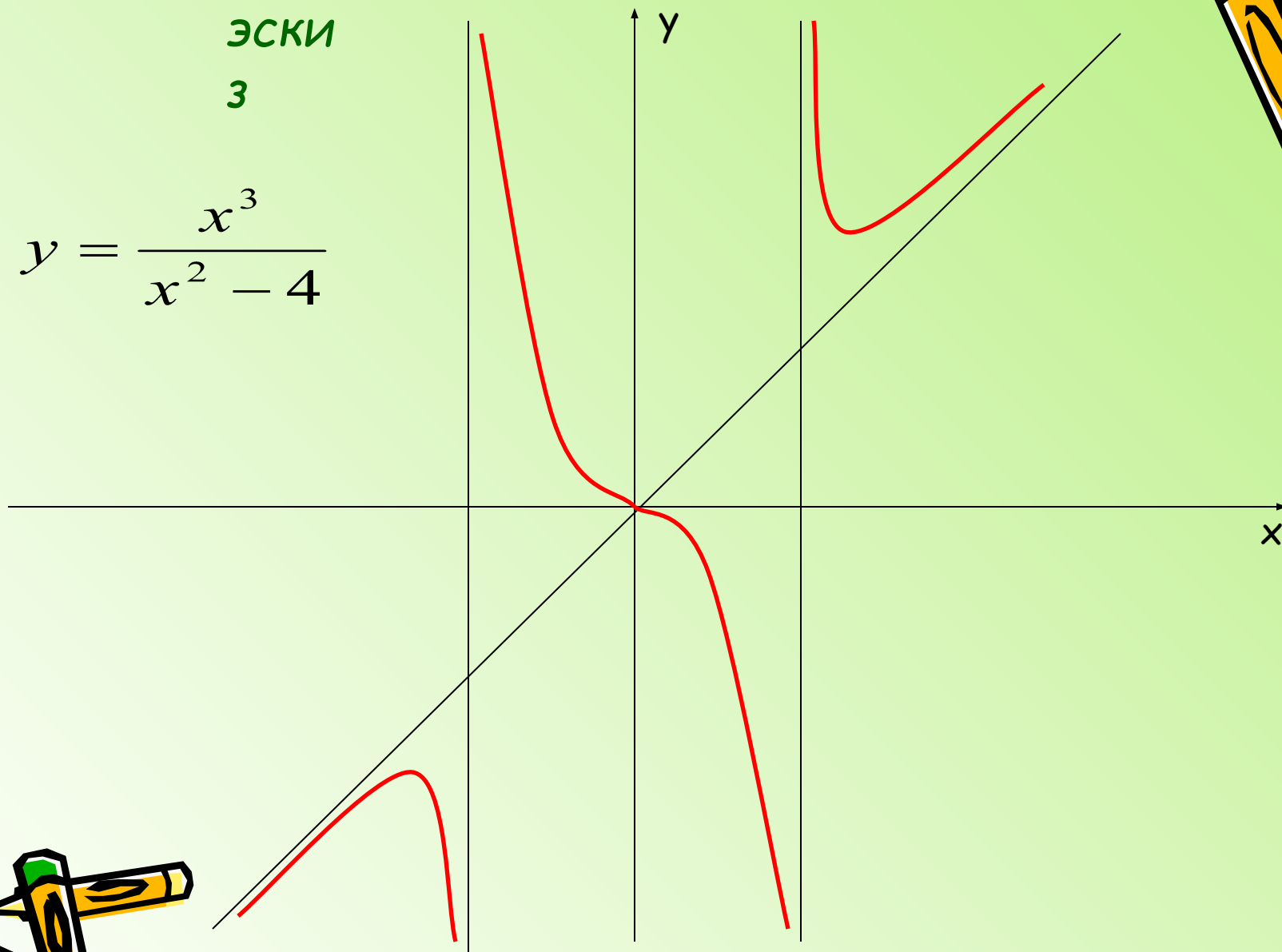
$(0; f(0))$ – точка перегиба



Эскиз

3

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$



*Спасибо за
внимание!*

