

Математик

а

Приемы доказательства неравенств, содержащих переменные

Автор: Жагалкович Полина Сергеевна

Учебное заведение: МОУ Лицей №1 г. Комсомольск-на-Амуре

Адрес автора: Хабаровский край, с.п. «Село Хурба» ул.
Добровольского, ДОС 2-10

Руководитель: Будлянская Наталья
Леонидовна

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

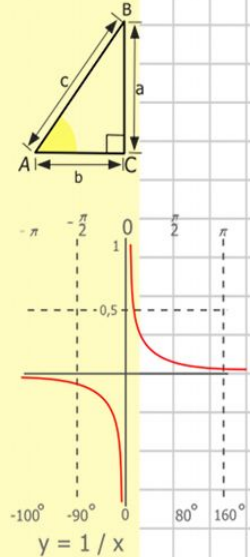
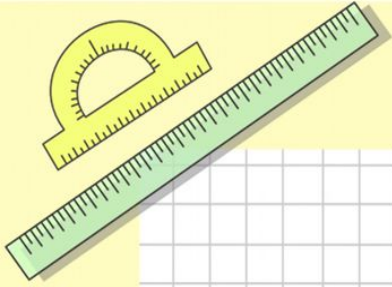
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

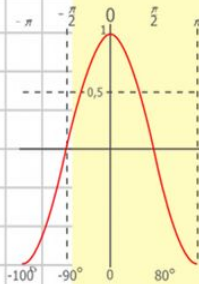
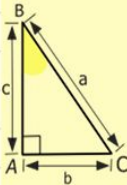
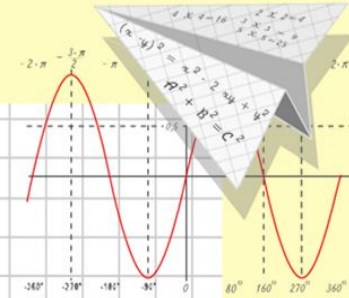
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

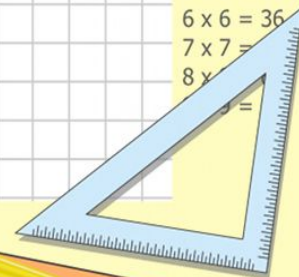
$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 5 \times 5 &= 25 \\ 6 \times 6 &= 36 \\ 7 \times 7 &= 49 \\ 8 \times 8 &= 64 \end{aligned}$$

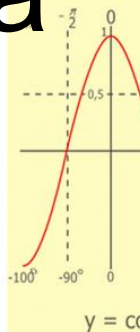
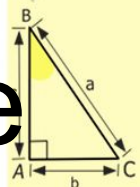
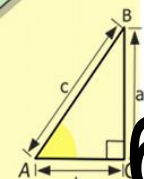
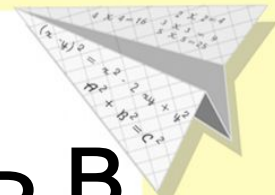
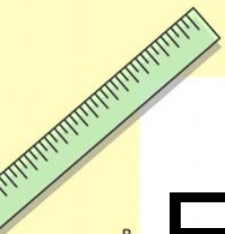


$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$y = \cos x$$





$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ 2500 \\ + 210 \\ \hline 105000 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

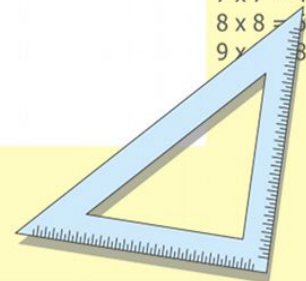
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.
(М.И. Калинин)

1. Представление левой части неравенства в виде суммы неотрицательных слагаемых (правая часть равна 0) с использованием тождеств.

Пример 1. Доказать что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 > 0$$

Доказательство. 1 способ.

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 - 2x + 20 &= (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 - 2x + 1) + 3 = \\ &= (x^2 - 4)^2 + (x - 1)^2 + 3 > 0 \end{aligned} \quad \text{для } x \in \mathbb{R}$$

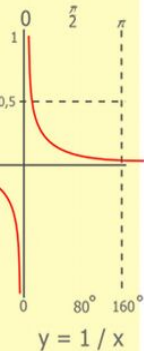
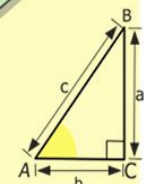
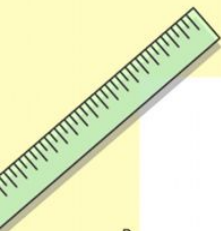
2 способ.

$$x^4 - 7x^2 - 2x + 20 = (x^2 - 4)^2 + x^2 - 2x + 4$$

$$(x^2 - 4)^2 \geq 0 \quad \text{для } x \in \mathbb{R}$$

$$x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \text{для } x \in \mathbb{R} \quad \text{т. к.}$$

$a = 1$ $\frac{D}{4} = 1 - 4 = -3 < 0$ квадратичной функции $y = x^2 - 2x + 4$, что означает ее положительность при любом действительном x .



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \ 5 \ 00 \\ \times 4 \ 2 \\ \hline 21 \ 0 \\ + 84 \\ \hline 105 \ 0 \ 00 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

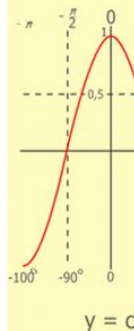
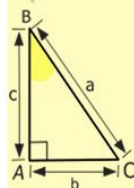
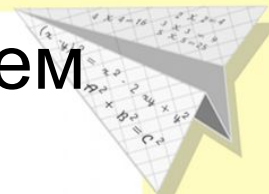
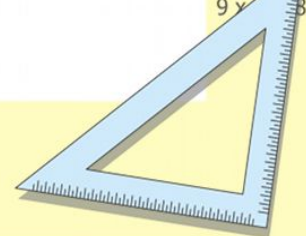
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

Пример 2. Доказать, что для любых x и y

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 \geq 0$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 &= (x - y)^2 + 2(x - y) + 1 = \\ &= (x - y + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

и y

Пример 3. Доказать, что $x^2 + 4y^2 + 4y - 4x + 5 \geq 0$

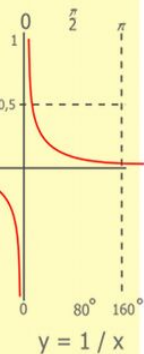
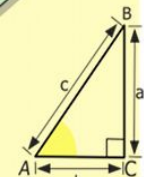
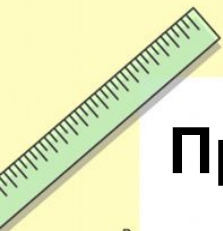
Доказательство.

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 + 4y - 4x + 5 &= (x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) = \\ &= (x - 2)^2 + (2y + 1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Пример 4. Доказать, что для любых a и b

Доказа $a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2b^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab(a + b) + 2a^2b^2 &= \\ &= (a^2 - 2a^2b + a^2b^2) + (b^2 - 2ab^2 + a^2b^2) = \\ &= a^2(1 - b)^2 + b^2(1 - a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

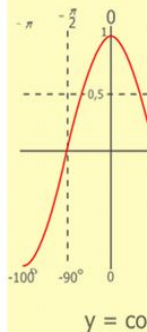
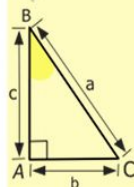
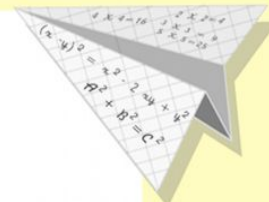
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

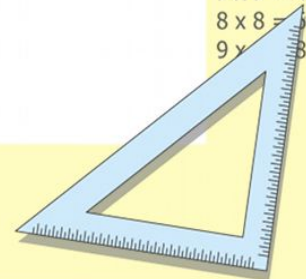


$$\begin{cases} x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



2. Метод от противного

Вот хороший пример применения данного метода.

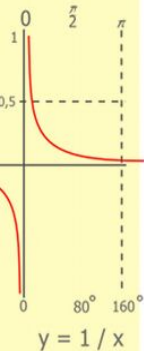
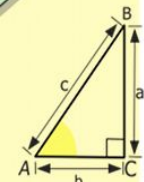
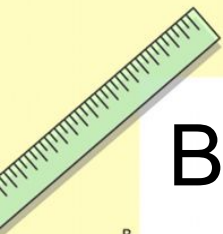
Доказать, что $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ для $a, b \in R$.

Доказательство.

Предположим, что $a^2 + ab + b^2 < 0$.

Но $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$ ивно доказывает, что наше предположение неверно.

Ч.Т.Д.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

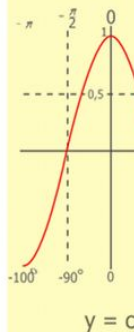
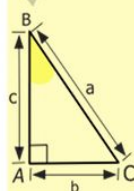
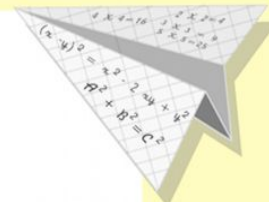
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

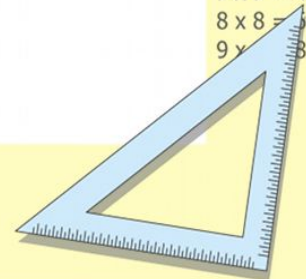


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$
$$\underline{x = 70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Пример 5. Доказать, что для любых чисел A, B, C справедливо

неравенств
$$\frac{A + B + C}{3} \leq \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}}$$

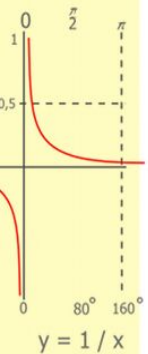
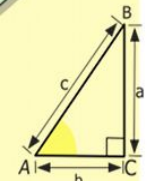
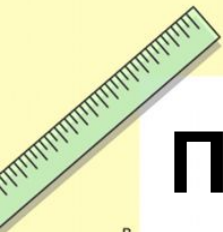
Доказательство. Очевидно, что данное неравенство достаточно установить для неотрицательных A, B

дующее

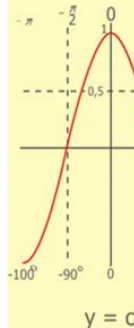
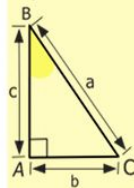
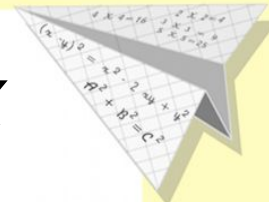
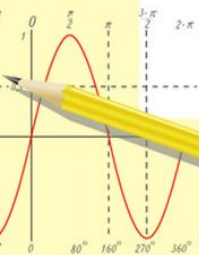
$$\sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}} = \sqrt{\frac{|A|^2 + |B|^2 + |C|^2}{3}} \geq \frac{|A| + |B| + |C|}{3} \geq \frac{A + B + C}{3}$$

Следствие.

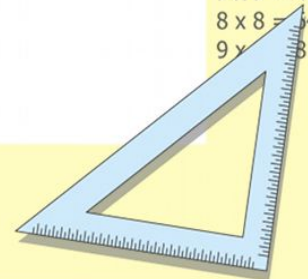
, что является обоснованием исходного неравенства.



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 12500 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} y = \sin 90^\circ \\ y = \sin 45^\circ \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{array}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

Пусть теперь нашлись такие неотрицательные числа A, B и C , для которых выполняется

$$\frac{A + B + C}{3} \leq \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}}$$

$$\left(\frac{A + B + C}{3}\right)^2 > \frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}$$

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC}{9} > \frac{A^2 + B^2 + C^2}{3}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC - 3A^2 - 3B^2 - 3C^2 > 0$$

$$-(2A^2 + 2B^2 + 2C^2 - 2AB - 2AC - 2BC) > 0$$

$$-((A - B)^2 + (A - C)^2 + (B - C)^2) > 0$$

, что невозможно ни при каких действительных A, B и C . Сделанное выше предположение опровергнуто, что доказывает исследуемое исходное неравенство.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

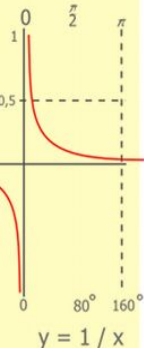
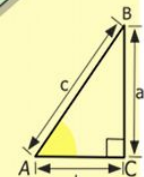
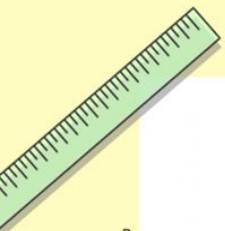
$$x = 25y + 45$$

$$y = 1$$

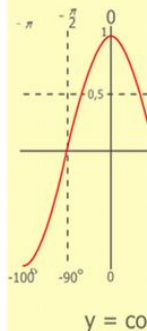
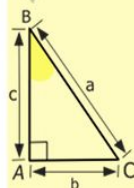
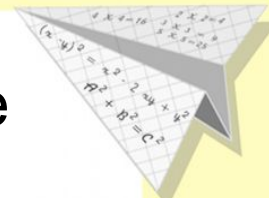
$$x = 25 + 45$$

$$x = 70$$

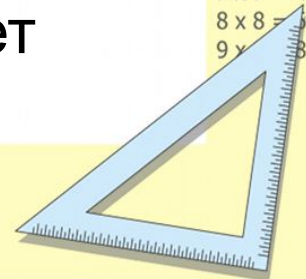
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Использование свойств квадратного трехчлена

Метод основан на свойстве

неотрицательности квадратного трехчлена $P(x) = ax^2 + bx + c$, если $a > 0$

$D < 0$, если

и

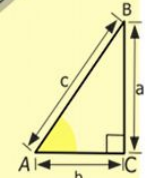
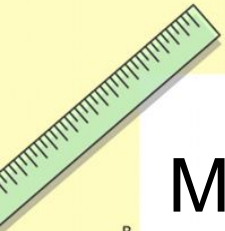
$2x^2 - 6x + 13 > 0$ для $x \in \mathbb{R}$

Пример 6. Доказать, что

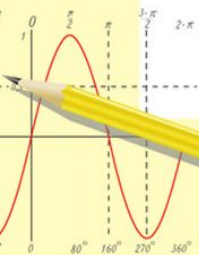
Доказательство:

$$P(x) = 2x^2 - 6x + 13 > 0$$

$$D = 9 - 13 \cdot 2 = -17, \frac{D}{4} < 0 \Rightarrow 2x^2 - 6x + 13 > 0 \text{ для } x \in \mathbb{R}$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

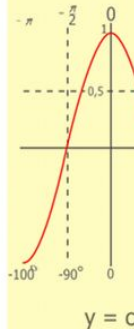
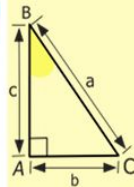
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

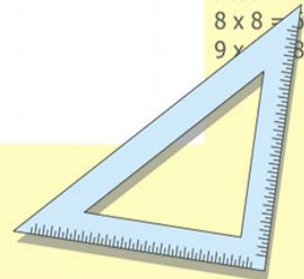


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Пример 7. Доказать, что для любых действительных x и y имеет место быть неравенство $x^2 + y^2 + xy + x - y + 3 > 0$

Доказательство. Рассмотрим левую часть

выражения как квадратный трехчлен относительно x .

$$(y+1)^2 - 4y^2 + 4y - 12 = -3(y-1)^2$$

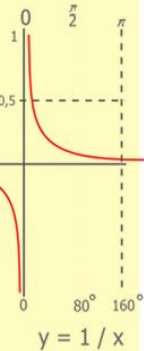
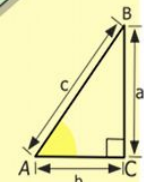
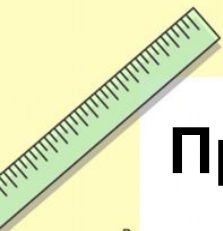
для $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + y^2 + xy + x - y + 3 > 0$$

$$\Rightarrow P(x) > 0$$

и

верно при любых действительных значениях x и y .



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ 2500 \\ + 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

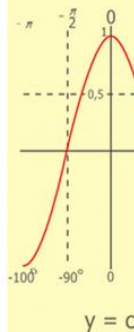
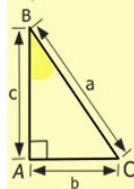
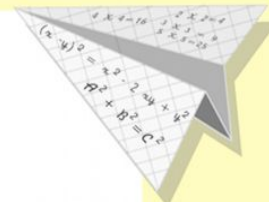


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

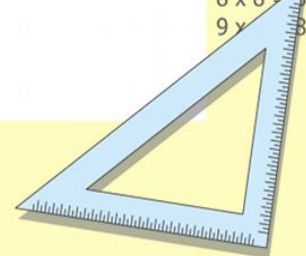
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$\frac{x}{70}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Пример 8. Доказать, что $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$

для любых действительных значениях x и y .

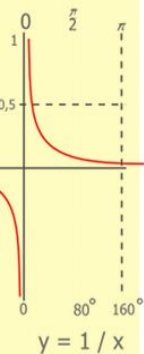
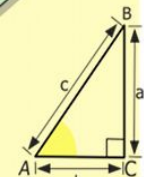
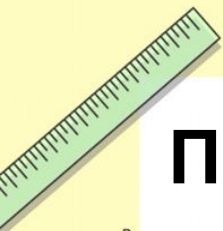
Доказательство. Пуст $P(y) = 3y^2 + 2(x + 3)y + x^2 + 2x + 3$

$$\frac{D}{4} = (x + 3)^2 - 3(x^2 + 2x + 3) =$$

$$= x^2 + 6x + 9 - 3x^2 - 6x - 9 = -2x^2 \leq 0 \quad \text{для } x \in \mathbb{R}$$

Это означает, что $P(y) \geq 0$ для любых действительных y и неравенство

$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geq 0$ выполняется при любых действительных x и y .



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 210 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

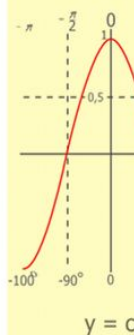
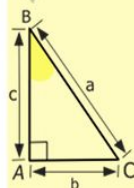
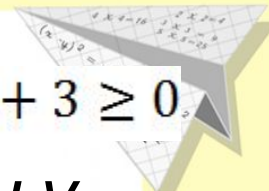
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

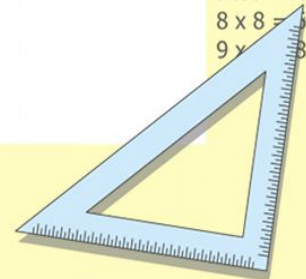


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Метод введения новых переменных или метод

ПОДСТАНОВКИ

Пример 9. Доказать, что для любых неотрицательных чисел x, y, z

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}$$

Доказательство. Воспользуемся верным неравенством для $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$$

$$a = \sqrt{x}$$

$$b = \sqrt{y}$$

$$c = \sqrt{z}$$

Получаем исследуемое неравенство

$$x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz}$$

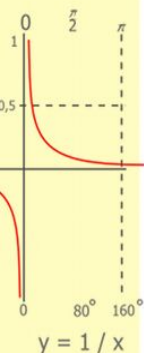
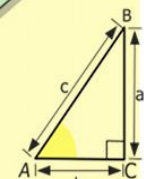
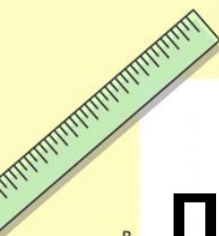
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

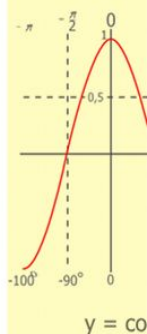
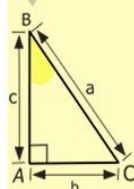
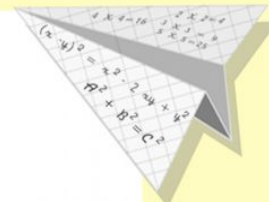
$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\begin{cases} y = \sin 90^\circ \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

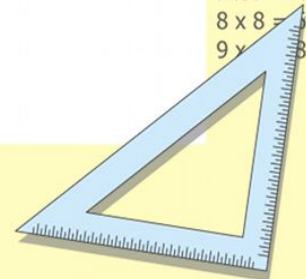
$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Использование свойств функций.

Пример 10. Докажем неравенство $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ для любых a и b .

Доказательство. Рассмотрим 2 случая:

1) Если $a=b$, то $a^2 + ab + b^2 = 3a^2 \geq 0$ для $a \in \mathbb{R}$ причем равенство достигается только при

$$a=b=\hat{a} \neq b$$

2) Если

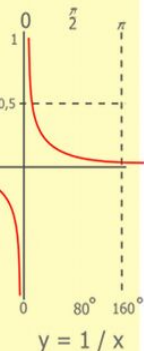
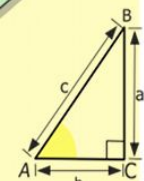
$$a^2 + ab + b^2 = \frac{c^2 - b^2}{a - b}$$

$$y = x^3 \uparrow$$

на $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\left(\frac{a - b}{a - b} \right) * \left(\frac{a^3 - b^3}{a - b} \right) > 0, \text{ что доказывает неравенство}$$

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0$$



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ 2500 \\ + 210 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \sin C$$

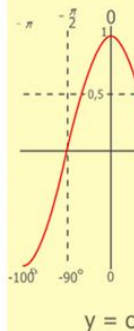
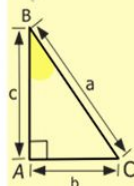
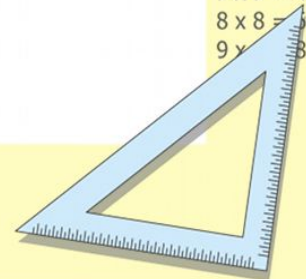
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$

Пример 11. Докажем, что для любых $a \neq b$

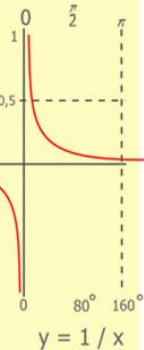
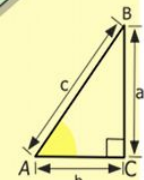
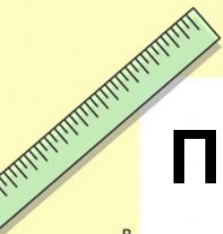
$$a^6 + b^6 > a^5b + ab^5$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} a^6 + b^6 - a^5b - ab^5 &= a^6 - a^5b + b^6 - ab^5 = \\ &= a^5(a - b) - b^5(a - b) = (a - b)(a^5 - b^5) \end{aligned}$$

$y = x^5$ на $\mathbb{R}$.

Если $a \neq b$, то знаки чисел $(a - b)$ и $a^5 - b^5$ совпадают, что означает положительность исследуемой разности $\Rightarrow a^6 + b^6 > a^5b + ab^5$



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 2500 \\ \hline 2500 \\ + 210 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

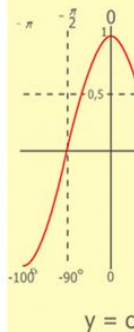
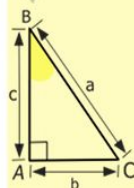
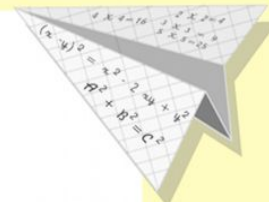
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

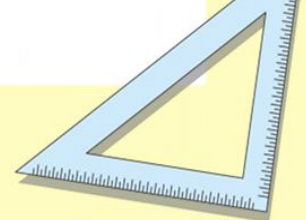


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Применение метода

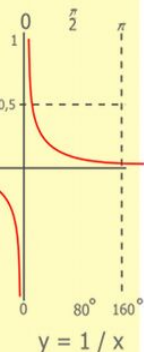
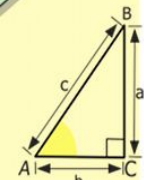
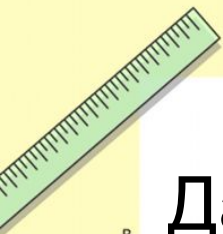
математической индукции

Данный метод применяется для доказательства неравенств относительно натуральных чисел.

Пример 12. Доказать $3^n > n + 1$ то для любого $n \in \mathbb{N}$

1) Проверим истинность утверждения при $n = 1$
 $3^1 > 1 + 1$
- (верно)

2) Предположим верность утверждения при $n = k$
($k > 1$)
 $3^k > k + 1$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

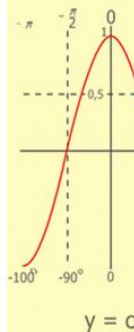
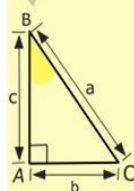
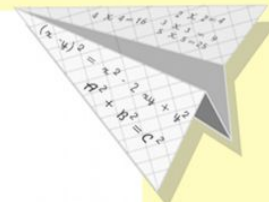


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

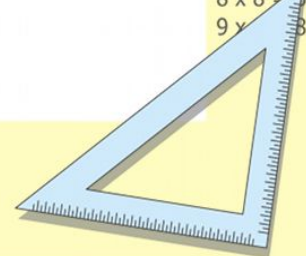
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



3) Докажем истинность утверждения при

$$3^{k+1} > k + 2$$

$$3^k > k + 1 \quad | \cdot 3$$

$$3^{k+1} > 3k + 3$$

$$3k + 3 \quad k + 2 \quad 3k + 3 - k - 2 = 2k + 1 \quad 2k + 1 > 0$$

Сравним:

$$3k + 3 > k + 2$$

и :

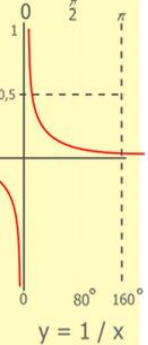
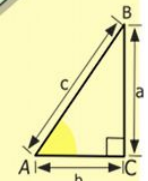
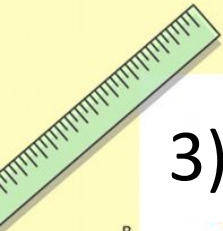
$$3k + 3 > k + 3$$

Имеем:

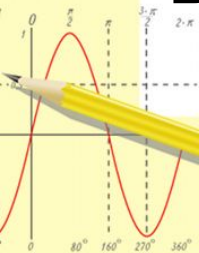
$$3k + 3 > k + 2$$

$$3^{k+1} > k + 2$$

Вывод: утверждение верно для любого $n \in \mathbb{N}$.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

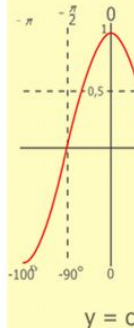
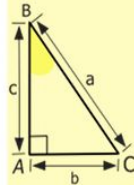
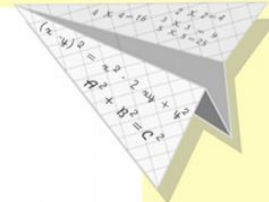
$$\sin 90^\circ = 1$$



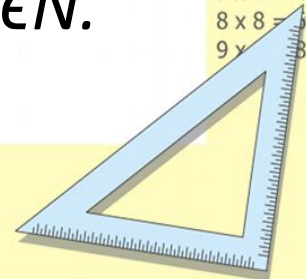
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{x}{70}$$



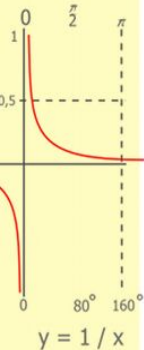
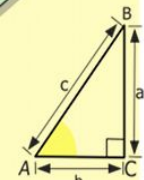
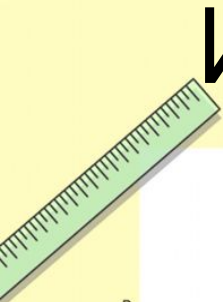
$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



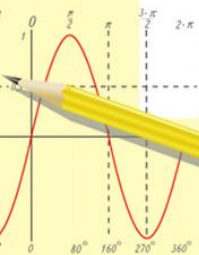
Использование замечательных неравенств

- Теорема о средних (неравенство Коши)
- Неравенство Коши – Буняковского
- Неравенство Бернулли

Рассмотрим каждое из перечисленных неравенств в отдельности.



$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

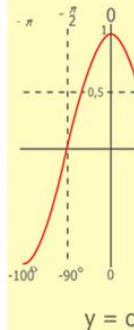
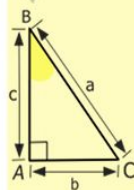
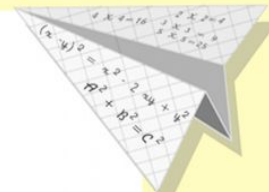


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

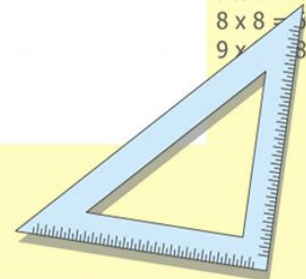
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$x = 70$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



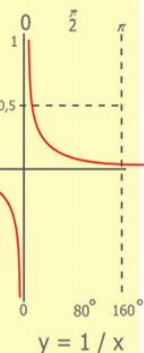
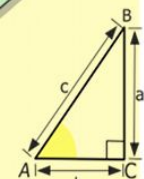
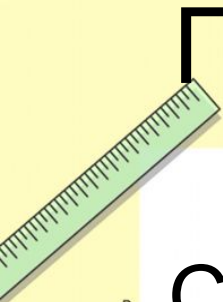
Применение теоремы о средних (неравенства Коши)

Среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел больше или равно их среднего геометрического

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad a \geq 0$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

Рассмотрим частные случаи этой теоремы:



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

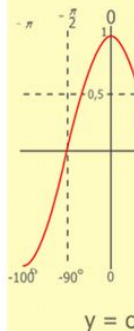
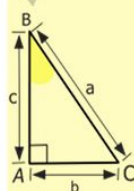
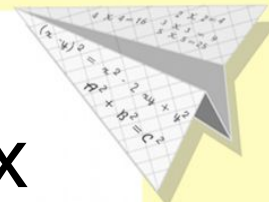
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

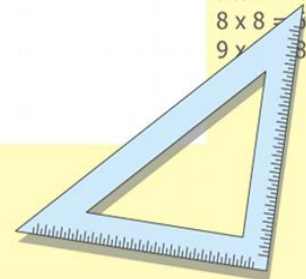


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



1. Пусть $n=2, a \geq 0, b \geq 0$, тогда $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

2. Пусть $n=2, a > 0$, тогда $a + \frac{1}{a} \geq 2$

3. Пусть $n=3, a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, тогда

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Пример — доказать, что для всех неотрицательных a, b, c выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

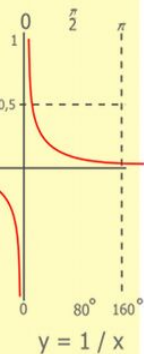
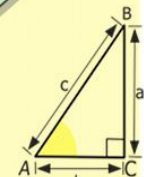
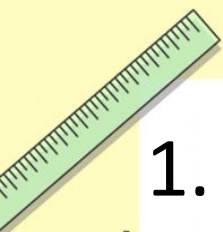
Доказательство.

$$+ a^2 + b^2 \geq 2ab$$

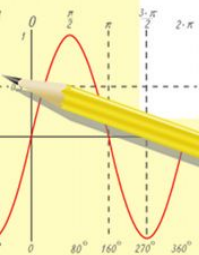
$$+ a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$+ c^2 + b^2 \geq 2cb$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$$



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

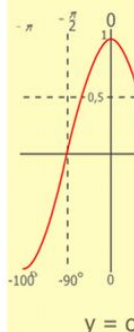
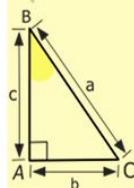
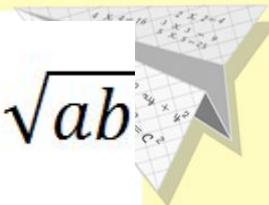


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

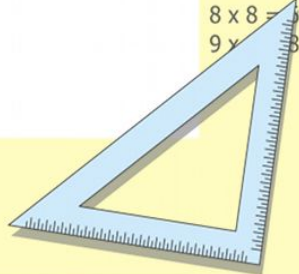
$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Неравенство Коши - Буняковского

Неравенство Коши - Буняковского

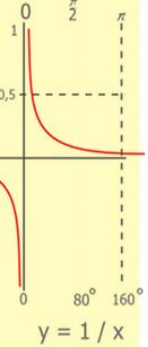
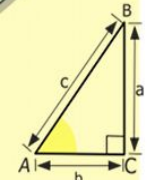
утверждает, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо соотношение

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}$$

Доказанное неравенство имеет геометрическую интерпретацию. Для $n=2,3$ оно выражает известный факт, что скалярное произведение двух векторов на плоскости и в пространстве не превосходит произведение их длин. Для $n=2$

неравенство $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Для $n=3$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$



$$\begin{array}{r} 12500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

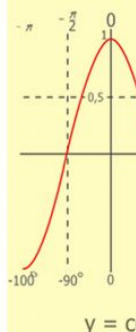
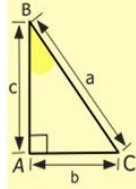
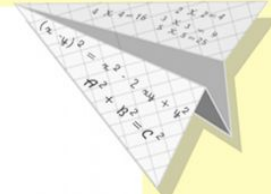
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

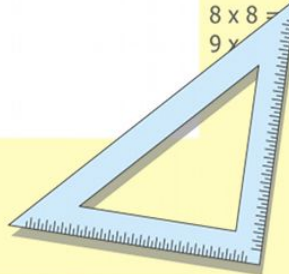


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Пример 14. Доказать, что для любых $a, b, c \in R$ справедливо неравенство $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Доказательство. Запишем исследуемое неравенство в сл $(1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2)$

Это заведомо истинное неравенство, так как является частным случаем неравенства Коши – Буняковского.

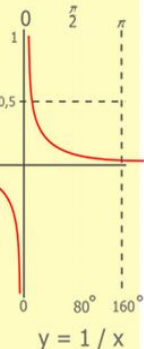
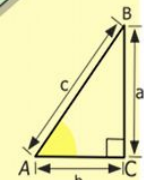
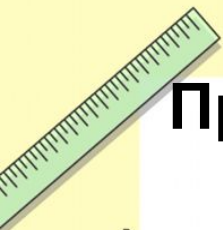
Пример 15. Доказать, что $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq abc(a + b + c)$ справедливо неравенство

Доказательство. Достаточно записать данное

$$\sqrt{(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2} \cdot \sqrt{(ac)^2 + (ab)^2 + (bc)^2} \geq abca + bcab + cabc$$

и сослаться на

неравенство Коши – Буняковского.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 2100 \\ + 8400 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \sin C$$

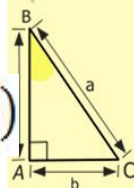
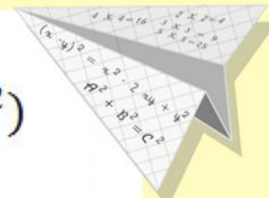
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



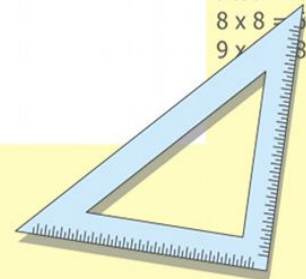
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Неравенство Бернулли

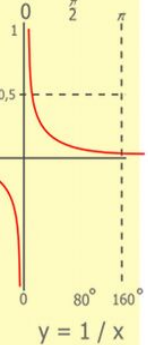
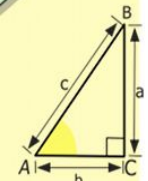
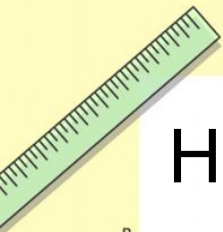
Неравенство Бернулли утверждает, что если $x > -1$, то для всех натуральных значений n выполняется неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Неравенство может применяться для выражений $1,005^{200}$ или $0,992^{10}$

$$1,005^{200} = (1 + 0,005)^{200} \geq 1 + 200 \cdot 0,005 = 2$$

$$0,994^{10} = (1 - 0,006)^{10} \geq 1 - 10 \cdot 0,006 = 0,94$$

Кроме того, очень большая группа неравенств может быть легко доказана с помощью теоремы Бернулли.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 840 \\ \hline 105000 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

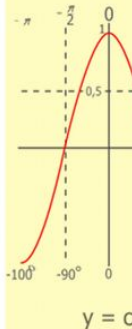
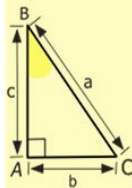
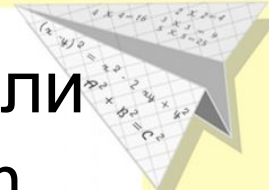


$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 25 + 45 \end{cases}$$

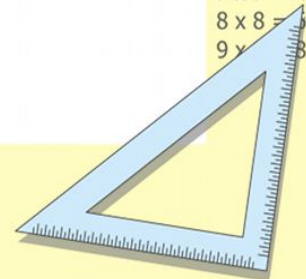
$$x = 70$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$y = \cos$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



Пример 16. Доказать, что для любых $n \in \mathbb{N}$

$$(1,5)^n \geq 1 + 0,5n$$

Доказательство $1,5^n = (1 + 0,5)^n$ пожив $x=0,5$ и применив теорему Бернулли для

$$(1 + 0,5)^n$$

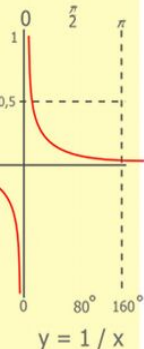
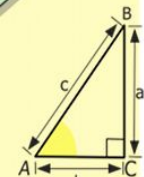
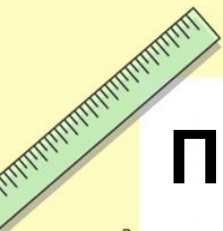
, получим требуемое неравенство.

Пример 17. $(0,7)^n \geq 1 - 0,3n$ для любых $n \in \mathbb{N}$

Доказательство

$$(0,7)^n = (1 - 0,3)^n \geq 1 - 0,3n$$

по теореме Бернулли, что и требовалось.



$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 84 \\ \hline 10500 \end{array}$$



$$\frac{a}{A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

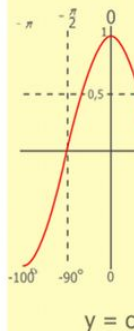
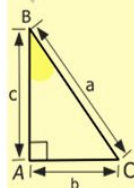
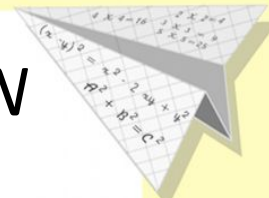
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

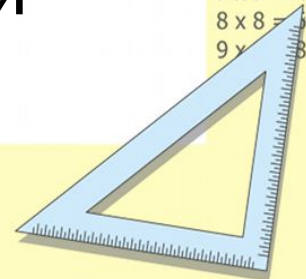


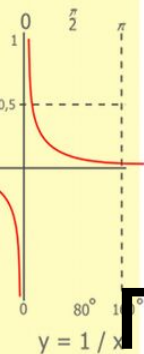
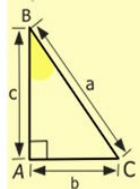
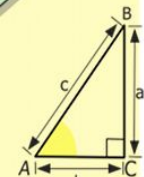
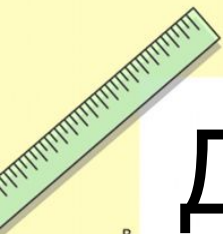
$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ \hline x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$





$$\begin{array}{r} 2500 \\ \times 42 \\ \hline 210 \\ + 840 \\ \hline 10500 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 6 = 36 \\ 7 \times 7 = 49 \\ 8 \times 8 = 64 \\ 9 \times 9 = 81 \end{array}$$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

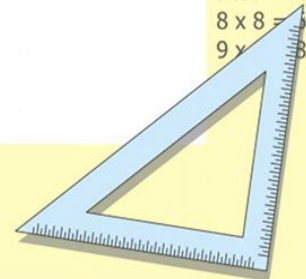
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\sin 90^\circ = 1$$



$$\begin{cases} y = \sin 90 \\ x = 25y + 45 \\ y = 1 \\ x = 25 + 45 \\ x = 70 \end{cases}$$

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$



Давида Гильберта спросили
об одном из его бывших
учеников. "А, такой-то? -
вспомнил Гильберт. - Он стал
поэтом. Для математики у него
было слишком мало
воображения.