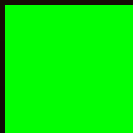




Арифметическая и геометрическая прогрессии в окружающей нас жизни

Работа учеников 9 классов
Казариной Анастасии, Кожина Дмитрия,
Лысковской Татьяны, Спиридонова Александра
и Тюрина Владимира,
Руководитель работы учитель математики
Паршева Валентина Васильевна.



©Казарина Анастасия, Лысковская Татьяна

Аннотация проекта

В работе дается ответ на вопрос: действительно ли прогрессии играют большую роль в повседневной жизни? Для этого сделан анализ сделан исторический экскурс для установления авторства теории о прогрессиях. Приведены примеры применения прогрессий в различных отраслях хозяйства. Сделан анализ влияния размножения живых организмов в геометрической прогрессии на жизнь на Земле.

Актуальность исследования (Почему это важно для нас?):

- В 9 классе мы изучаем прогрессии: дали определение, научились находить по формулам любой член прогрессии, сумму первых членов прогрессии. Найдя ответы на вопросы: имеет ли это какое - либо практическое значение и как давно люди знают последовательности, как возникло это понятие, мы подтвердим или опровергнем утверждение о том, что математика — наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека, что алгебра является частью общечеловеческой культуры.

Проблемный вопрос:
Действительно ли прогрессии играют
большую роль в повседневной жизни?

- **Объект исследования:** последовательности: арифметическая и геометрическая прогрессии.
- **Предмет исследования:** практическое применение этих прогрессий

Гипотеза исследования:

На уроках математики мы много раз слышали о том, что математика — наука очень древняя и возникла она из практических нужд человека. Видимо, и прогрессии имеют определенное практическое значение.

Цель исследования:

установить картину возникновения
понятия прогрессии и выявить примеры
их применения.

Задачи исследования	Методы исследования
1. Изучить наличие задач на прогрессии с практическим содержанием в различных учебных пособиях.	Анализ школьных учебников математики.
2. Выяснить: - когда и в связи с какими потребностями человека появилось понятие последовательности, в частности -прогрессии; - какие ученые внесли большой вклад в развитие теоретических и практических знаний по изучаемой проблеме.	Анализ школьных учебников математики, математической, справочной литературы, литературы по истории математики, материала из Интернета.
3. Установить факты широкого применения интенсивного размножения бактерий в геометрической прогрессии в пищевой промышленности, в медицине, в фармакологии, в сельском и коммунальном хозяйствах. Найти примеры применения прогрессий в нашей жизни.	Обобщение найденных фактов в учебниках по биологии и по экологии и в медицинских справочниках.

ПоПо_По страницам
школьных
учебников

Последовательности:
путешествие
в глубь веков

Прогрессии
в природе

Прогрессии
в банковских
расчетах и в
промышленности

Прогрессии
в старых учебниках
по математике

Прогрессии в книгах
по занимательной
математике

Выводы и источники информации

Задачи с практическим содержанием из современных учебников по алгебре

- Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Суворова С.Б./ под ред. С.А. Теляковского . -М.: Просвещение, 2009, -271с. № 581, 582, 583, 598, 614, 616, 629, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 674 (14 задач).
- Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феактистов И.Е. . -М.: Мнемозина, 2008, -447с. № 698, 699, 702, 725, 734, 788, 789 (7 задач)
- Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных. 9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений/ Г.В. Дорофеев , С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г.В. Дорофеева.-М.:Дрофа, 2000,-352с.: № 511, 514, 515, 527(в-г), 539, 540, 542, 543, 563-566, 573-578, 591, 595 - 601, 604, 605, 620, 622-626, 628, 638 - 643, 645, 647, 648, 650, 651, 653-659 (54 задачи).
- Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г., П.В. Семенов , -М.: Мнемозина, 2010, -224с : № 16.63-16.66, 17.35, 17.46, 17.51. 17.58 (8 задач).

Арифметическая прогрессия —

числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего увеличением его на определённое число.

Имеет вид: $a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, \dots, a_1+(n-1)d, \dots$

Геометрическая прогрессия — последовательность чисел, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число.

Имеет вид: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$

Вывод характеристических свойств арифметической и геометрической прогрессий

$$a_n - a_{n-1} = d;$$

$$a_{n+1} - a_n = d;$$

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$b_n : b_{n-1} = d;$$

$$b_{n+1} : b_n = d;$$

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n$$

$$b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$



Формулы

Арифметическая прогрессия

$$1. a_n = a_1 + d(n-1);$$

$$2. a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2};$$

$$3. d = a_{n+1} - a_n;$$

$$4. S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$5. S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

$$1. b_n = b_1 q^{(n-1)};$$

$$2. b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}};$$

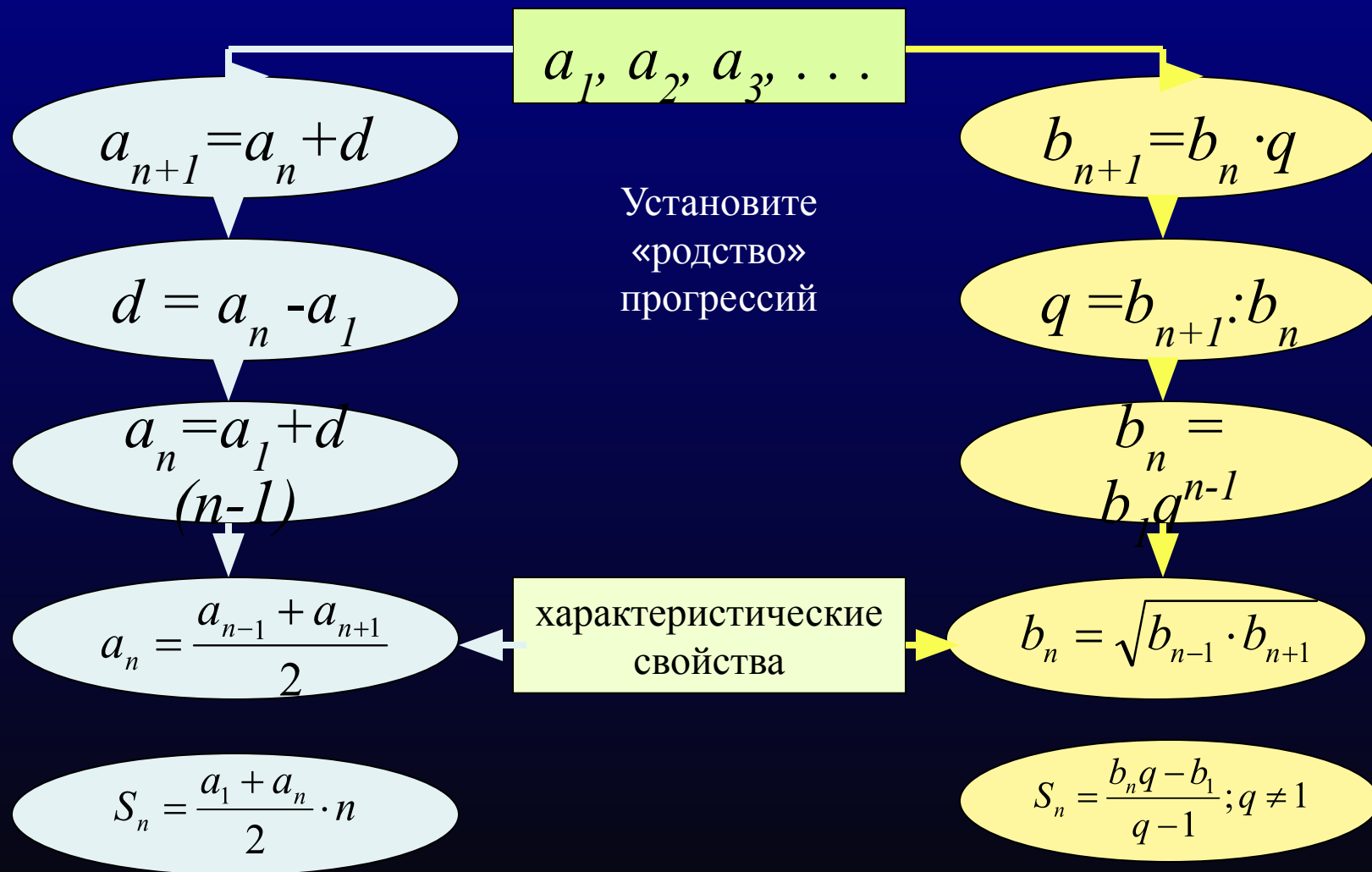
$$3. q = \frac{b_{n+1}}{b_n};$$

$$4. S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1};$$

$$5. S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1;$$

$$6. S_n = \frac{b_1}{1 - q}, |q| \leq 1;$$

Информационная модель (схема) сравнения арифметической и геометрической прогрессий



Сравнение арифметической и геометрической прогрессий

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$d = a_n - a_1$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Прочитав определения арифметической и геометрической прогрессий можно обратить внимание на то, что они похожи. Надо лишь заменить сложение умножением. А зная формулу n-го члена арифметической прогрессии, можно получить формулу для геометрической прогрессии, если заменить сложение умножением и умножение

—
возведением в степень

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

$$q = b_{n+1} : b_n$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Определения (оба сразу!)

Числовая последовательность, каждый
член которой, начиная со второго,
равен предшествующему члену,
сложенному с одним и тем же числом,
умноженному на одно и то же число,
называется арифметической прогрессией
геометрической

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

“Родство” прогрессий становится еще более заметным, если сравнить их характеристические свойства.

Здесь тоже достаточно заменить сложение умножением, а деление на два - извлечением корня второй степени, и из характеристического свойства арифметической прогрессии получится характеристическое свойство геометрической прогрессии

Характеристические свойства арифметической и геометрической прогрессий (оба сразу!)

Любой член арифметической прогрессии,
геометрической

начиная со второго, является

средним арифметическим
геометрическим

предшествующего и последующего членов.

**Имеют ли
арифметическая и геометрическая
прогрессии
прикладное значение?**

Задача № 468

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г., П.В. Семенов, -М.: Мнемозина, 2010, -224с.(с.100)]

- В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах — одно штрафное очко, за каждый последующий — на 0,5 очка больше, чем за предыдущий. Сколько раз попал в цель стрелок, получивший 7 штрафных очков?

- **Решение.** Составим математическую модель задачи. Система штрафных очков составляет арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, а разность – 0,5. Сумма первых n членов (количество промахов) равно 7. Найдем число промахов - n .

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

$$7 = \frac{2 \cdot 1 + 0,5(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$14 = (2 + 0,5n - 0,5)n;$$

$$14 = 1,5n + 0,5n^2;$$

$$n^2 + 3n - 28 = 0;$$

$$n = -7, n = 4;$$

$$n \geq 0$$

Число промахов - 4.

В цель стрелок
попал 21 раз.

Задача №469.

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/
Мордкович А.Г., П.В. Семенов, -М.: Мнемозина, 2010, -224с.(с.100)

- Больной принимает лекарство по следующей схеме: в первый день он принимает 5 капель, а в каждый следующий день — на 5 капель больше, чем в предыдущий. Приняв 40 капель, он 3 дня пьет по 40 капель лекарства, а потом ежедневно уменьшает прием на 5 капель, доведя его до 5 капель. Сколько пузырьков лекарства нужно купить больному, если в каждом содержится 20 мл лекарства (что составляет 250 капель)?

▣ **Решение.** Составим математическую модель задачи:

5, 10, 15,...,40, 40, 40, 35, 30,...,5

возрастающая
арифметическая
прогрессия

$$a_n = a_1 + (n-1)d, d=5$$

$$40 = 5 + 5(n-1),$$

$$n=8,$$

$$S_n = ((a_1 + a_n)n)/2, \quad S_8 = (5+40) \cdot 8 : 2 = 180,$$

убывающая
арифметическая
прогрессия

$$c_1 = 5, d = -5$$

180 капель больной принимал по схеме в первый период и столько же по второй период. Всего он принял $180+40+180=400$ (капель), всего больной выпьет $400:250=1,6$ (пузырька). Значит, надо купить 2 пузырька лекарства.

Задача №470

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/
Мордкович А.Г., П.В. Семенов, -М.: Мнемозина, 2010, -224с.(с.100)

- ▣ Улитка ползет по дереву. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. За какое время достигнет улитка вершины дерева длиной 5,25 м, если считать, что движение начато от его основания?

- ▣ **Решение.** $a_1=30$, $d=5$, $S_n=525$, $n>0$.

$$S_n = (2a_1 + d(n-1))n:2; \quad 525 = (2 \cdot 30 + 5(n-1))n:2; \quad 1050 = (60 + 5(n-1))n;$$

$$1050 = 55n + 5n^2;$$

$$n^2 + 11n - 210 = 0, \quad n_1 = -21, \quad n_2 = 10 \quad (n > 0).$$

Улика достигнет вершины за 10 дней.

Задача № 471

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений/
Мордкович А.Г., П.В. Семенов, -М.: Мнемозина, 2010, -224с.(с.100)

- Альпинисты в первый день восхождения поднялись на высоту 1400 м, а затем каждый следующий день они проходили на 100 м меньше, чем в предыдущий. За сколько дней они покорили высоту в 5000 м?

- ▣ **Решение.** Составим математическую модель задачи: 1400, 1300, ..., $1400 - 100(n-1)$. $a_1 = 1400$; $d = -100$, $S_n = 5000$. Надо найти n .

$$S_n = (2a_1 + d(n-1))n:2;$$

$$5000 = (2 \cdot 1400 - 100 \cdot (n-1))n:2;$$

$$10000 = (2800 - 100n + 100)n;$$

$$10000 = (2900 - 100n)n;$$

$$100n^2 - 2900n + 10000 = 0;$$

$$n^2 - 29n + 100 = 0; \quad n = 25, \quad n = 4.$$

Условию задачи удовлетворяет
 $n = 4$ (при $n = 25$ $a_n = -1000$, но $a_n > 0$)
Значит, альпинисты покорили
высоту за 4 дня.

Ответ: за 4 дня.

Задача № 472

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2. Учебник для общеобразовательных учреждений / Мордкович А.Г., П.В. Семенов, -М.: Мнемозина, 2010, -224с.(с.100)

- За изготовление и установку самого нижнего железобетонного кольца колодца заплатили 26 условных единиц (у. в.). а за каждое следующее кольцо платили на 2 у. е. меньше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено ещё 40 у. е.. Средняя стоимость изготовления и установки кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ у. е.. Сколько колец было установлено?

□ **Решение.** $a_1=26$, $d=-2$.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad \frac{2 \cdot 26 - 2(n-1)}{2} \cdot n + 40 = 22\frac{4}{9}n.$$

$$9n^2 - 41n - 360 = 0, \quad n = \frac{41 \pm \sqrt{1681 + 12960}}{18} = \frac{41 \pm 121}{18}$$

$$n_1 = 9, \quad n_2 = 4\frac{4}{9}, \quad n - \text{целое число.}$$

Было изготовлено и установлено 9 колец.

Задача № 614.

[Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений/ Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Суворова С.Б. . -М.: Просвещение, 2009, -271с.(с.152)

- При свободном падении тело прошло в первую секунду 5м, а в каждую следующую на 10м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5 с. после начала падения.

- **Решение.** Составим математическую модель задачи:

в первую секунду 5м,
во вторую секунду 15м,
в третью секунду 25м,
в четвертую секунду 35м,
в пятую секунду 45м.

Всего за пять секунд $5+15+25+35+45=125(\text{м})$.

Ответ: глубина шахты 125м.

Задача № 614.

[Алгебра. 9 класс,: Учебник для общеобразовательных учреждений/
Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Суворова С.Б. . -М.: Просвещение, 2009,
-271с.(с.152)

- При свободном падении тело прошло в первую секунду 5м, а в каждую следующую на 10м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло его дна через 5 с. после начала падения.

- **Решение.** Составим математическую модель задачи: $a_1=5$,
 $d=10$. $a_5=a_1+4d$; $a_5=45$.

$$S_5=(a_1+a_5) \cdot n:2; S_5=(5+45) \cdot 5:2=125;$$

глубина шахты 125м.

Ответ: 125м.



▣ **Задача.** При хранении бревен строевого леса их укладывают как показано на рисунке. Сколько брёвен находится в одной кладке, если в ее основании положено 12 бревен?

▣ **Решение.** Составим математическую модель задачи: 1, 2, 3, 4, ..., 12. Это арифметическая прогрессия, $a_1=1$, $d=1$, $a_n=12$. Надо найти n .

$$a_n = a_1 + d(n-1); 12 = 1 + 1(n-1); n = 12.$$

$$S_n = (a_1 + a_n) \cdot n : 2; S_n = (1 + 12) \cdot 12 : 2; S_n = 78.$$

В одной кладке находится 78 бревен.

Ответ: 78 бревен.

Задача

Три числа составляют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если их сумма равна 27, а при уменьшении первого числа на 1, уменьшении второго на 3 и при увеличении третьего на 3, получили геометрическую прогресс.

Решение.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27; \\ q = \frac{a_2 - 3}{a_1 - 1} = \frac{a_2 + 3}{a_2 - 3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 27; \\ \frac{a_1 + d - 3}{a_1 - 1} = \frac{a_1 + 2d + 3}{a_1 + d - 3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - d \\ \frac{6}{8 - d} = \frac{d + 12}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ (8 - d)(d + 12) = 36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ d^2 + 4d - 60 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 9 - d, \\ \begin{cases} d_1 = -10, \\ d_2 = 6; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = -10, \\ a = 19; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} d = 6, \\ a = 3. \end{cases}$$

Если $d=6$, то $a_1=3$, $a_2=9$, $a_3=15$.

Если $d=-10$, то $a_1=19$, $a_2=9$, $a_3=-1$.

Тогда, если арифметическая прогрессия 3, 9, 15, то геометрическая прогрессия 2, 6, 18.
Если арифметическая прогрессия 19, 9, -1, то геометрическая прогрессия 18, 6, 2.

Ответ: 3, 9, 15 или 19, 9, -1.

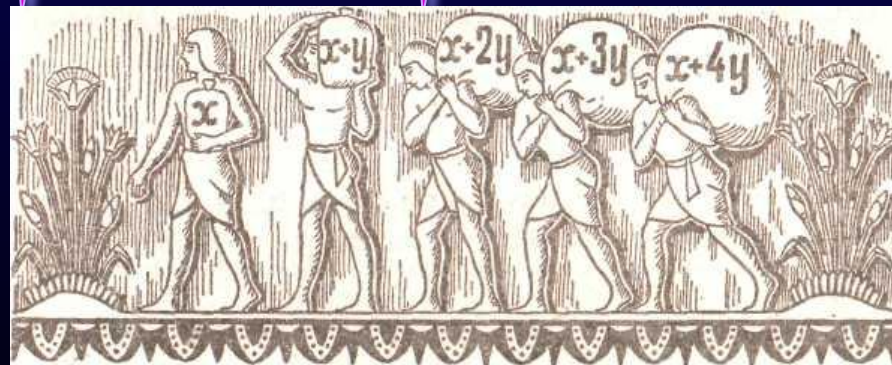
Еще задачи с практическим содержанием

1. Чтобы отправить четыре бандероли, требуется четыре разные почтовые марки на общую сумму 120 рублей. Цены марок составляют арифметическую прогрессию. Сколько стоит самая дорогая марка, если она в три раза дороже самой дешевой?
2. В первом ряду кинотеатра 21 кресло, В каждом последующем ряду на 2 кресла больше, чем в предыдущем. Сколько кресел в 40 ряду?
3. Длины сторон выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью 4см. Периметр многоугольника равен 75см, а наибольшая сторона равна 23см. Сколько сторон имеет данный многоугольник.

Сделав анализ задач на прогрессии с практическим содержанием мы увидели, что прогрессии встречаются при решении задач в медицине, в строительстве, в банковских расчетах, в живой природе, в спортивных соревнованиях и в других жизненных ситуациях. Следовательно, нам необходим навык применения знаний, связанных с прогрессиями.



Последовательности: измерение в 21-ом веке



Первые теоретические сведения, связанные с прогрессиями, дошли до нас в документах Древней Греции.

В Древнем Египте в V в до н.э. греки знали прогрессии и их суммы:

$$1+2+3+\dots+n = 2+4+6+\dots+2n = n \cdot (n+1).$$

Некоторые формулы, относящиеся к прогрессиям, были известны китайским и индийским ученым (V в.)

□ Примеры отдельных арифметических и геометрических прогрессий можно встретить еще в древневавилонских и греческих надписях, имеющих возраст около четырех тысячелетий и более. В древней Греции еще пять столетий до н.э. были известны такие суммы:

$$1+2+3+\dots+n=\frac{1}{2}n(n+1);$$

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2;$$

$$2+4+6+\dots+2n=n(n+1).$$

В клинописных табличках вавилонян, как и в египетских папирусах, относящихся ко второму тысячелетию до нашей эры, встречаются примеры арифметических и геометрических прогрессий. Вот пример задачи из египетского папируса Ахмеса: «Пусть тебе сказано: раздели 10 мер ячменя между 10 человеками и, разность же между каждым человеком и его соседом равна меры».

Задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другие.

В трудах АРХИМЕДА (ок. 287-212 гг. до н.э.) излагаются первые сведения о прогрессиях.



Как Архимед вычислял площадь круга...

Вначале Архимед вписывал в круг шестиугольник, затем на каждой стороне построил равнобедренный треугольник — получался двенадцатиугольник. Постепенно удваивая число сторон, Архимед получил 24-угольник, 48-угольник и, наконец, 96-угольник. Построенные многоугольники все более и более покрывали собой площадь круга, как бы постепенно “исчерпывая” ее. Между прочим, этот метод нахождения площади круга до сих пор, через 2200 лет после смерти Архимеда, излагается в современных школьных учебниках геометрии.

- В ходе своих исследований Архимед нашел сумму бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем $1/4$, что явилось первым примером появления в математике бесконечного ряда...

$$a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \frac{a}{4^3} + \dots = \frac{a}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}a$$

□ В “Исчислении песчинок” Архимед впервые сопоставляет арифметическую и геометрическую прогрессии, устанавливает между ними связь:

□ 1, 2, 3, 4, 5, ...

□ $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, \dots$

и указывает на связь между ними, например:

$$10^3 \cdot 10^5 = 10^{3+5} = 10^8,$$

т.е. для умножения двух членов геометрической прогрессии достаточно сложить соответствующие члены арифметической прогрессии и взять полученную сумму в качестве показателя 10.

- Одно из доказательств Архимеда, изложенное в его произведении “Квадратура параболы”, сводится к суммированию бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \frac{\alpha}{4^3} + \dots = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\alpha$$

- Для решения некоторых задач из геометрии и механики Архимед вывел формулу суммы квадратов натуральных чисел, хотя ею пользовались и до него:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

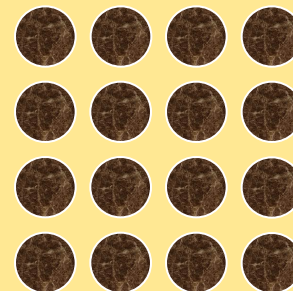
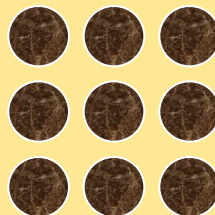


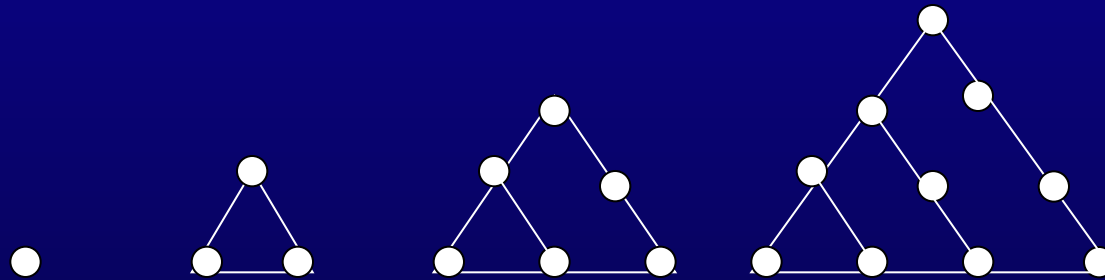
Пифагор и последовательности

- ▣ Пифагор (IV в. до н. э.) и его ученики рассматривали последовательности, связанные с геометрическими фигурами. Подсчитывая число кружков в треугольниках, квадратах, пятиугольниках, они получали:
- последовательность (a_n) треугольных чисел 1, 3, 6, 10, 15, ... ;
 - последовательность (b_n) квадратных чисел 1, 4, 9, 16, 25, ... ;
 - последовательность (c_n) пятиугольных чисел 1, 5, 12, 22, 35, ...

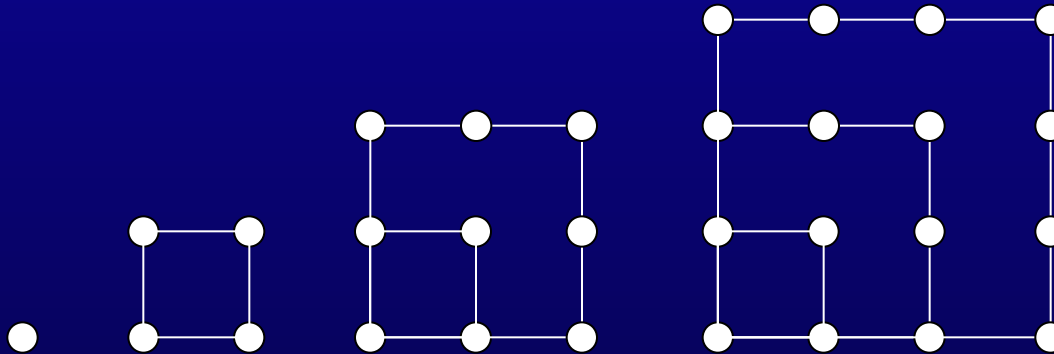


В древности вычислители часто считали с помощью камешков и, естественно, отмечали случаи, когда камешки можно было сложить в виде правильной фигуры.



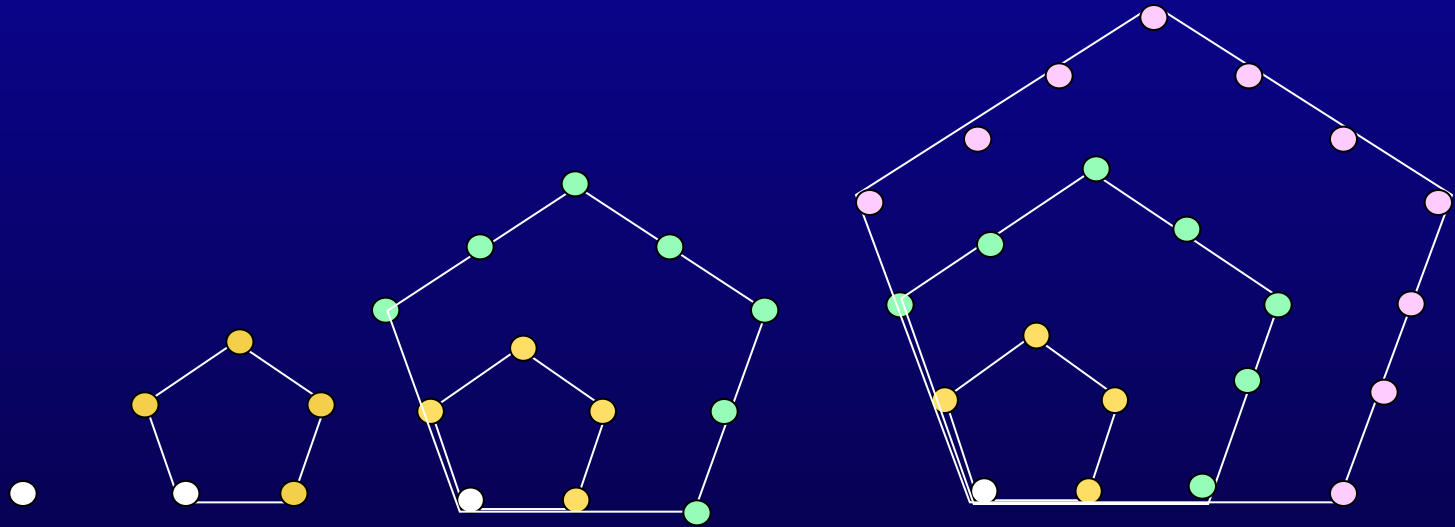


- Зададим эту последовательностей формулой n -ого члена.
- Последовательность (a_n) треугольных чисел получается из последовательности натуральных чисел $1, 2, 3, \dots$, т. е. из арифметической прогрессии, в которой первый член и разность равны 1, следующим образом:
$$a_1 = 1, a_2 = 1 + 2, a_3 = 1 + 2 + 3, a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$
- Значит, $a_n = (1 + n) : 2 \cdot n$.



- Последовательность (b_n) квадратных чисел аналогичным способом получается из последовательности нечетных чисел $1, 3, 5, \dots$, т. е. из арифметической прогрессии, первый член которой равен 1 и разность равна 2:

$$b_1 = 1, b_2 = 1 + 3, b_3 = 1 + 3 + 5, \dots, b_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$
- Следовательно, $b_n = (1+2n-1):2 \cdot n$; $b_n = n^2$. Мы пришли к формуле, очевидной для последовательности квадратных чисел.



- Последовательность (c_n) пятиугольных чисел аналогичным способом получается из последовательности нечетных чисел $1, 4, 7, \dots$, т. е. из арифметической прогрессии, первый член которой равен 1 и разность равна 3: $c_1 = 1$, $c_2 = 1 + 4$, $c_3 = 1 + 4 + 7, \dots$, $c_n = 1 + 4 + 7 + \dots + (1 + 3(n - 1))$.
- Следовательно, $c_n = (1 + 1 + 3(n - 1)) : 2 \cdot n$; $c_n = (3n - 1) \cdot n / 2$



Последовательность Фибоначчи



Леонардо Пизанский
(Фибоначчи)

- У европейцев правило для нахождения суммы членов любой арифметической прогрессии встречается впервые в сочинении Леонардо Пизанского «Книга об абак» (1202 г.)

Задача
Фибоначчи



Историческая
справка



- "Книге абака" представляет собой объемный труд, содержащий почти все арифметические и алгебраические сведения того времени и сыгравший значительную роль в развитии математики в Западной Европе в течении нескольких следующих столетий. В частности, именно по этой книге европейцы познакомились с индусскими (арабскими) цифрами. Сообщаемый в этой книге материал поясняется на примерах задач, составляющих значительную часть этого трактата.

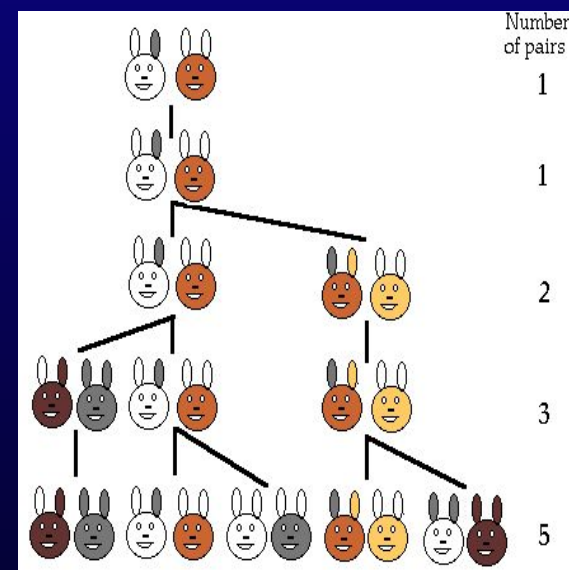
- Наиболее известной из сформулированных Фибоначчи задач является "задача о размножении кроликов", которая привела к открытию числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., именуемой впоследствии "рядом Фибоначчи".



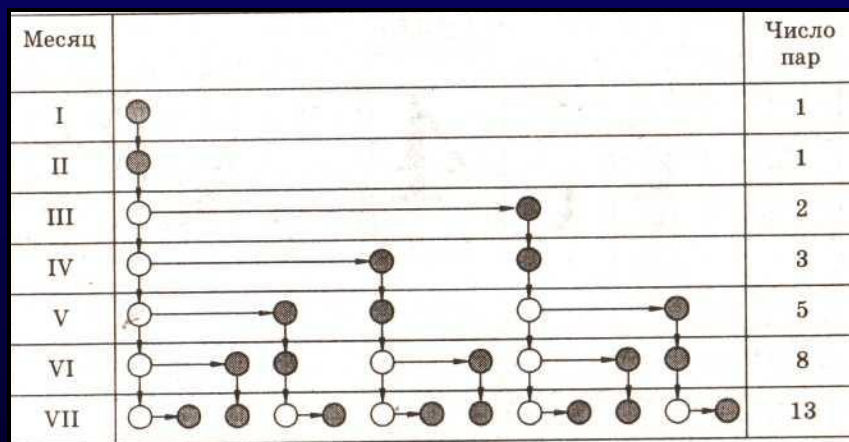
□ Задача Фибоначчи :

Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течении года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рождают кролики со второго месяца после своего рождения.

- Ясно, что если считать первую пару кроликов новорожденными, то на второй месяц мы будем по-прежнему иметь одну пару; на 3-й месяц- $1+1=2$; на 4-й- $2+1=3$ пары(так как из двух имеющихся пар потомство дает лишь одна пара); на 5-й месяц- $3+2=5$ пар (лишь 2 родившиеся на 3-й месяц пары дадут потомство на 5-й месяц); на 6-й месяц- $5+3=8$ пар (так как потомство дадут только те пары, которые родились на 4-м месяце) и т. д.



- Чтобы ответить на вопрос задачи, воспользуемся следующей схемой. Кругочек — это пара кроликов. Стрелка, направленная вниз, указывает на эту же пару в следующем месяце; а стрелка, направленная вправо, указывает на появившееся потомство этой пары.



Месяц	Пары кроликов
VIII	$13 + 8 = 21$
IX	$21 + 13 = 34$
X	$34 + 21 = 55$
XI	$55 + 34 = 89$
XII	$89 + 55 = 144$

«Сколько пар кроликов в один год от одной пары родится».

Месяцы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Пары кроликов	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

- Ряд чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 и т.д. известен как ряд Фибоначчи. Особенность последовательности чисел состоит в том, что каждый ее член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$; $5 + 8 = 13$, $8 + 13 = 21$; $13 + 21 = 34$ и т.д.,

- Таким образом, если обозначить число пар кроликов, имеющих на n -м месяце через U_k , то $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=2$, $u_4=3$, $u_5=5$, $u_6=8$, $u_7=13$, $u_8=21$ и т. д., причем образование этих чисел регулируется общим законом:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ при всех } n > 2,$$

ведь число пар кроликов на $n-1$ м месяце равно числу $n-2$ пар кроликов на предшествующем месяце плюс число вновь родившихся пар, которое совпадает с числом u_{n-2} пар кроликов, родившихся на $n-2$ ом месяце (так как лишь эти пары кроликов дают потомство).

□ Числа u_n , образующие последовательность
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...
называются

числами Фибоначчи", а сама последовательность —
последовательностью Фибоначчи.

Суть последовательности Фибоначчи в том, что
начиная с третьего числа каждое следующее число
получается сложением двух предыдущих .

Определение последовательности Фибоначчи

▣ *Числа Фибоначчи* — элементы числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 ... в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Название по имени средневекового математика Леонардо Пизанского. Построение последовательности:

Простейшие свойства последовательности

- 1. Сумма первых n -чисел Фибоначчи: $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1$.
- 2. Сумма чисел Фибоначчи с нечетными номерами:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n}.$$

- 3. Сумма чисел Фибоначчи с четными номерами:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1.$$

- 4. Сумма квадратов первых n -чисел Фибоначчи:

$$u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$$

$$5. u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

$$6. u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

$$7. u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$$

$$8. nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$$

9. В ряду Фибоначчи каждое третье число – чётное, каждое четвёртое делится на 3, каждое пятое – на 5, каждое пятнадцатое на 10.

$$\square 11. u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} (*)$$

Следствия свойства 11:

$$\square 1) \text{ Пусть в формуле } (*) \ m=n \Rightarrow u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1} \\ \text{или } u_{2n} = u_n(u_{n-1} + u_{n+1}) \text{ так как } u_n = u_{n+1} - u_{n-1} \Rightarrow u_{2n} = \\ (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n-1} + u_{n+1}) \text{ или } u_{2n} = (u_{n+1})^2 - (u_{n-1})^2.$$

Значит, разность квадратов двух чисел Фибоначчи, номера которых отличаются на 2, есть снова число Фибоначчи.

$$\square 2) \text{ Пусть } m=2n \Rightarrow u_{3n} = (u_{n+1})^3 + (u_n)^3 - (u_{n-1})^3.$$

- Интересно было бы уметь сразу получить любой член ряда, зная лишь номер n его места. Оказывается, это вполне возможно, но здесь мы столкнемся с одной из удивительных неожиданностей, которые нередки в математике. Любой член ряда Фибоначчи - число целое, номер места - тоже число целое. Естественно было бы ожидать, что любой член ряда получается в зависимости от номера и занимаемого им места при помощи действий только над целыми числами (например, как в прогрессиях). Но это не так. Не только целые числа, но даже все целые и дробные (рациональные) бессильны образовать интересующую нас формулу. Из затруднительного положения помогают выйти два иррациональных числа:

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Если n - номер места, то любой член ряда Фибоначчи можно получить по формуле

$$a_n = \frac{a_1^n - a_2^n}{\sqrt{5}}$$

Золотое сечение и Фибоначчи

- Отношение смежных чисел ряда приближается к отношению золотого деления. Так, $21 : 34 = 0,617$, а $34 : 55 = 0,618$. Это отношение обозначается символом Φ . Только это отношение — $0,618 : 0,382$ — дает непрерывное деление отрезка прямой в золотой пропорции, увеличение его или уменьшение до бесконечности, когда меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему.
- Так имя итальянского математика монаха Леонардо Фибоначчи косвенным образом связано с историей золотого сечения.



Сведения из истории

- Сами по себе прогрессии известны так давно, что конечно, нельзя говорить о том, кто их открыл. Ведь уже натуральный ряд есть арифметическая прогрессия с первым членом и разностью, равных 1.
- О том, как давно была известна геометрическая прогрессия, свидетельствует знаменитое предание о создании шахмат. Рассказывают, что индийский принц Сирам рассмеялся, услышав, какую награду попросил у него изобретатель шахмат: за первую клетку шахматной доски — одно зерно, за вторую — два, за третью — четыре, за четвертую — восемь и так до 64-го поля. Здесь явная геометрическая прогрессия с первым членом, равным 1, и знаменателем, равным 2.

Сведения из истории

- В сочинении Евклида «Начала» (около 300 лет до н.э.) в словесной форме содержится теорема относительно геометрической прогрессии, которую можно выразить следующим равенством:

$$\frac{u_2 - u_1}{u_1} = \frac{u_{n+1} - u_1}{S_n} =;$$

$$S_n = (u_{n+1} - u_1) : \frac{u_2 - u_1}{u_1}.$$

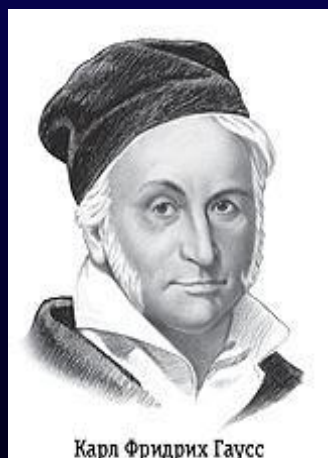


- Этот результат только по внешнему виду отличается от современной формулы:

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}, \text{ т.к.}$$

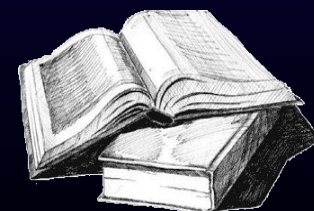
$$\frac{u_2 - u_1}{u_1} = \frac{u_1 q - u_1}{u_1} = q - 1.$$

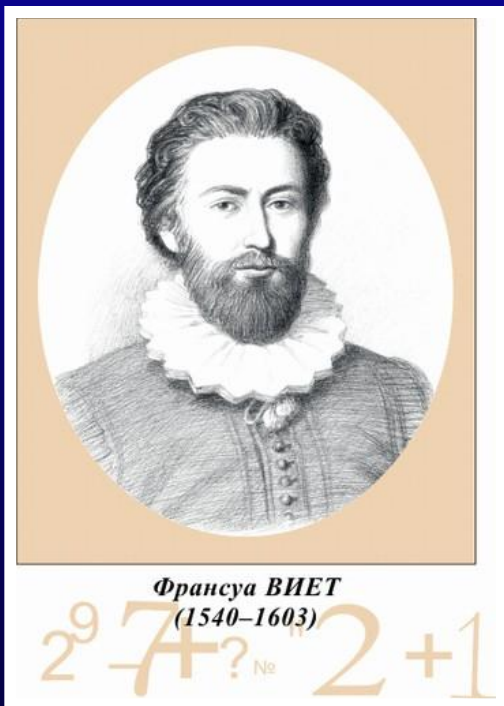
Общее правило для суммирования любой конечной геометрической прогрессии встречается в книге Н. Шюке «Наука о числах», увидевшей свет в 1484 году.



В Германии молодой Карл Гаусс (1777-1855) нашел моментально сумму всех натуральных чисел от 1 до 100, будучи ещё учеником начальной школы.

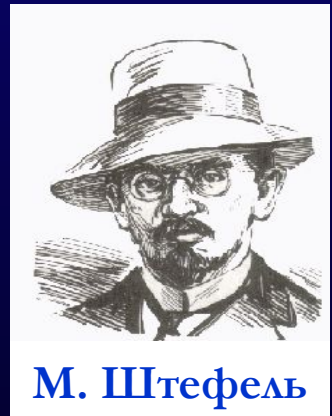
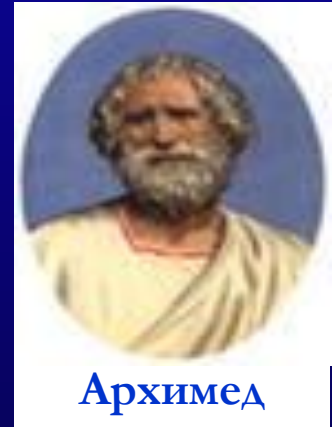
$$\begin{aligned} &1+2+3+4+\dots+98+99+100 = \\ &= (1+100)+(2+99)+(3+98)+\dots+(50+51)= \\ &= 101 \times 50 = 5050 \end{aligned}$$





□ Общая формула для вычисления суммы любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии была выведена в первой половине XVII века несколькими математиками (среди них был французский математик Пьер Ферма)

- На связь между прогрессиями первым обратил внимание великий Архимед.
- В печати же эти мысли отчетливо прозвучали лишь в 1544 г., когда вышла книга немецкого математика Михаила Штифеля «Общая арифметика», который составил такую таблицу:



-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1/6	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128

- -В верхней строчке написана арифметическая прогрессия с разностью 1. В нижней строчке – геометрическая прогрессия со знаменателем 2.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128

▣ Пример №1.

Надо умножить $1/2$ на 128. Обращаем внимание, что в таблице над $1/2$ написано -1, а над 128 написано 7. Сложим эти числа, получим 6, а под шестеркой читаем 64. Это и есть искомое произведение.

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128

▣ **Пример №2.** Разделим 32 на 8. Обращаем внимание, что в таблице над 32 написано 5, а над 8 написано 3. Вычтем эти числа 5-3, получим 2, а под двойкой читаем 4. Это и есть искомое частное.

□ Если вспомнить тождества $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ и $a^m : a^n = a^{m-n}$, то нижнюю строчку таблицы Штифеля можно переписать так:

1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128
2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7

$$\sqrt[4]{256} = 4$$

1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256
2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Теперь можно увидеть, что, если показатели степени составляют арифметическую прогрессию, то сами степени составляют геометрическую прогрессию.

Заметим, что с помощью таблицы можно возводить в степень извлекать корни. Например, чему равно 4^3 ? Против 4 читаем 2, умножаем 2 на 3, получаем 6, против 6 читаем 64, значит, $4^3 = 64$.

А чему равен корень четвертой степени из 256? Делим 8 на 4, против 2 читаем 4, значит, корень четвертой степени из 256 равен 4.



Историческая справка

В начале XIII века в городе Пизе (Италия) жил большой знаток всевозможных соотношений между числами и весьма искусный вычислитель Леонардо (с добавлением к его имени Пизанский). Его звали еще Фибоначчи, что значит сын Боначчи. В 1202 году он издал книгу на латинском языке под названием «Книга об абак» (*Incipit Liber, Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisaflo*), которая содержала в себе всю совокупность знаний того времени по арифметике и алгебре. Это была одна из первых книг в Европе, учившая употреблять десятичную систему счисления. Автор познакомил Европу с индийскими (арабскими) цифрами. Это был труд, в котором были собраны все известные на то время задачи. Книга Леонардо Пизанского получила широкое распространение и более двух веков являлась наиболее авторитетным источником знаний в области чисел.



Баше де Мезириака



Д.И. Менделеев

Одна из задач, рассмотренная Фибоначчи, называется "задачей о поиске наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных весах" или просто "задачей о гирях". В русской историко-математической литературе "задача о гирях" известна под названием "задачи Баше-Менделеева", названной так в честь французского математика 17 в. Баше де Мезириака, который разместил эту задачу в своем "Сборнике приятных и занимательных задач" (1612 г.) и блестящего русского химика Дмитрия Ивановича Менделеева, который интересовался этой задачей будучи директором Главной Палаты мер и весов России.

- Сущность "задачи Баше-Менделеева" состоит в следующем: при какой системе гирь, имея их по одной, можно взвесить всевозможные грузы Q от 0 до максимального груза $Q_{\max}$, чтобы значение максимального груза $Q_{\max}$ было бы наибольшим среди всех возможных вариаций? Известно два варианта решения этой задачи: (1) когда гири позволено класть на свободную чашу весов; (2) когда гири позволяется класть на обе чаши весов. В первом случае "оптимальная система гирь" сводится к двоичной системе гирь: 1, 2, 4, 8, 16, ..., а появляющийся при этом "оптимальный" алгоритм или способ измерения рождает двоичную систему счисления, лежащую в основе современных компьютеров. Во втором случае наилучшей является троичная система гирь: 1, 3, 9, 27, 81, ..., а возникающий при этом способ измерения рождает троичную симметричную систему счисления, которая была применена в троичном компьютере Сетунь, построенном в 50-е годы в МГУ.

- Еще одна задача интересна в исторической связи и носит имя "задачи о семи старухах". Старухи направляются в Рим, каждая имеет 7 мулов, каждый мул тащит 7 мешков, в каждом мешке находится 7 хлебов, у каждого хлеба лежит 7 ножей, каждый нож нарежет 7 кусков хлеба. Чему равно общее число всего перечисленного?
- В историческом отношении эта задача интересна тем, что она тождественна с задачей, которая встречалась в папирусе Ринда (Египет), то есть через три тысячи лет после египетских школьников задачу предлагалось разрешить итальянским школьникам.



Общее число всего перечисленного
 $7+49+343+2401+16807+117649=137256$

Другой способ решения задачи

7, 49, 343, 2401, 16807, 117649

—это геометрическая прогрессия, первый член $b_1 = 7$ и знаменатель прогрессии $q = 7$.

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \quad b_6 = 7 \cdot 7^{6-1} = 7 \cdot 7^5 = 7^6 = 117649.$$

$$S_n = (b_1(q^n - 1)) / (q - 1);$$

$$S_6 = (7(7^6 - 1)) / (7 - 1) = (7(117649 - 1)) / 6 = \\ = 7 \cdot 117648 : 6 = 137256.$$

Еще две старинные задачи

- Шли семь старцев

У каждого старца по семь костылей;

На каждом костыле по семь сучков;

На каждом сучке по семь кошелей;

В каждом кошеле по семь пирогов;

В каждом пироге по семь воробьёв.

Сколько всего воробьёв?

Ответ: 117649 воробьёв

- Каждый из 7 человек имеет 7 кошек. Каждая кошка съедает по 7 мышек, каждая мышка за одно лето может уничтожить 7 ячменных колосков, а из зёрен одного колоска может вырасти 7 горстей ячменного зерна. Сколько горстей зерна ежегодно спасается благодаря кошкам?

- Ответ: 16807 горстей

- Искусство Леонардо в решении числовых задач изумляло всех. Высокая репутация Фибоначчи привлекла однажды (в 1225 г.) в Пизу государя Римской империи Фридриха II, который приехал в сопровождении группы математиков, желавших публично испытать Леонардо. Одна из задач, предложенных на турнире, имела следующее содержание: Найти полный квадрат, остающийся полным квадратом как после увеличения его, так и после уменьшения на 5. Напомню, что полным квадратом называется число, из которого точно извлекается квадратный корень.
- Фибоначчи после некоторых размышлений нашел такое число. Оно оказалось дробным: $1681/144$ или $(41/12)^2$.
Какими соображениями руководствовался Фибоначчи во время турнира, мы никогда не узнаем, но задачу он решил блестяще.

В XIX веке в Пизе
был поставлен
памятник учёному



Прогрессии в природе

Все организмы обладают интенсивностью размножения в геометр

ИНФУЗОРИИ...

Летом инфузории размножаются
бесполом способом делением
пополам.

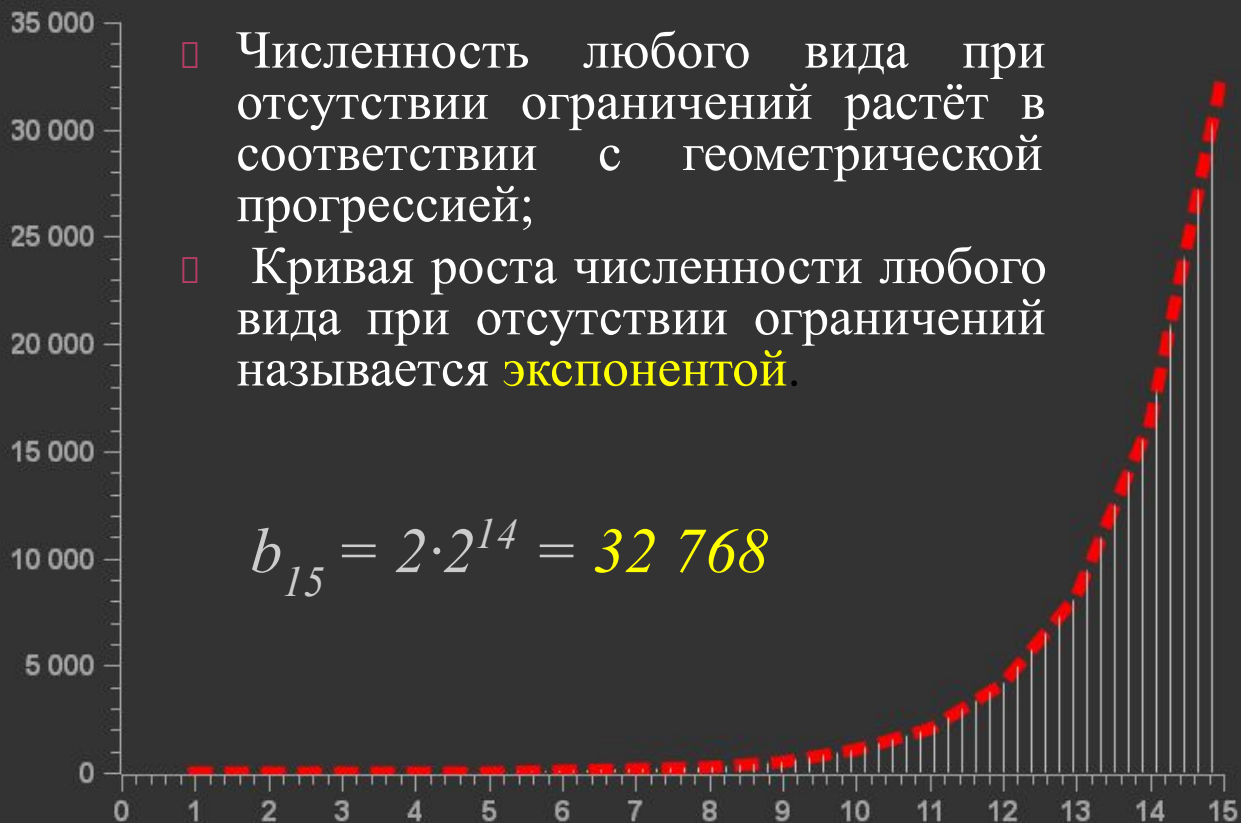
Вопрос: сколько будет инфузорий
после 15-го размножения?



РЕШЕНИЕ

- Численность любого вида при отсутствии ограничений растёт в соответствии с геометрической прогрессией;
- Кривая роста численности любого вида при отсутствии ограничений называется **экспонентой**.

$$b_{15} = 2 \cdot 2^{14} = 32\,768$$

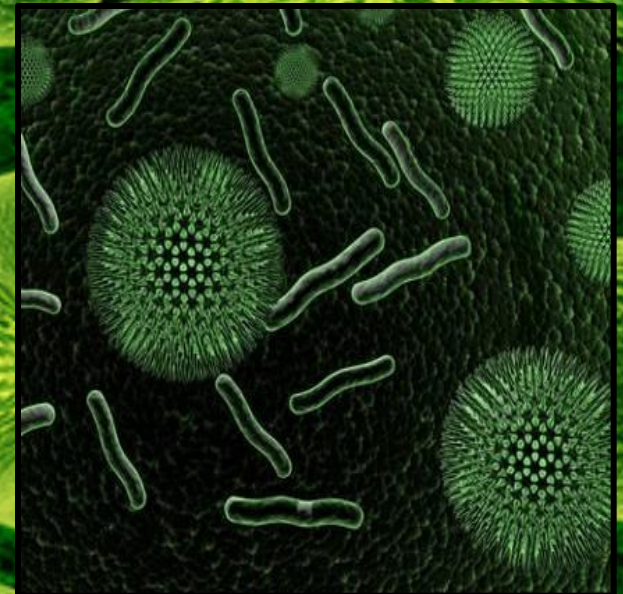


бактерии...

Известно, что бактерии размножаются делением: одна бактерия делится на две; каждая из этих двух в свою очередь тоже делится на две, и получаются четыре бактерии; из этих четырех в результате деления получаются восемь бактерий и т. д. Результат каждого удвоения будем называть поколением.

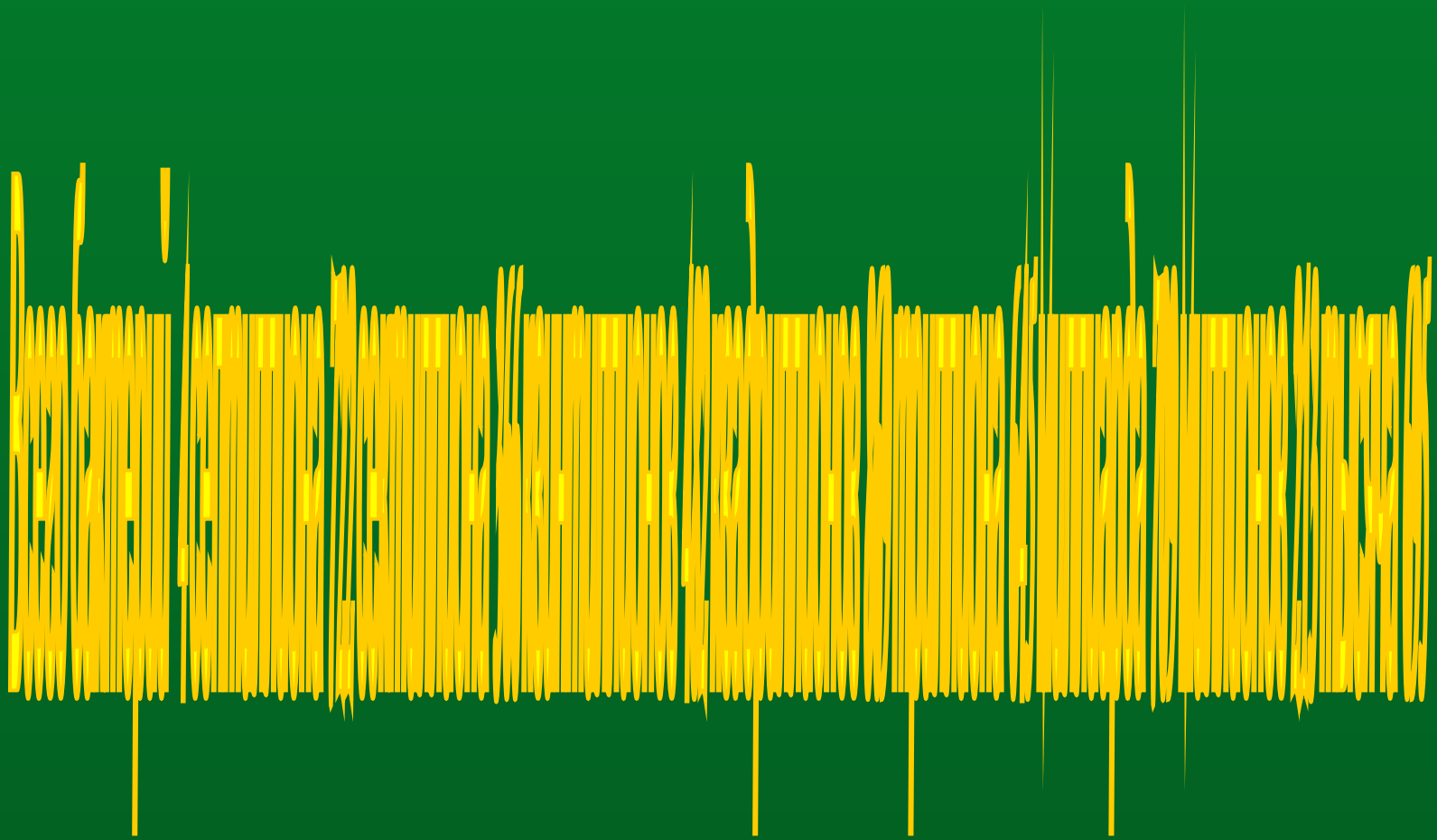
бактерии...

Способность к размножению у бактерий настолько велика, что если бы они не гибли от разных причин, а беспрерывно размножались, то за трое суток общая масса потомства одной только бактерии могла бы составить 7500 тонн. Таким громадным количеством бактерий можно было бы заполнить около 375 железнодорожных вагонов.



Задача №524. [Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.2.
Учебник для общеобразовательных учреждений/
Мордкович А.Г., П.В. Семенов , -М.: Мнемозина, 2010,
-224с.(108)]

- Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.
- Решение. В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение - за сутки 72 поколения. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, у которой $b_1=1$, $q=2$, $n=72$, находим, что
$$S_{72}=2^{72}-1=4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 696 - 1=$$
$$= 4\ 722\ 366\ 482\ 869\ 645\ 213\ 695.$$



Интенсивность размножения бактерий используют...



в пищевой промышленности
(для приготовления напитков, кисломолочных продуктов, при квашении, солении и др.)

в фармацевтической промышленности
(для создания лекарств, вакцин)



в сельском хозяйстве
(для приготовления силоса, корма для животных и др.)

в коммунальном хозяйстве и природоохранных мероприятиях
(для очистки сточных вод, ликвидации нефтяных пятен)



МУХИ...



*“Потомство пары мух
съест мёртвую лошадь
также скоро как лев”.*

Карл Линней

Девятое поколение одной
пары мух наполнило бы куб,
сторона которого равна 140 км,
или же составило бы нить,
которой можно опоясать земной
шар 40 млрд. раз.

ОДУВАНЧИК...



**“Потомство одного одуванчика за 10 лет
может покрыть пространство в 15 раз
больше суши земного шара”.**

К. А. Тимирязев

ЗАДАЧА



- Одно растение одуванчика занимает на земле площадь 1 кв. метр и даёт в год около 100 летучих семян.
- а) Сколько кв. км площади покроет всё потомство одной особи одуванчика через 10 лет при условии, если он размножается беспрепятственно по геометрической прогрессии?
- б) Хватит ли этим растениям на 11-й год места на поверхности суши земного шара?

ОТВЕТ

- Одно растение одуванчика занимает на земле площадь 1 кв. метр и даёт в год около 100 летучих семян.
- а) Сколько кв. км площади покроет всё потомство одной особи одуванчика через 10 лет при условии, если он размножается беспрепятственно по геометрической прогрессии?
[1012 км²]
- б) Хватит ли этим растениям на 11-й год места на поверхности суши земного шара?
[нет, $S_{\text{суши}} = 148 \text{ млн км}^2$]

ТЛИ...

Всего за пять поколений, то есть за 1 – 1,5 летних месяцев, одна единственная тля может оставить более 300 млн. потомков, а за год её потомство способно будет покрыть поверхность земного шара слоем толщиной почти в 1 метр.



ВОРОБЬИ



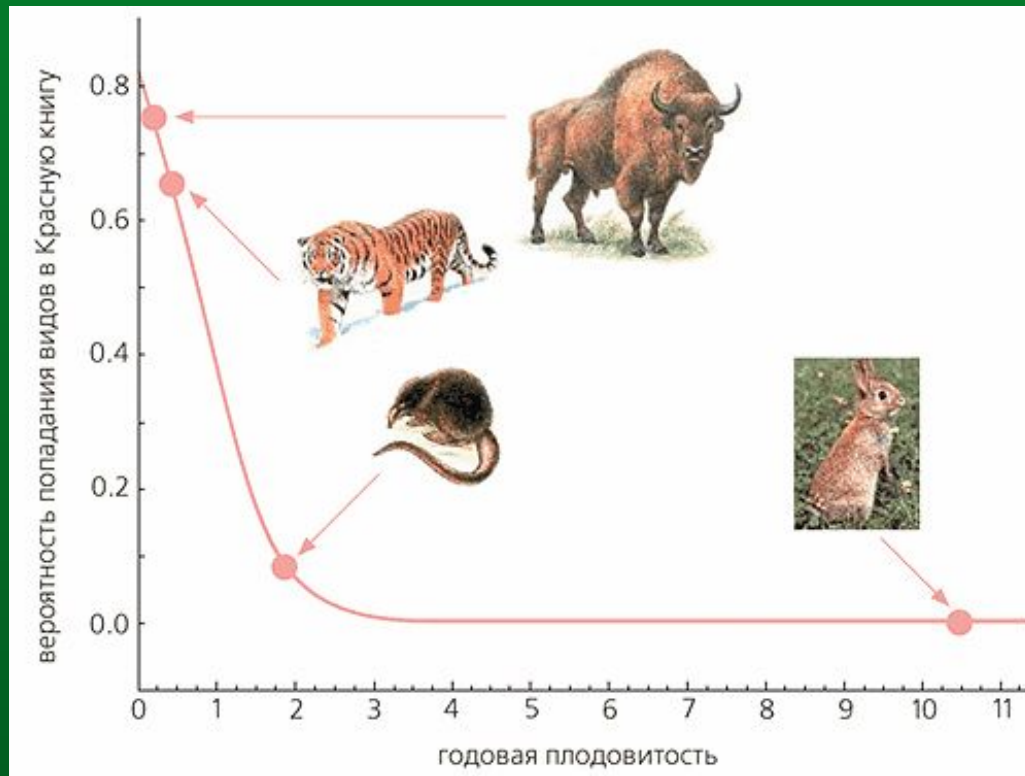
- Потомство пары птиц величиной с воробья при продолжительности жизни в четыре года может покрыть весь земной шар за 35 лет.

Еще две биологические задачи

- При каждом делении амёбы получается две новые особи. Сколько особей будет после 6 делений? После 10 делений?
- Гидра размножается почкованием, причём при каждом делении получается 5 новых особей. Какое количество делений необходимо для получения 625 особей?

ПЛОДОВИТОСТЬ РЫБ

№	Вид	Количество икринок, откладываемых одной самкой
1	Треска	10 000 000
2	Обыкновенная щука	500 000
3	Лосось-кета	3 000
5	Кошачья акула	20



Положение некоторых видов на кривой вероятности попадания в Красную книгу, построенной на основе годовой плодовитости. Зубр, тигр и русская выхухоль находятся в Красной книге. В качестве примера вида, которого нет в Красной книге, показан кролик.



Прогрессии
в банковских расчетах,
в промышленности,
в разных отраслях науки,
в сельском хозяйстве

Прогрессии и банковские расчеты

- Представьте себе, что вы открыли в банке вклад в сумме a р. Под $p\%$ годовых на t лет. У вас есть две стратегии поведения: либо в конце каждого года хранения вклада снимать проценты по вкладу, т.е. полученную прибыль в размере $\frac{p}{100} \cdot a$ р., либо прийти в банк один раз — в конце срока хранения вклада. Какой доход вы получите в том и другом случаях?
- В первом случае при $t = 1$ вы получите $(a + \frac{p}{100} \cdot a)$ р., при $t = 2$ ваша итоговая сумма составит $(a + \frac{2p}{100} \cdot a)$ р., при $t = 3$ $(a + \frac{3p}{100} \cdot a)$ р. и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия $a, a + \frac{p}{100} \cdot a, a + \frac{2p}{100} \cdot a, a + \frac{3p}{100} \cdot a, \dots, a + \frac{tp}{100} \cdot a$.
- Итак, при первой стратегии поведения за t лет вы получите $a(1 + \frac{tp}{100})$ — это так называемая *формула простых процентов*

Прогрессии и банковские расчеты

- Если вы решили прийти в банк только в конце срока хранения вклада, то при $t = 1$ получаемая сумма составит, как и в первом случае, $(a + \frac{p}{100} \cdot a)$ р., т. е. $a(1 + \frac{p}{100} \cdot a)$ р.; сумма вклада увеличится в $(1 + \frac{p}{100} \cdot a)$ раз.
Во столько же раз она увеличится и к концу второго года хранения, и к концу третьего года хранения и т. д.
- Математическая модель ситуации — конечная геометрическая прогрессия $a, a(1 + \frac{p}{100} \cdot a), a(1 + \frac{p}{100} \cdot a)^2, a(1 + \frac{p}{100} \cdot a)^3, \dots, a(1 + \frac{p}{100} \cdot a)^t$.
- Итак, при второй стратегии поведения за t лет вы получите $a(1 + \frac{p}{100} \cdot a)^t$ руб. — это так называемая **формула сложных процентов**.

Прогрессии и банковские расчеты

□ Рассмотрим конкретный пример.

Пусть вклад составлял 10 000 р., банк дает 10% годовых, срок хранения вклада - 5 лет. Если вы выбрали стратегию простых процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10\,000 \cdot (1 + \frac{5 \cdot 10}{100})$, т. е. 15 000 р. Если же вы выбрали стратегию сложных процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10\,000 \cdot (1 + \frac{10}{100})^5$, т. е. 16 105,1 р. Как говорится в одном рекламном слогане, почувствуйте разницу.

[Алгебра. 9 класс, в 2ч. Ч.1. Учебник для
общеобразовательных учреждений/ Мордкович А.Г.,
П.В. Семенов, -М.:Мнемозина, 2010, -224с.(с.169-171)]

Задачи на прогрессии

Директоры двух заводов А и В встретились на совещании. Из их беседы выяснилось, что оба завода выпустили за последний год одинаковые количества продукции, а именно по 1000 т металлических изделий. На совещании было решено добиваться дальнейшего роста продукции, причём был намечен ежегодный прирост на 40%.

Директор завода А выполнял задание следующим образом. В первый год после совещания его завод выпустил на 40% больше, чем раньше, т. е. на две пятых, а именно:

$$1000 + 1000 \cdot 2/5 = 1000 + 400 = 1400.$$

За второй год завод выпустил ещё на 400 т больше, т. е.

$$1400 + 400 = 1800,$$

и так далее. В результате выпуск изделий за последующие 4 года оказался таким:

до совещания.....1000,

1-й год.....1400,

2-й »..... 1800,

3-й »..... 2200,

4-й »..... 2600.

Директор завода В поступил иначе. За первый год после совещания он выпустил на 40% больше, чем раньше, т. е.

$$1000 + 1000 \cdot 2/5 = 1400 \text{ т.}$$

За второй год директор завода В добился дальнейшего, роста производительности труда, и завод выпустил за второй год на 40% больше, чем за первый год:

$$1400 + 1400 \cdot 2/5 = 1400 + 560 = 1960 \text{ т.}$$

На третий год он составил план по тому же принципу: опять увеличить выработку на 40% по сравнению с предыдущим годом:

$$1960 + 1960 \cdot 2/5 = 1960 + 784 = 2744 \text{ т.}$$

За четвёртый год завод В дал такую выработку:

$$2744 + 2744 \cdot 2/5 = 2744 + 1098 = 3842.$$

В результате выпуск изделий заводом В оказался следующим:

до совещания.....1000,

1-й год.....1400,

2-й »..... 1960,

3-й »..... 2744,

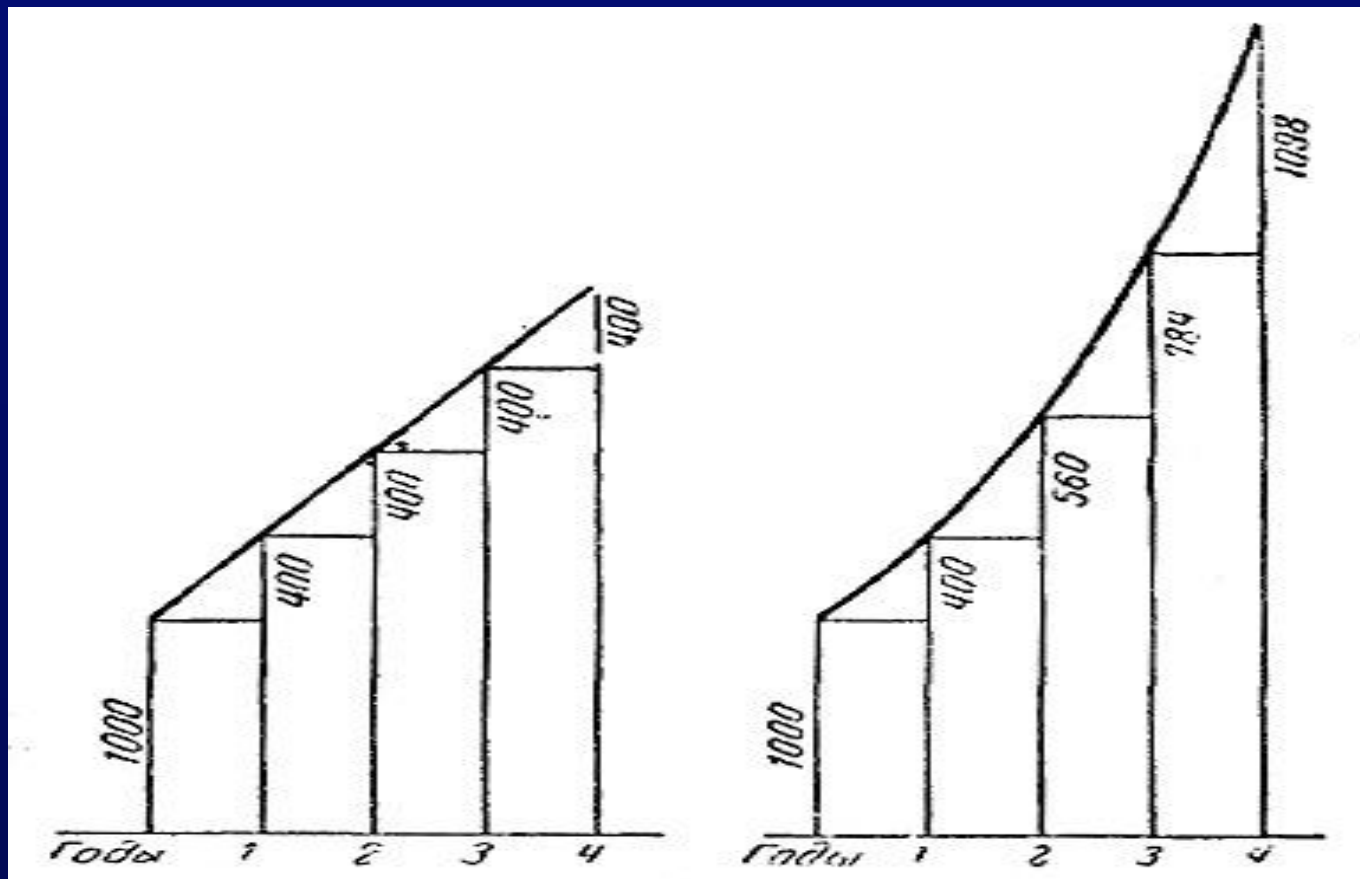
4-й »..... 3842.

Заметим, что коэффициент увеличения здесь равен $7/5$, так как выпуск каждого года составляет 140% предыдущего года, $140\% = 140/100 = 7/5$.

Через 4 года директора заводов А и В снова встретились на совещании и сравнили выработку обоих заводов. Оказалось, что завод В выпустил значительно больше изделий, чем завод А.

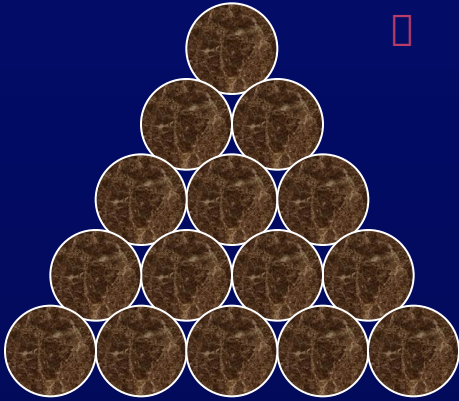
Завод А сохранял всё время одну и ту же надбавку, равную 400 т в год. Завод В сохранял неизменным отношение выработки двух соседних лет, т. е. коэффициент увеличения $k = 7/5$.

Представим на графике продукцию
того и другого завода



Как сосчитать количество бревен?

- Представьте, что вы – учетчик на стройке. Привезли большое количество бревен строевого леса. Нужно быстро определить, сколько бревен привезли, чтобы закрыть наряд шоферу.



- В данном случае, чтобы подсчет бревен осуществлялся по простым формулам, один из способов – использовать естественное расположение бревен так, чтобы в каждом верхнем ряду их оказалось на единицу меньше, чем в нижнем. Тогда число бревен ряда образует арифметическую прогрессию и общее количество легко подчитывается по формуле суммы арифметической прогрессии с разностью, равной единице.

Еще две технические задачи

- После каждого движения поршня разрезающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нём воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда, после 6 движений поршня, если первоначально давление было 760 мм.рт.ст.
- Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду – на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

В каких процессах ещё встречаются такие закономерности?

- Деление ядер урана происходит с помощью нейтронов. Нейтрон, ударяя по ядру урана раскалывает его на две части. Получается два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывают их еще на 4 части и т. д. — это геометрическая прогрессия.
- При повышении температуры в арифметической прогрессии скорость химической реакции вырастает в геометрической прогрессии.
- Возведение многоэтажного здания — пример арифметической прогрессии. Каждый раз высота здания увеличивается на 3 метра.

- Вписанные друг в друга правильные треугольники — это геометрическая прогрессия.
- Денежные вклады под проценты — это пример геометрической последовательности. Зная формулы суммы членов геометрической последовательности, можно подсчитывать сумму на вкладе.
- Равноускоренное движение — арифметическая прогрессия, т.к. за каждые промежутки времени тело увеличивает скорость в одинаковое число раз.



Задачи на применение
прогрессий встречаются
в старых учебниках
по математике

Задачи из «Арифметики» Л. Ф.Магницкого

- Купец имел 14 чарок серебряных, причем веса чарок растут по арифметической прогрессии с разностью 4. Последняя чарка весит 59 латов. Определить, сколько весят все чарки.

Решение

- $a_{14}=a_1+13d$, $a_1=59-13\cdot 4=7$,
 $S_{14}=(7+59)/2\cdot 14=462$.
Ответ: все чарки весят 462 лата.

Задачи из «Арифметики» Л. Ф.Магницкого

Яблоки

Садовник продал первому покупателю половину всех яблок и ещё пол-яблока, второму покупателю — половину оставшихся и ещё пол-яблока; третьему — половину оставшихся и ещё пол-яблока и так далее. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблоки ещё пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Решение. Пусть у садовника было x яблок.

1 покупатель	$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$
2 покупатель	$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{4}$
3 покупатель	$\frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4} \right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{8}$
7 покупатель	$\frac{x+1}{128}$

Составим уравнение: $\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{4} + \frac{x+1}{8} + \dots + \frac{x+1}{128} = x$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128}$ - геометрическая прогрессия, где

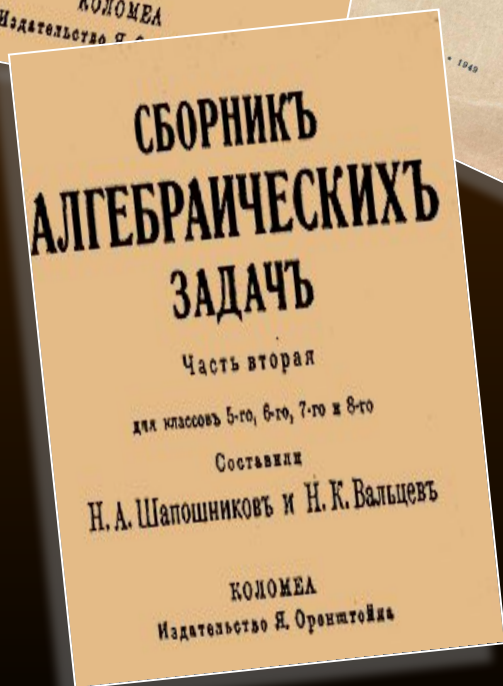
$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{1}{2}, \quad n = 7, \quad S_7 = \frac{b_1 \cdot (q^7 - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{128}$$

Уравнение примет следующий вид:

$$(x + 1) \cdot \frac{127}{128} = x \quad \frac{127 \cdot (x+1)}{128} = x,$$

$$x = 127$$

Ответ: 127 яблок было у садовника.



В «Сборнике алгебраических задач» (часть вторая, авторы Шапошников Н.А., Вальцов Н.К.; Москва, Ленинград, Учпедгиз, 1949) было найдено двадцать задач на арифметическую прогрессию.

Работники нанялись вырыть колодезь с таким условием, чтобы за первый аршин глубины им заплатили 40 копеек, а за каждый следующий 15-ю копейками больше, чем за предыдущий. Сколько аршин вырыли они, если за всю работу получили 16 р. 90 к.?

▣ *Решение.* $a_1=40$, $d=15$, $S_n=1690$. Найти n .

$$S_n=(2a_1+d(n-1)) \cdot n:2; n>0;$$

$$1690=(80+15(n-1)) \cdot n:2;$$

$$1690=(80+15(n-1)) \cdot n:2;$$

$$3380=(65+15n) \cdot n;$$

$$15n^2+65n-3380=0;$$

$$3n^2+13n-676=0;$$

$$n_1=-52/3; n_2=13.$$

Так как по условию задачи $n>0$, то $n=13$.

Работники выкопали колодезь глубиной 13 аршин.

Некто, будучи должен 720 руб., обязался уплачивать этот долг по частям, выдавая каждый месяц 10-ю рублями меньше, чем в предыдущий. Сколько он уплатил в первый месяц и во сколько времени погасил весь свой долг, если в последний месяц ему пришлось отдать 40 р.?

▣ **Решение.** Применим формулы n –го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 - 10n - 30 = 0, \\ a_1 n + 10n - 1440 = 0; \end{cases}$$

Решив эту систему способом подстановки, найдем $n = -16$ и $n = 9$. Так как $n > 0$, то приходим к выводу, что свой долг человек вернул за 9 месяцев, отдав в первый месяц 120 рублей.

Два тела движутся навстречу одно другому из двух мест, находящихся в расстоянии 153 футов. Первое проходит по 10 футов в секунду, а второе в первую секунду прошло 3 фута и в каждую следующую секунду проходит 5-ю футами больше, чем в предыдущую, Через сколько секунд тела встретятся?

▣ *Решение.* Второе тело пройдет за n сек

$S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (2 \cdot 3 + 5 \cdot (n-1)) \cdot n : 2 = (1+5n) \cdot n : 2$ (фут),
а первое тело - $10n$ фут,

$((1+5n) \cdot n : 2 + 10n)$ фут — расстояние между телами в начальный момент, по условию оно равно 153 футам. $(1+5n) \cdot n : 2 + 10n = 153$. $n=6$, $n=-10,2$. Так как $n > 0$, то $n=6$.

Значит, тела встретятся через 6 секунд.

□ Числа градусов, содержащихся в последовательных внутренних углах некоторого многоугольника, составляют прогрессию, разность которой 10; наименьший угол этого многоугольника 100° . Сколько в многоугольнике сторон?

□ *Решение.* $S_n = (2a_1 + d(n-1)) \cdot n : 2 = (200 + 10(n-1)) \cdot n : 2 = 5n^2 + 85n$.
Сумма внутренних углов многоугольника находится по формуле, известной из геометрии: $(n-2) \cdot 180$.

$$5n^2 + 95n = 180n - 360;$$

$$5n^2 - 85n + 360 = 0;$$

$$n^2 - 17n + 72 = 0;$$

$$n = 8, \quad n = 9.$$

Существует два многоугольника, удовлетворяющие условию задачи.

Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 16,1 фута, а в каждую следующую на 32,2 фута больше, чем в предшествующую. Если два тела начали падать с одной высоты, спустя 5 секунд одно после другого, то через сколько секунд они будут друг от друга на расстоянии 724,5 фута?

Решение. Найдем путь каждого тела.

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

$$S_t = \frac{2 \cdot 16,1 + 32,2(t-1)}{2} \cdot t = \frac{32,2(1+t-1)}{2} \cdot t = 16,1t^2;$$

$$S_{t+5} = \frac{2 \cdot 16,1 + 32,2((t+5)-1)}{2} \cdot (t+5) =$$

$$= \frac{32,2(1+t+5-1)}{2} \cdot (t+5) = 16,1(t+5)^2;$$

$$S_{t+5} - S_t = 724,5;$$

$$16,1(t+5)^2 - 16,1t^2 = 724,5;$$

$$t = 2.$$

Тела будут друг от друга на расстоянии

$$724,5 + 16,1 \cdot 5^2 = 1092,5 \text{ фута.}$$



Задачи на применение
прогрессий встречаются
в книгах
по занимательной математике

Древняя индийская л

Царь древней Индии Шерам пригласил к себе изобретателя шахмат Сета и спросил, какую бы награду хотел бы он получить за изобретение столь мудрой игры.

Тогда Сета попросил царя на первую клетку шахматной доски положить 1 зерно, на вторую – 2 зерна, на третью – 4, на четвертую – 8 и т.д., т.е. на каждую клетку вдвое больше зерна, чем на предыдущую клетку. Поначалу царь удивился столь “скромному” запросу изобретателя и поспешно повелел выполнить ту просьбу. Однако, как выяснилось, казна царя оказалось слишком “ничтожной” для выполнения этой просьбы.

Действительно, чтобы выполнить эту просьбу, потребовалось бы количество зерен, равное сумме $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$, а эта сумма равна 18446744073709551615.

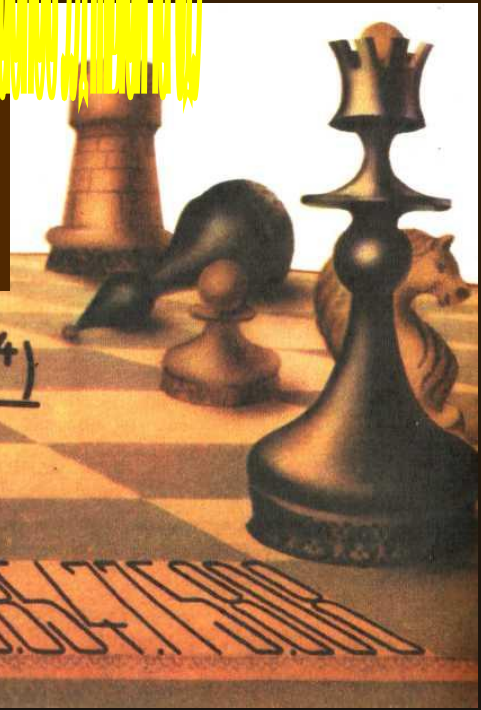
Если считать, что 1 пуд зерна содержит 40000 зерен, то для выполнения просьбы потребовалось бы 230 584 300 921 369 пудов зерна. Если полагать, что в среднем ежегодно собирается 1 000 000 000 пудов зерна, то для выполнения указанной просьбы нашей стране нужно работать (не расходуя ни одного зерна) на протяжении 230584 лет.



Столько зёрен должен был получить изобретатель шахмат.

$$S_{64} = 2^{64} - 1 = 18446744073704551615$$





$$S_{64} = 2^{64} - 1 = 1,84 \cdot 10^{19}$$

**- стандартный вид
данного числа**

Это задача из «Сборника старинных занимательных задач по математике» Игнатьева Е.И.



Однажды богач заключил выгодную, как ему казалось, сделку с человеком, который целый месяц ежедневно должен был приносить по 100 тыс. руб., а взамен в первый день месяца богач должен был отдать 1 коп., во второй-2 коп., в третий-4 коп., в четвертый-8 коп. и т. д. в течении 30 дней. Сколько денег получил богач и сколько отдал? Кто выиграл от этой сделки?





Считают “мужик” и “купец”

“Мужик” заплатил: $S_{30} = 100\,000 \cdot 30 = 3\,000\,000$ (рублей).

“Купец” заплатил: 1; 2; 4;... $q=2/1=2$.

$S_{30} = 1 \cdot (2^{30} - 1) : (2 - 1) = 2^{30} - 1 =$
 $= 1\,073\,741\,824 - 1 = 1\,073\,741\,823$ (коп.)

т.е. 10 738 418 руб.23коп



О поселковых слухах:

Удивительно, как быстро разбегаются по посёлку слухи! Иной раз не пройдет и двух часов со времени какого—нибудь происшествия, которое видели всего несколько человек, а новость уже облетела весь посёлок: все о ней знают, все слышали. Итак, задача:

В поселке 16 000 жителей. Приезжий в 8.00 рассказывает новость трем соседям; каждый из них рассказывает новость уже трем своим соседям и т. д. Во сколько эта новость станет известна половине посёлка?

Решение. Итак, в 8. 15 утра новость была известна только четверым: приезжему и трём местным жителям. Узнав эту новость, каждый из трёх граждан поспешил рассказать её трём другим. Это потребовало также четверти часа. Значит, спустя полчаса после прибытия новости в город о ней узнали уже $4+3\cdot 3=13$ человек. Каждый из девяти вновь узнавших поделился в ближайшие четверть часа с тремя другими гражданами, так что к 8.45 утра новость стала известна $13+9\cdot 3=40$ гражданам. Если слух распространяется по посёлку и далее таким способом, то есть каждый узнавший эту новость успевает в ближайшие четверть часа передать её трём согражданам, то осведомление посёлка будет происходить по следующему расписанию:

в 9.00	новость узнают $40+27\cdot 3=121$ (человек);
9.15	$121+81\cdot 3=364$ (человек);
9.30	$364+243\cdot 3=1093$ (человек);
9.45	$1093+729\cdot 3=3280$ (человек);
10.00	$3280+2187\cdot 3=9841$ (человек).

Эту задачу можно решить по-другому, используя формулу сумму n первых членов геометрической прогрессии.

В данном случае: $q = 3$, $b_1 = 1$, $S_n = 8000$, n – неизвестно.

Подставляя известные числа в формулу, получим:

$$\frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} = 8000;$$

$$3^n = 16003;$$

Чтобы найти n , заметим, что $3^6 = 729$, $3^2 = 9$,
 $3^8 = 3^6 \cdot 3^2 = 729 \cdot 9 = 6561$, $3^9 = 19683$.

Значит, n должно быть не меньше 9. При $n = 9$ имеем:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (3^9 - 1)}{3 - 1} = \frac{19683 - 1}{2} = 9841 > 8000$$

Значит, на 9-ом шаге более половины жителей города будут знать новость. Легко подсчитать, что это произойдёт в 10.00 утра.

Задачи на прогрессии есть и в книгах Я.И. Перельмана



Живая математика, глава седьмая «Рассказы о числах-великанах»	Занимательная алгебра глава восьмая «Прогрессии»
Выгодная сделка Городские слухи Лавина дешевых велосипедов Награда Легенда о шахматной доске Быстрое размножение	Древнейшая прогрессия Алгебра на клетчатой бумаге Поливка огорода Кормление кур Артель землекопов Яблоки Покупка лошади Вознаграждение воина



Прогрессии в литературе: строки из “Евгения Онегина”.

«...Не мог он ямба от хорея

Как мы не бились отличить...». Отличие ямба от хорея состоит в различных расположениях ударных слогов стиха.

Ямб – это стихотворный размер с ударением на четных слогах 2; 4; 6; 8;... Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью прогрессии 2.

Хорей – это стихотворный размер с ударением на нечетные слогах стиха. Номера ударных слогов образуют арифметическую прогрессию 1; 3; 5; 7;..

Примеры.

▣ **Ямб.** «Мой д**Я**дя с**А**мых ч**Е**стных пр**А**вил...», прогрессия 2; 4; 6; 8;...

▣ **Хорей.** «**Я** проп**А**л, как зв**Е**рь в заг**О**не» Б.Л. Пастернак, «**Б****У**ря
мгл**О**ю н**Е**бо кр**О**ет» А.С. Пушкин, прогрессия 1; 3; 5; 7.

О финансовых пирамидах:

- Разберёмся в механизмах этих организаций. Организатор начинает вовлекать в свою организацию и говорит, что, если внести указанную плату по указанным адресам по 1 рублю, а затем заплатить ещё по 5 таким же адресам, вычеркнув первый адрес и дописав свой последним, то через некоторое время вы получите уйму денег. Хотя желающих разбогатеть по щучьему веленью немало, но в выигрыше оказываются только учредители такой игры.
- *Решение.* Дело в том, что число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом. Если пятёрка устроителей подпишет, допустим, 120 человек со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, во втором – 600, в третьем – 3 000, ..., в десятом – 234 375 000 человек; это намного больше населения страны. Так что участник, включившийся в восьмом или девятом круге, уже ничего не получит.



Выводы.

- Установили, что сами по себе прогрессии известны так давно, что нельзя говорить о том, кто их открыл.
- Убедились в том, что задачи на прогрессии, дошедшие до нас из древности, также как и многие другие знания по математике, были связаны с запросами хозяйственной жизни: распределение продуктов, деление наследства и другими.
- Выяснили, что в развитие теории о прогрессиях внесли ученые Архимед, Пифагор и его ученики, французские математики Леонард Фибоначчи и Баше де Мезириака, немецкие математики М. Штифель, Н. Шюке, и К. Гаусс.
- Нашли много задач на арифметическую и геометрическую прогрессию в старых и в современных учебниках по математике. Заметили, что арифметическая прогрессия в практических задачах встречается чаще геометрической. Много задач с практическим содержанием в учебнике для 9 класса под редакцией Г.В. Дорофеева [4].
- Обнаружили, что интенсивное размножение бактерий в геометрической прогрессии широко применяется в пищевой промышленности, в фармакологии, в медицине, в сельском и коммунальном хозяйствах, в банковских расчетах (начисление сложных процентов).

Список использованных источников

1. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений/ А.Г.Мордкович. – 9-е изд., стер. – М.:Мнемозина, 2007. – 231 с.;
2. Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев и др. под ред. С.А. Теляковского –М.: Просвещение, 2009 – 271 с.;
3. Алгебра. 9 класс, : Учебник для общеобразовательных учреждений / Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Феактистов И.Е. . - М.: Мнемозина, 2008, -447с. № 698, 699,702,725,734, 788, 789 (7 задач)
4. Математика. Алгебра. Функции. Анализ данных.9 кл.: Учебник для общеобразовательных учебных заведений/ Г.В. Дорофеев , С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева; под ред. Г.В. Дорофеева. -М. : Дрофа, 2000,-352с.;
5. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9 классов средней школы -М.: Просвещение, 1990.-224сю;
6. Энциклопедический словарь юного математика /Сост. А.П.Савин.- М.: Педагогика, 1989.-352с..
7. <http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm>
8. <http://students.tspu.ru/students/legostaeva/index.php?page=op>
9. <http://festival.1september.ru/articles/568100/>

