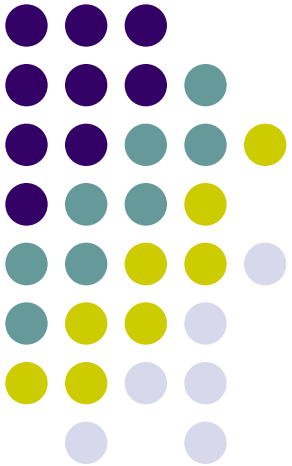
# Применение формул сокращённого умножения



900igr.net

# Примеры основных формул сокращённого умножения:

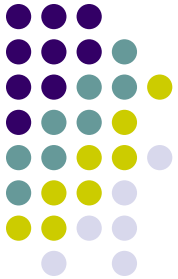
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
- $a^2 – b^2 = (a – b)(a + b)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$
- $a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$

А также:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

$$a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)\left(a^{2m} - a^{2m-1}b + \ldots + (-1)^k a^{2m-k}b^k + \ldots - ab^{2m-1} + b^{2m}\right)$$

# Исторические сведения



Формулы сокращённого умножения были известны еще 4000 лет назад. Ученые Древней Греции представляли величины не числами или буквами, а отрезками прямых. Вместо «произведение a и b» говорилось «прямоугольник, содержащийся между a и в», вместо $a^2$ - «квадрат на отрезке a».

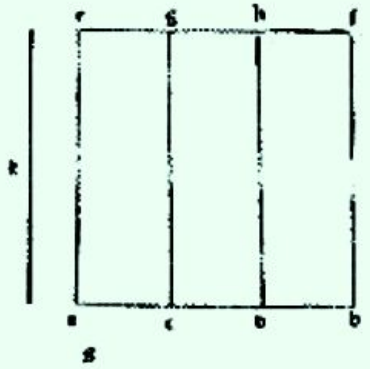
# Евклид «Начала»

II

Propositio .2

Si fuerit linea i ptes diuisa illud qđ ex ductu totiꝰ lineę in seipsã fit: equũ erit bis q̃ ex ductu eiusdẽ i oês suas ptes.

Sit linea.a.b. diuisa in.a.c.et.c.b. dico q illud qđ fit ex ductu totius.a.b.in se qđ fit.a.c.b.f. equũ est bis que fiunt ex ipso toti in singulas dictarum partium qđ palam patebit. ducta.f.g.et.d.b. equidistanter.a.c.et.b.f. Rursus iungatur.k.c̃ illa.a.b. cuiusq; p ptem illam qđ fit ex ductu.k.in totam.a.b. equũ est qđ fit ex ductu.k.in omnes ptes.a.b.et q ex.k.i.a.b. tantũ fit quantũ ex.a.b.in se.et ex.k.in eandem ptem.a.b. quãtũ ex.a.b. in omnes ptes eiusdẽ. patet igit qđ.k.et.a.b. sũt equales patet igit esse propositum.

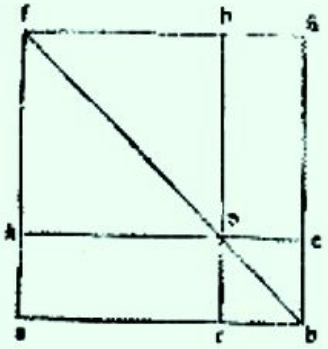



Propositio .3.

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qđ fiet ex ductu totius in alterutrã partẽ equũ erit bis q̃ ex ductu eiusdẽ partis in seipsam et alterius in alteram.

Propositio .4.

Si fuerit linea in duas ptes diuisa illud qđ ex ductu totiꝰ i seipsã fit: equũ est bis q̃ ex ductu utriusq; ptiũ i seipsas et alterius in alterã bis. Ex hoc manifestũ est qđ i oi q̃drato due superficies quas diameter secat p medium sunt ambe quadrate.



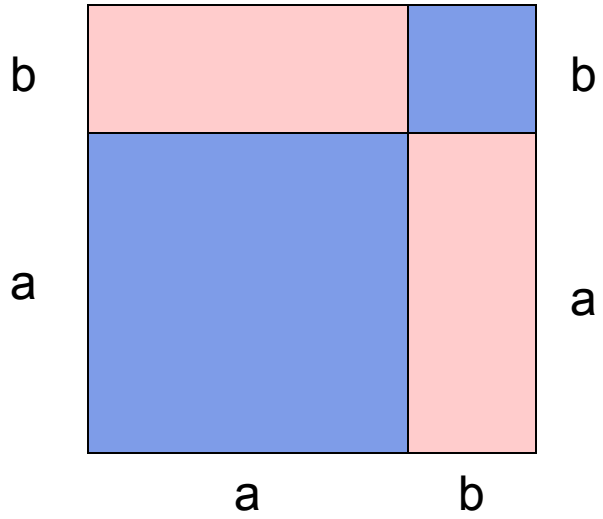

Sit linea.a.b. diuisa in.a.c.et.c.b. dico q quadratum totius a.b. equum est duobus quadratis duarum linearum.a.c.et.c.b. duplo eius qđ fit ex ductu vnius ex in alteram: describam quadratum alterius partialium scilicet.c.d.b.e. quadratũ linee.c.b. et adiungam gnomonẽ scilicet ductũ circumsistentis lineę alterius scilicet.a.c. qđ faciam hoc mõdo. in quadrato descripto protrahatur diameter b.d. et a puncto.a. educam perpendicularem sup lineam.a.b. que sit.a.k. quã.a.k. et diametrũ.b.d. protractam vsq; quo cõcurrãt in puncto.f. et a puncto.f. producam f.g. equidistantẽ lineę.a.b. quã.f.g. et.b.e. producam vsq; quo concurrãt i puncto g. et producã.c.d. vsq; ad.g. et.c.d. vsq; ad.k. Et quia duo latera.d.c. et.c.b. trianguli.d.c.b. sunt equalia: erũt per.5. primi duo anguli.c.d.b. et.c.b.d. equales: et quilibet angulus.c. est rectus erit.g. 32. primi vterq; eorũ medietas recti. Eadẽ rõne vterq; duorũ angulorũ.c.d.b. et.c.b.d. erit medietas recti. quare per secundã partem 29. primi erit vnusquisq; quatuor angulorũ qui sunt.b.f.d. et.b.d.f. et.c.k.f. et.k.d.f. rectus recti. ergo per.6. primi.f.g. et.g.b. sunt equales. similiter quoq; f.a. et.a.b. pari rõne.f.b. et.b.d. itaq; f.k. et.k.d. quare vtraq; duarum superficierũ.a.b.g.f. et.k.d.b.f. est quadrata et quia totale quadratum.a.b.f.g. qđ est quadratũ linee.a.b. constat ex duobus quadratis que cõsistunt circa diametros que sunt quadrata duarum linearum.a.c. et.c.b. et ex duobus supplementis quoq; vnusquisq; parium ex.a.c. in b.c. patet propositum nostrũ. Aliter sit linea.a.b. vt prius diuisa in.a.c. et.c.b.

# Евклид «Начала»

«Если отрезок как-либо разбит на два отрезка, то площадь квадрата, построенного на всем отрезке, равна сумме площадей квадратов, построенных на каждом из двух отрезков, и удвоенный площади прямоугольника, сторонами которого служат эти два отрезка».

Суть этой фразы в формуле:

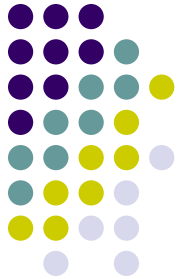
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



# Применение формул сокращённого умножения:

- в алгебре
- в геометрии

# Разложение многочленов на множители



- $(a^2 + 1)^2 – 4a^2 = ((a^2 + 1) – 2a)((a^2 + 1) + +2a) = (a^2 + 1 – 2a)(a^2 + 1 + 2a) = (a^2 – 2a + +1)(a^2 + 2a + 1) = (a - 1)^2(a + 1)^2$
- $a^2 – b^2 – a – b = (a – b)(a + b)–(a + b) =(a + + b)(a – b – 1)$

В разложении данных многочленов использовались формулы:

1) разность квадратов
2) квадрат разности
3) квадрат суммы

# Представление выражения в виде многочлена

Представить в виде многочлена $\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2$.

$$\left(x^2-\sqrt{5}\right)^2=\left(x^2\right)^2-2\cdot x^2\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=x^4-2\sqrt{5}x^2+5$$

Ответ: $x^4-2\sqrt{5}x^2+5$

Представить в виде многочлена $-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)$.

$$-\left(\sqrt{3}-x\right)\cdot\left(x^2-3\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+\sqrt{3}\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)\cdot\left(x^2-3\right)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9$$

Ответ: $x^4-6x^2+9$

# Решение уравнения

*1 способ*

$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2(x^3 - 27)$

$2x^3 + 24x = 2x^3 - 54$

$24x = -54$

**$x = -2{,}25$**

В решении данного уравнения первым способом использовались формулы:

1) куб разности

2) куб суммы

# Решение уравнения

*2 способ*

$(x - 2)^3 + (x + 2)^3 = 2(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$(x-2+x+2)((x-2)^2 - (x-2)(x+2) + (x+2)^2 = 2(x^3-27)$

$2x(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4 + x^2 + 4x + 4) = 2x^3 - 54$

$2x(x^2 + 12) = 2x^3 - 54$

$2x^3 + 24x - 2x^3 = - 54$

$24x = - 54$

**$x = - 2{,}25$**

В решении данного уравнения вторым способом использовались формулы:

1) сумма кубов; 2) квадрат разности; 3) квадрат суммы;

4) разность квадратов.

# Доказательство неравенства

Доказать неравенство:

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}\,, \textit{если}\ \mathrm{a,b,c,d} > 0$$

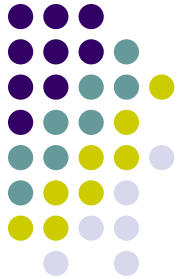
$$ac + ad + bc + bd \geq ac + bd + 2\sqrt{abcd}$$

$$ad + bc - 2\sqrt{abcd} \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad}\right)^2 - 2\sqrt{ad}\cdot\sqrt{bc} + \left(\sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$

$$\left(\sqrt{ad} - \sqrt{bc}\right)^2 \geq 0$$ , что верно.

# Делимость



Докажем, что число $n^3 - n$, где n – натуральное число, делится на 6:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$$

Заданное число есть произведение трёх последовательных чисел, из которых одно обязательно делится на 3 и хотя бы одно делится на 2. Если произведение делится и на 3, и на 2, то оно делится и на 6.

# Тождественные преобразования

Докажем тождество: $\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{1}{x-3}$.

$$\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{x(x+1)+x^2+1}{(x+1)(x-3)}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)},$$

$$\left(\frac{x}{x-3}+\frac{x^2+1}{x^3+1}\cdot\frac{x^2-x+1}{x-3}\right)\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=\frac{2x^2+x+1}{(x+1)(x-3)}\div\frac{2x^2+x+1}{x+1}=$$

$$=\frac{(2x^2+x+1)(x+1)}{(x+1)(x-3)(2x^2+x+1)}=\frac{1}{x-3}.$$

Итак, с помощью тождественных преобразований с применением формул сокращённого умножения мы левую часть равенства привели к виду правой его части. Тождество доказано.

# Задача Пифагора

«Всякое нечётное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов».

Решение:

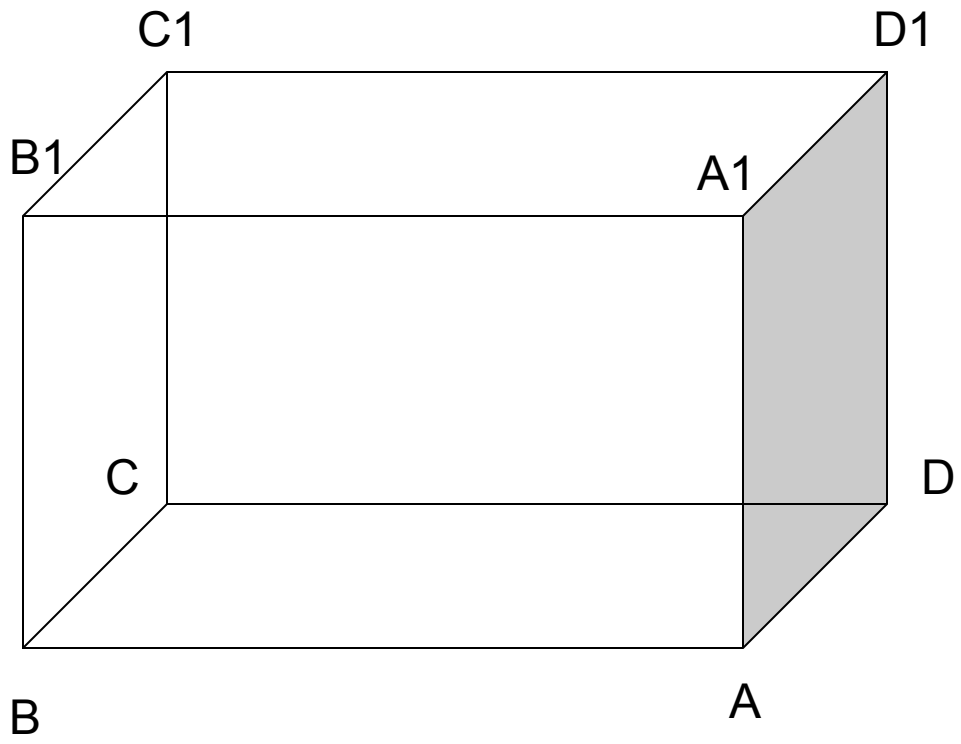
n – натуральное число

$(n + 1)^2 – n^2 = (n + 1 – n)(n + 1 + n) = 2n + 1$

$2n + 1$ – нечётное число

# Геометрическая задача

В прямоугольном параллелепипеде длина на 5 см больше ширины и на 5 см меньше высоты. Площадь поверхности равна 244 см². Найдите измерения параллелепипеда (длину, ширину, высоту).



# Геометрическая задача

Пусть x см – AB(длина), тогда (x+5) см – AA1(высота), (x-5) см – AD(ширина).

$S = 2S_{ABCD} + 2S_{AA1D1D} + 2S_{AA1B1B}$, а по условию – 244 см²

$S_{ABCD} = x(x-5)$; $S_{AA1D1D} = (x-5)(x+5)$;

$S_{AA1B1B} = x(x+5)$

<u>Составим и решим уравнение:</u>

$2x(x-5) + 2(x-5)(x+5) + 2x(x+5) = 244$

$x(x-5) + (x-5)(x+5) + x(x+5) = 122$

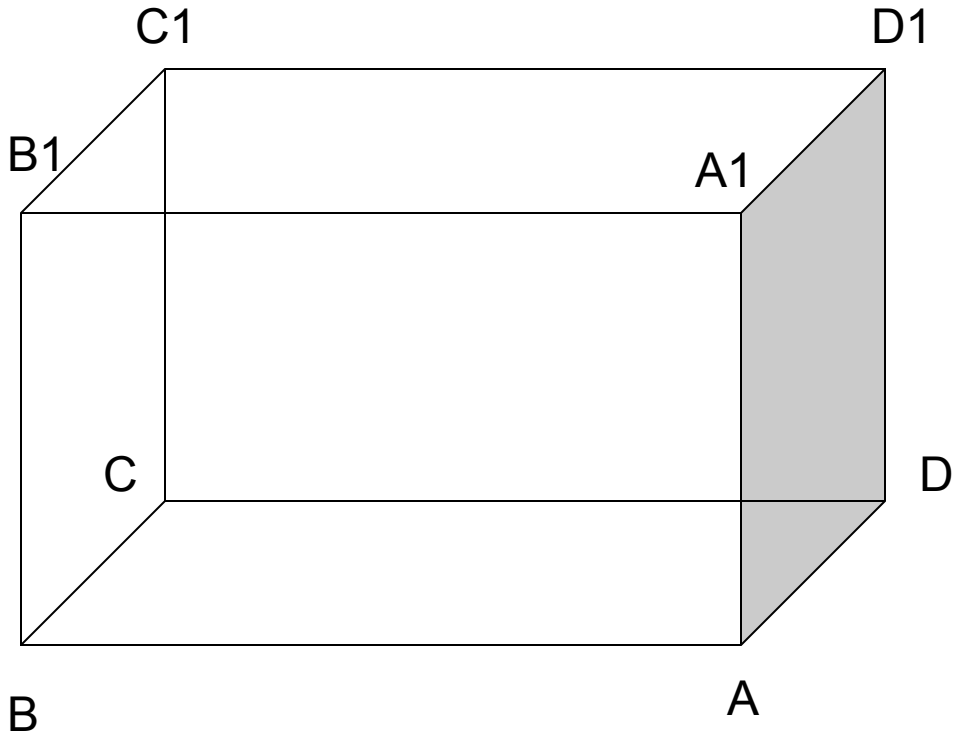
$x^2 – 5x + x^2 – 5^2 + x^2 + 5x = 122$

$3x^2 = 122+25$

$3x^2 = 147$

$x^2 = 49$, $x > 0$ (по смыслу задачи)

**<u>x = 7</u>**

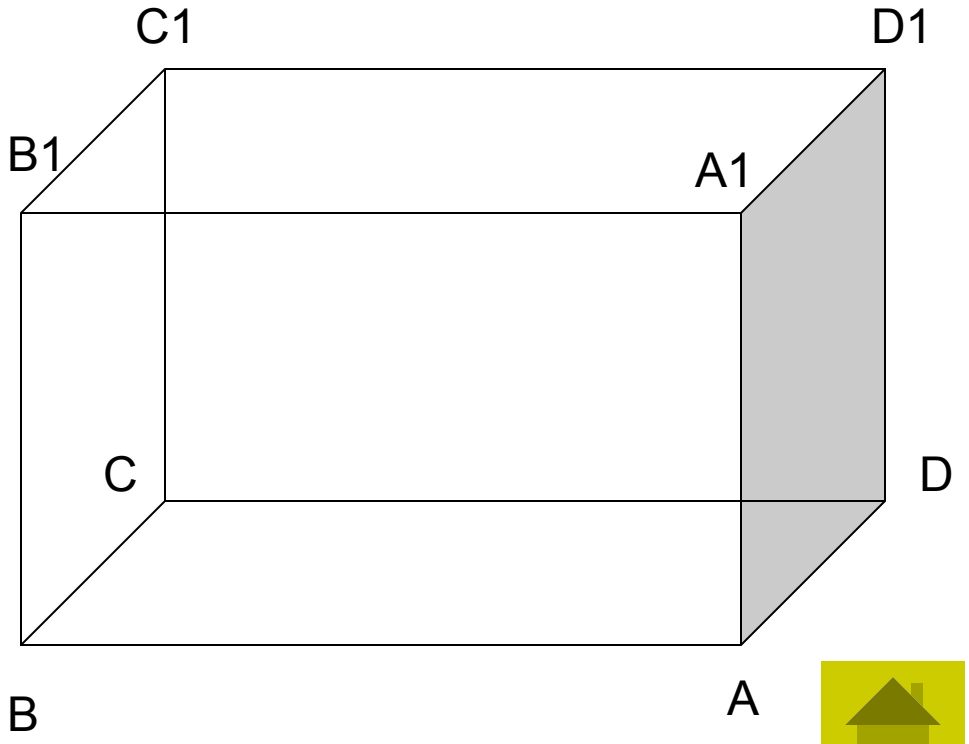


# Геометрическая задача

AB = 7 см – длина

AA1 = 7 см + 5 см = 12 см – высота

AD = 7 см – 5 см = 2 см – ширина




Ответ: 7 см; 12 см; 2 см.

# Спасибо за внимание.

Презентацию подготовили:

Плеханова Полина, Уткина Екатерина

8 «А» класс, ГОУ гимназия №144