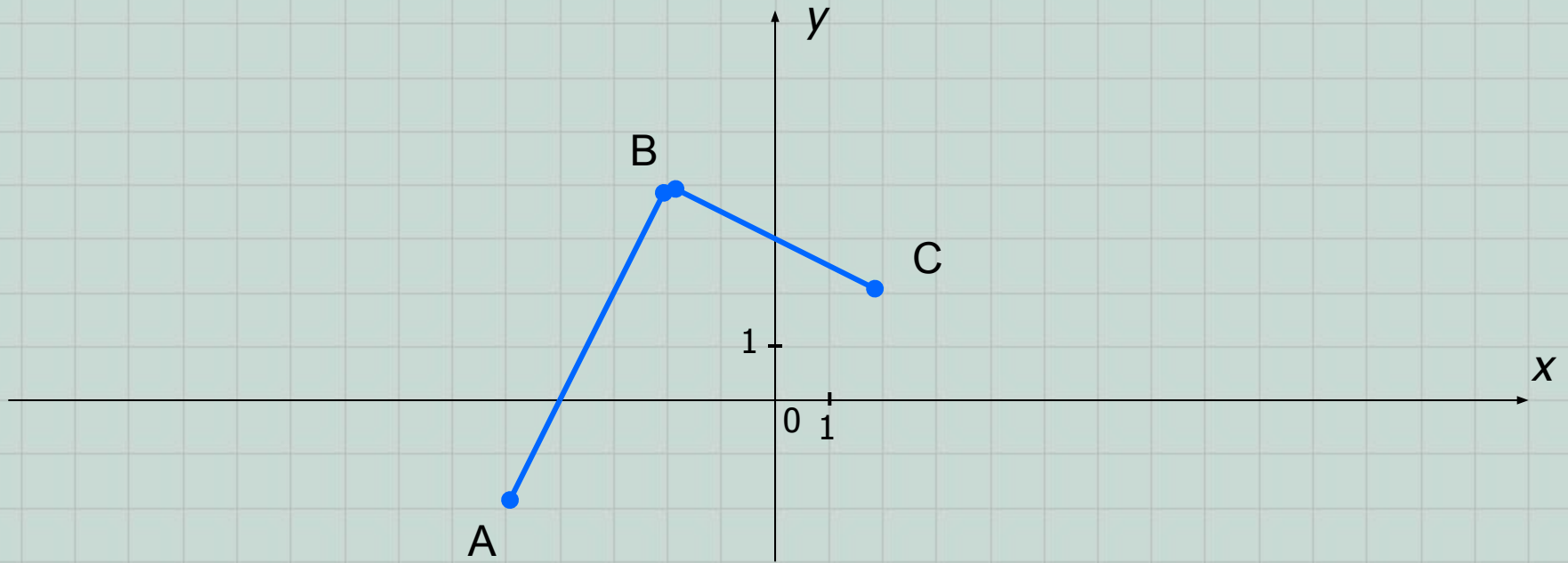


Преобразования графиков функций.

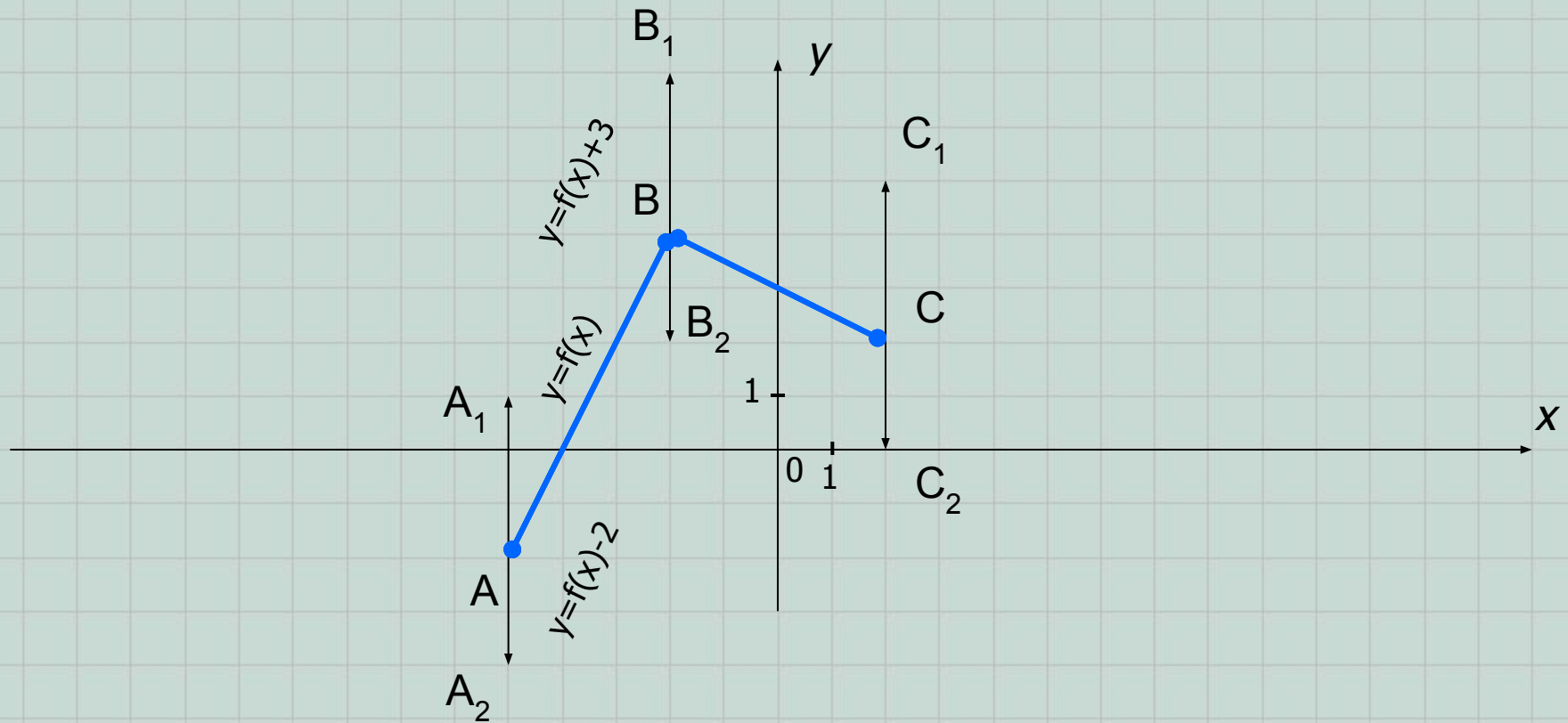
*Алгебра и начала анализа,
10 класс.*

В качестве исходного графика функции $y=f(x)$ выберем ломанную, состоящую из двух звеньев, заданных точками $A(-5;-2)$, $B(-2;4)$ и $C(2;2)$.



Рассмотрим случаи преобразования данного графика, связанные с изменениями формулы, задающей эту функцию.

I. $y=f(x)+a$, где $a \in \square$.

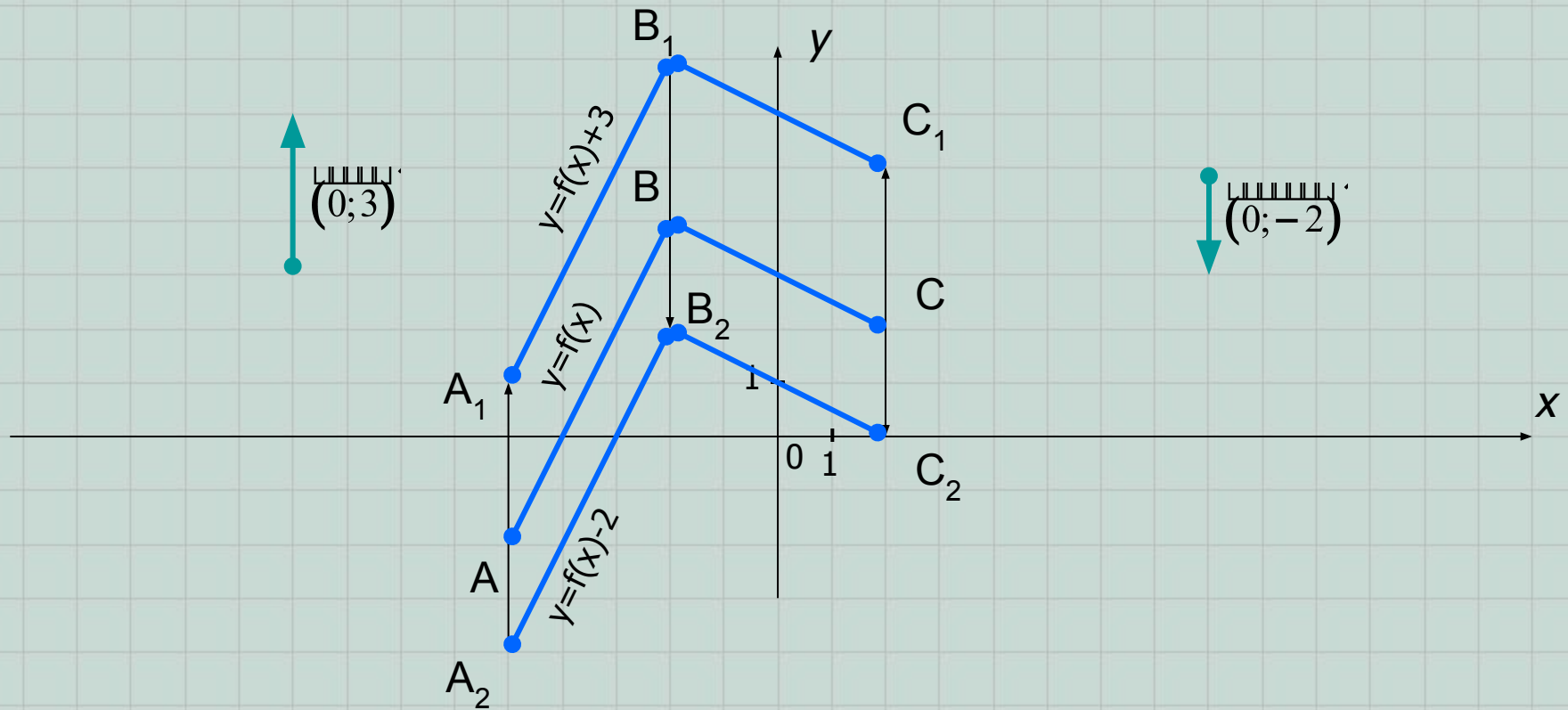


В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на число a , по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Oy:

- 1) **вверх** на a ед.отр., если $a > 0$ или
- 2) **вниз** на a ед.отр., если $a < 0$.

Например: 1) $y=f(x)+3$; или 2) $y=f(x)-2$.

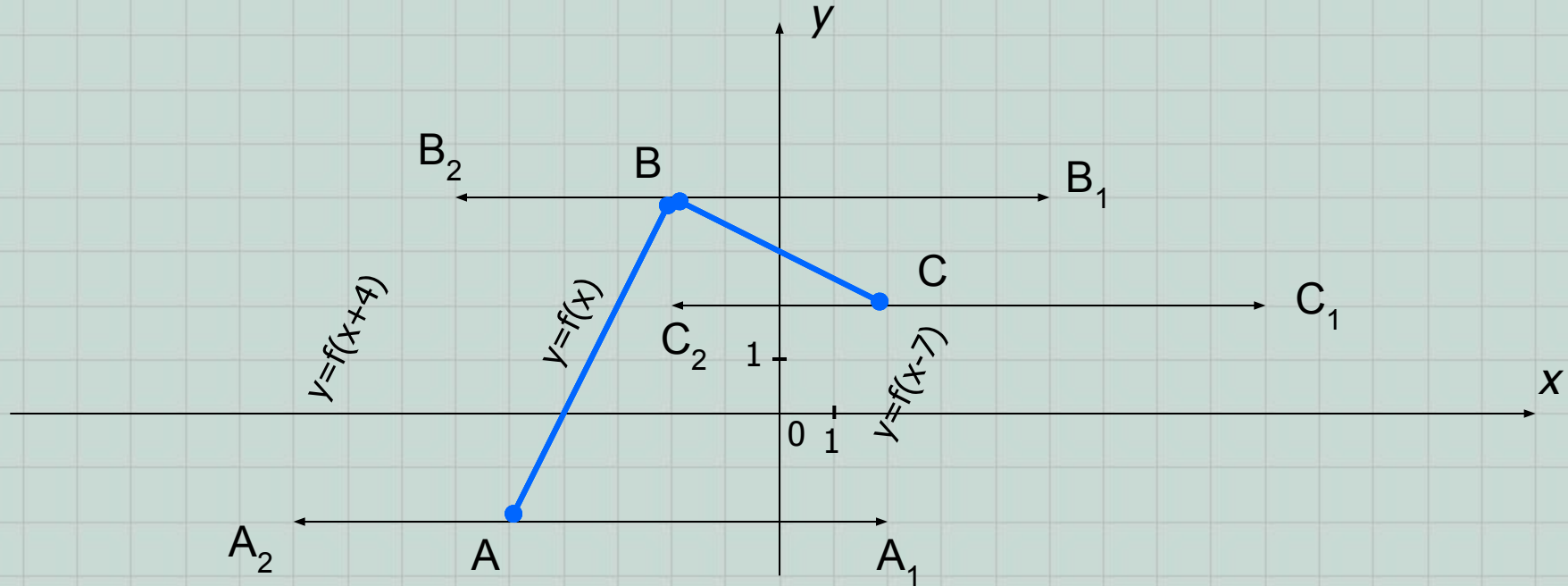
I. $y=f(x)+a$, где $a \in \mathbb{Q}$.



Понятие «параллельного переноса вдоль оси Oy вверх..., вниз...» можно заменить на «параллельный перенос на вектор с координатами $(0; a)$ ».

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

II. $y=f(x-a)$, где
 $a \in \square$.

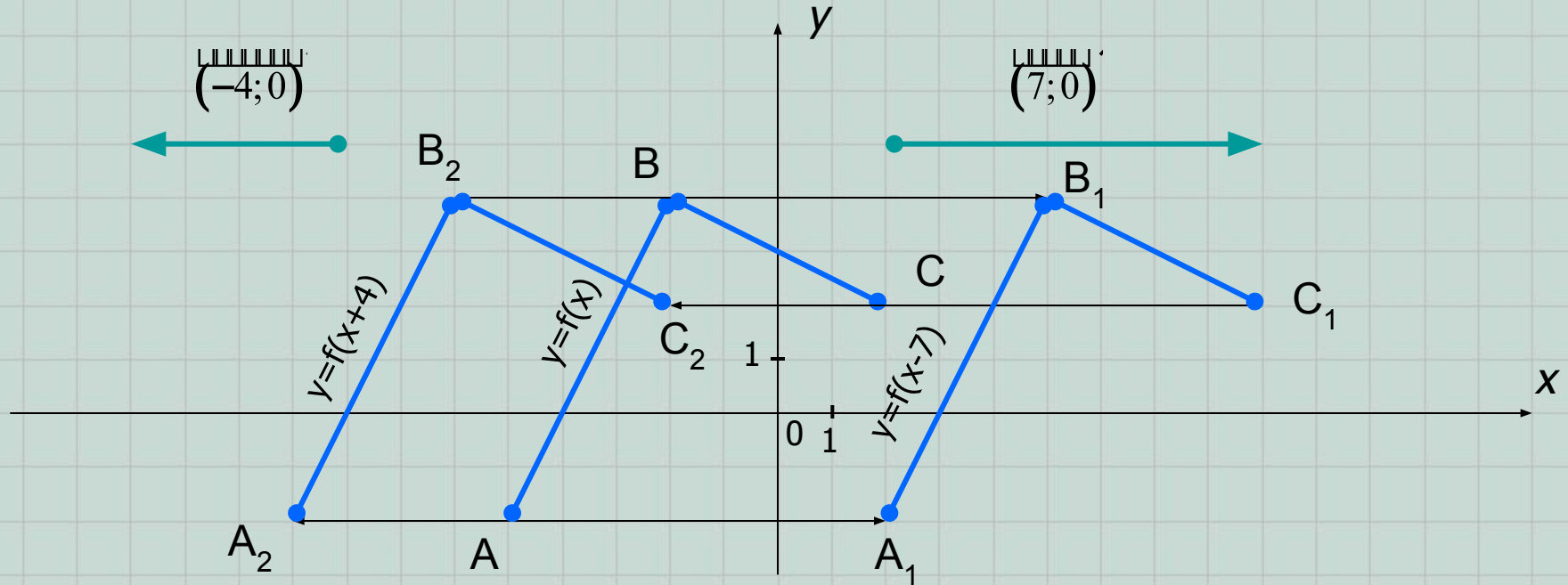


В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на число **a**, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к параллельному переносу графика функции вдоль оси Oх:

- 1) **вправо** на **a** ед.отр., если **a**>0 или
- 2) **влево** на **a** ед.отр., если **a**<0.

Например: 1) $y=f(x-7)$ или 2) $y=f(x-(-4))=f(x+4)$.

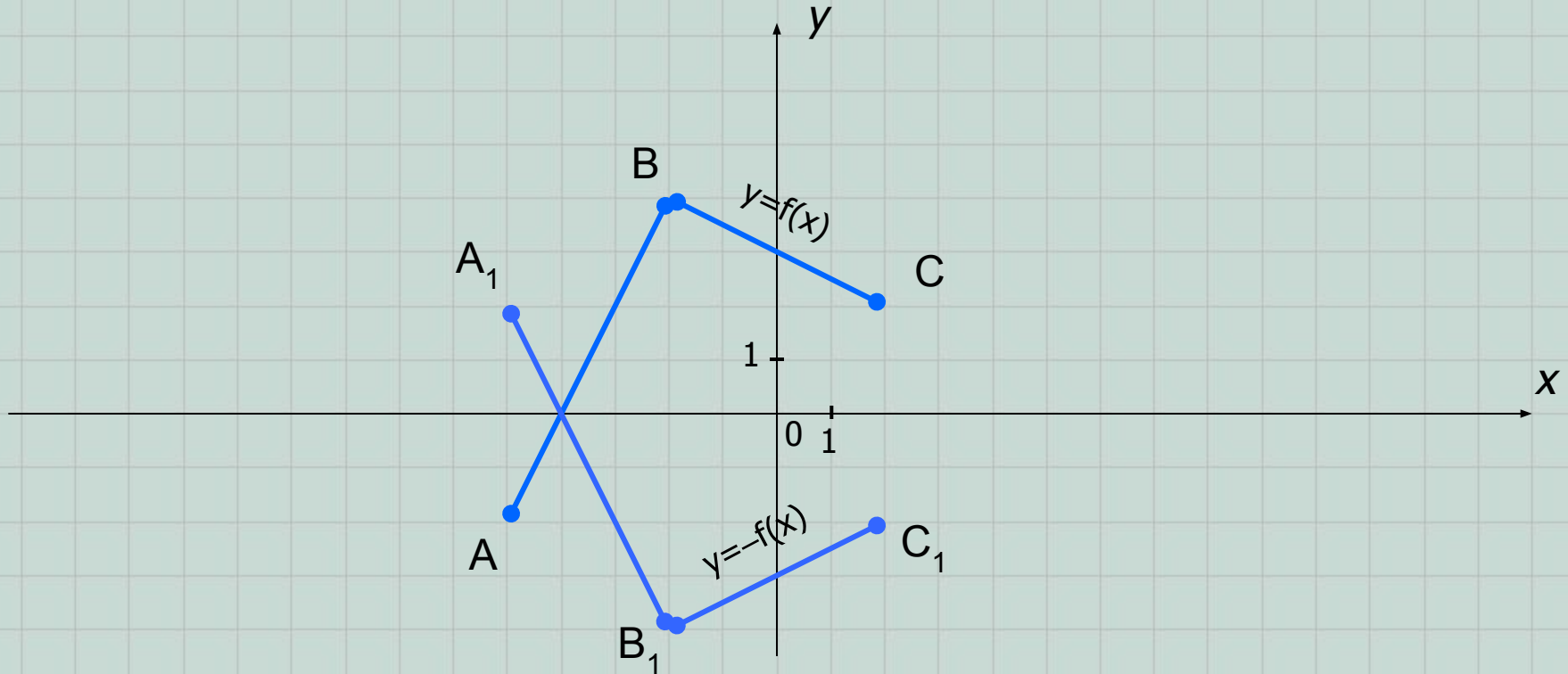
II. $y=f(x-a)$, где $a \in \square$.



Вместо понятия «параллельный перенос вдоль оси Ox вправо..., влево...» можно использовать понятие «параллельного переноса на вектор с координатами $(a; 0)$.»

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

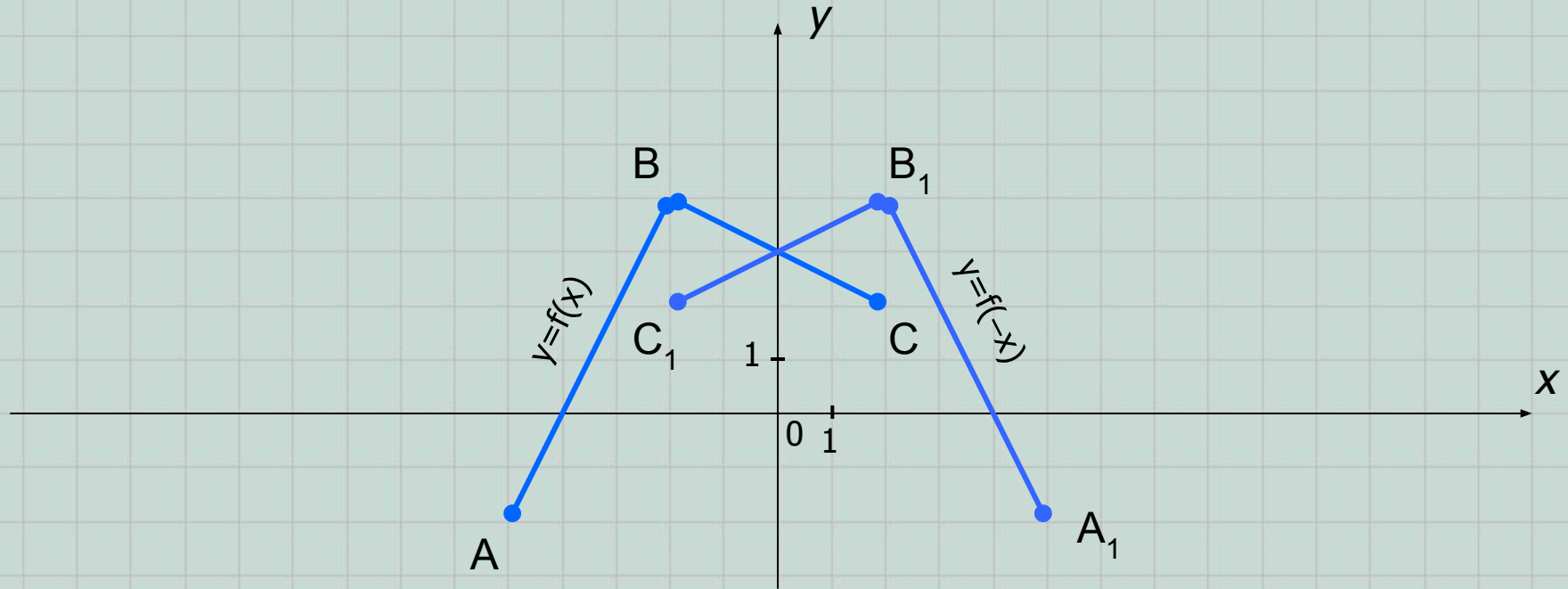
III. $y = -f(x)$.



В данной формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Ox .

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

IV. $y=f(-x)$.

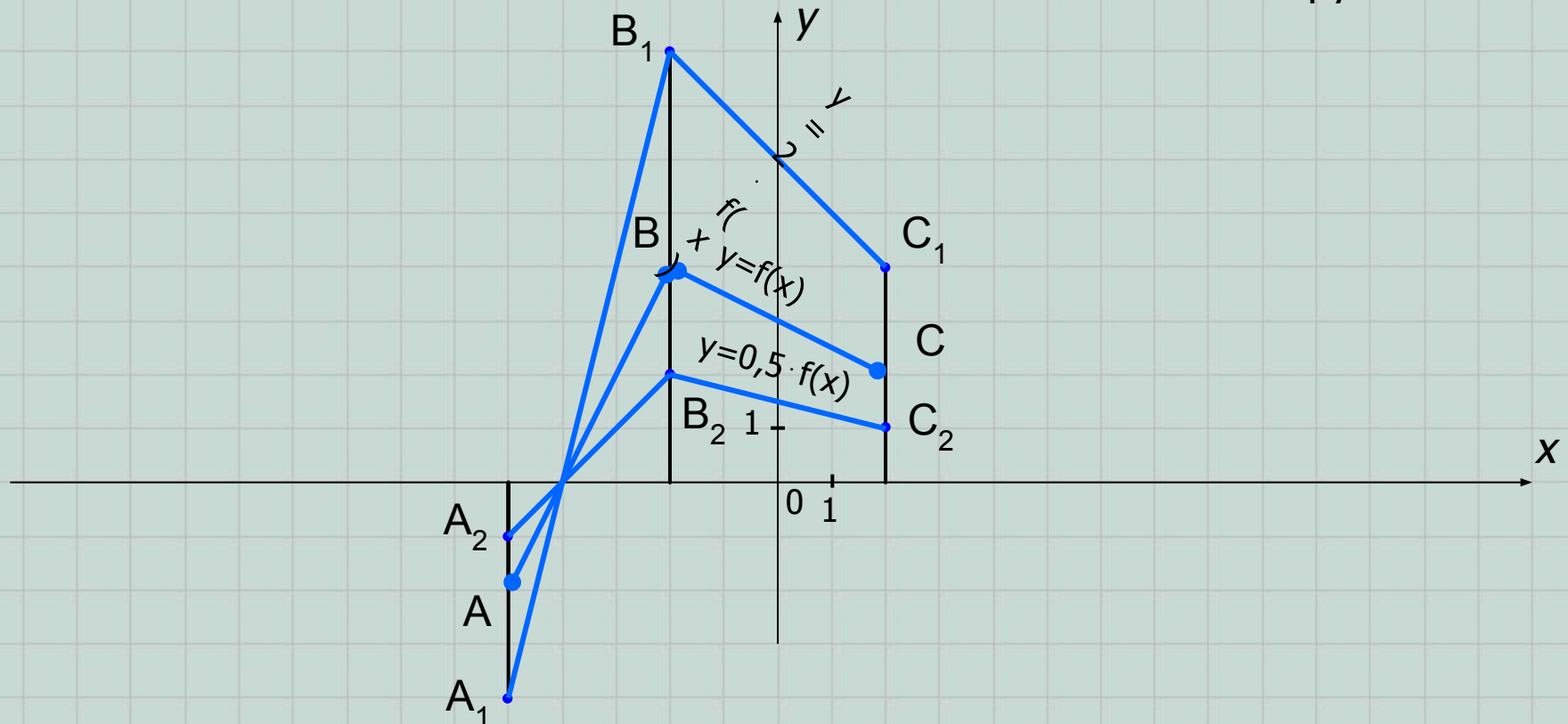


В данной формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются на противоположные. Это изменение приводит к симметричному отображению исходного графика функции относительно оси Oy.

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

V. $y = k \cdot f(x)$, $k > 0$.

Если $k < 0$, то данный случай комбинируют с III.



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением функции. Это приводит к :

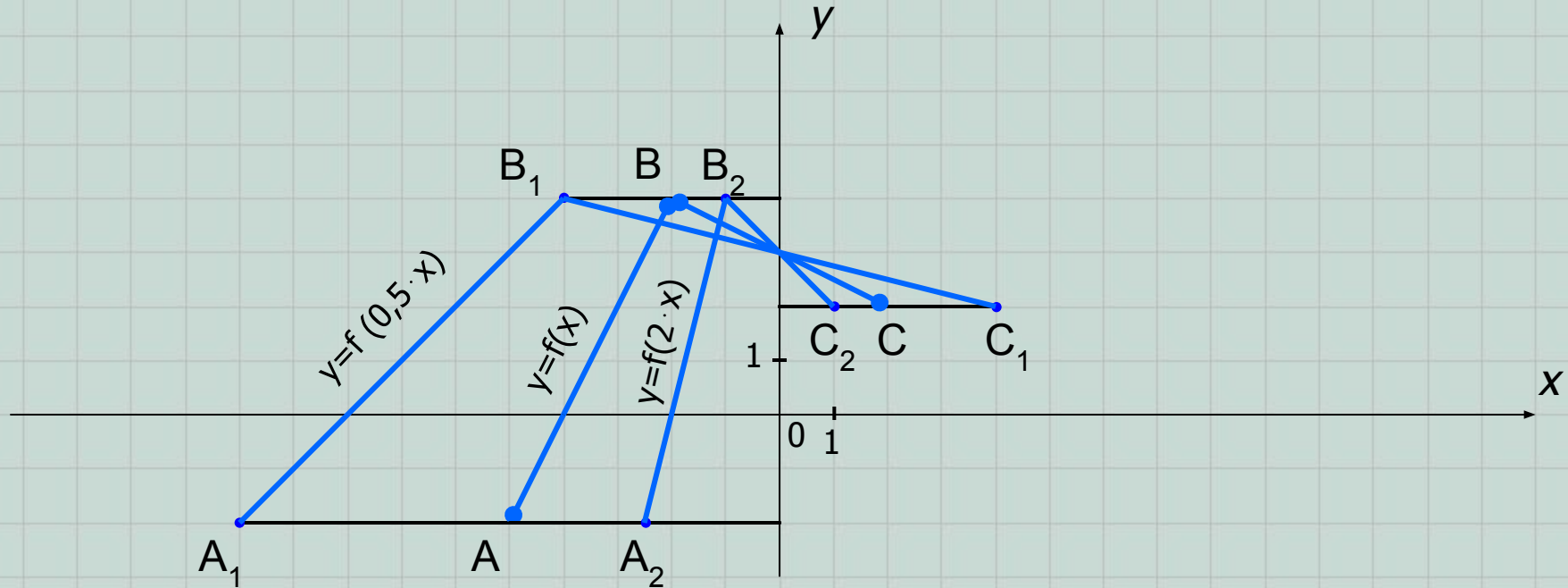
- 1) «растяжению» графика функции от оси Ox в k раз, если $k > 1$ или
- 2) «сжатию» графика функции к оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз, если $k < 1$.

Например: 1) $y = 2 \cdot f(x)$; или 2) $y = 0,5 \cdot f(x)$.

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VI. $y=f(k \cdot x)$, $k>0$.

Если $k<0$, то данный случай комбинируют с IV.



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) изменяются в k раз, по сравнению со «старым» значением аргумента. Это приводит к :

- 1) «растяжению» графика функции от оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз, если $k<1$ или $k<1$
- 2) «сжатию» графика функции к оси Oy в k раз, если $k>1$.

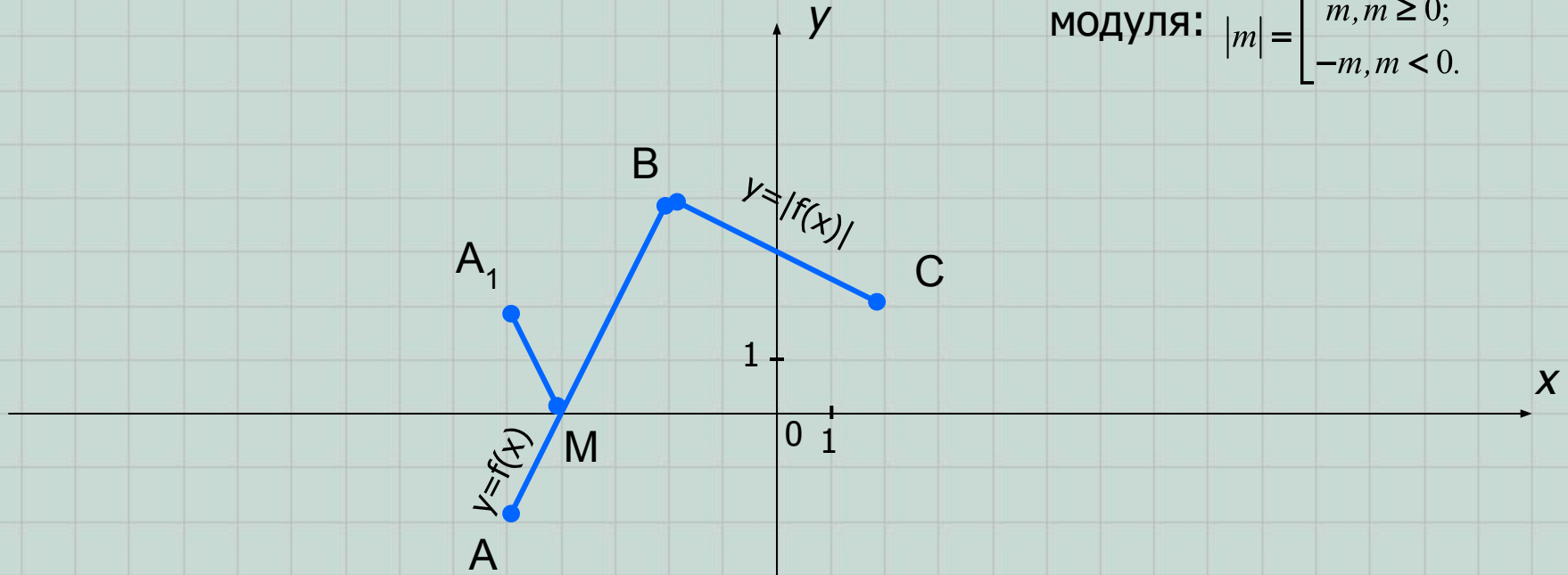
Например: 1) $y=f(0,5 \cdot x)$; или 2) $y=f(2 \cdot x)$.

Задание. Запишите координаты концов новых полученных ломанных и сравните их с исходными.

VII. $y = |f(x)|$.

Вспомните определение

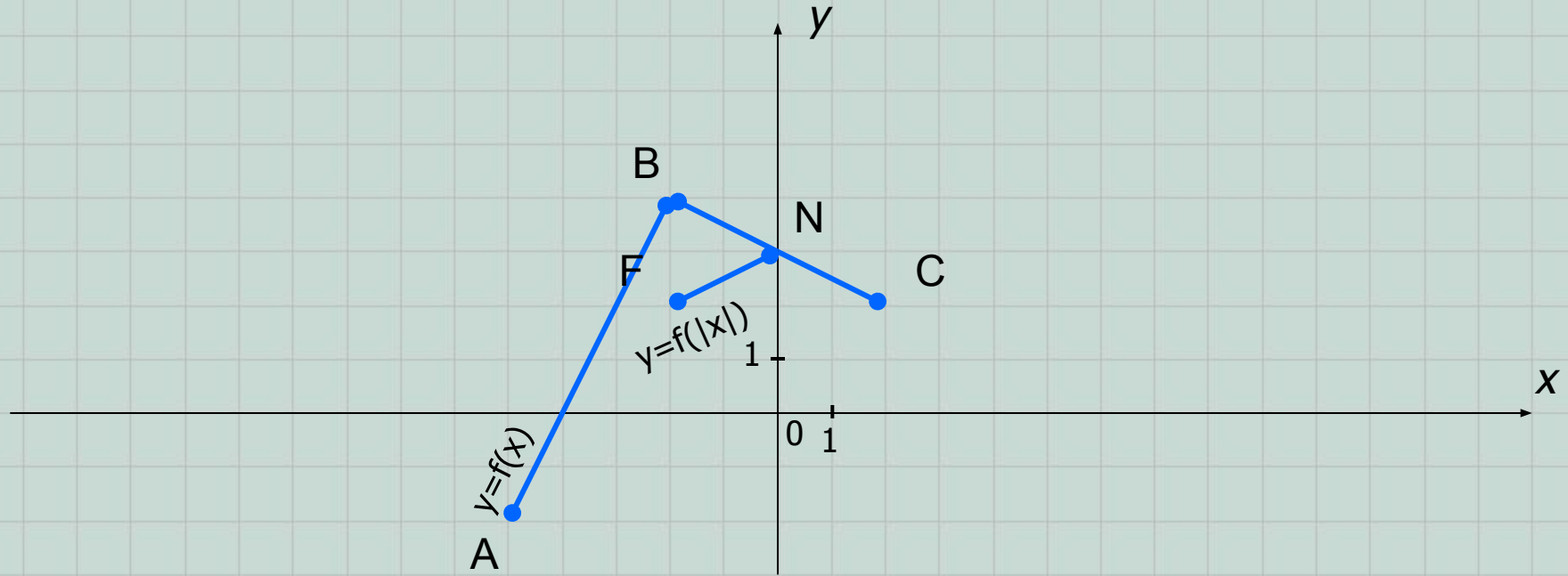
модуля: $|m| = \begin{cases} m, m \geq 0; \\ -m, m < 0. \end{cases}$



В новой формуле значения функции (ординаты точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными ординатами (т.е. находящихся в нижней полуплоскости относительно оси Ox) и симметричному отображению этих частей относительно оси Ox .

Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

VIII. $y=f(|x|)$.



В новой формуле значения аргумента (абсциссы точек графика) находятся под знаком модуля. Это приводит к исчезновению частей графика исходной функции с отрицательными абсциссами (т.е. находящихся в левой полуплоскости относительно оси Oy) и замещению их частями исходного графика, симметричными относительно оси Oy .

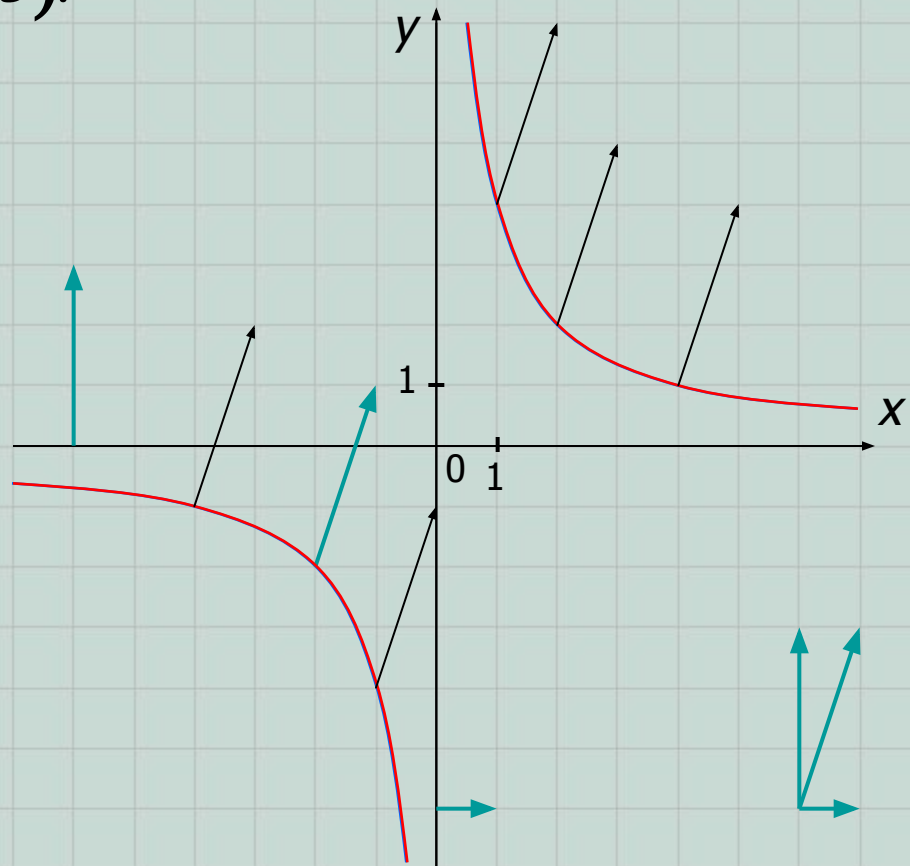
Задание. Запишите координаты концов новой полученной ломанной и сравните их с исходными.

Рассмотрим несколько примеров применения вышеизложенной теории.

ПРИМЕР 1. Построить график функции, заданной формулой $y = \frac{3x+1}{x-1}$.

Решение. Преобразуем данную формулу: $y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3$.

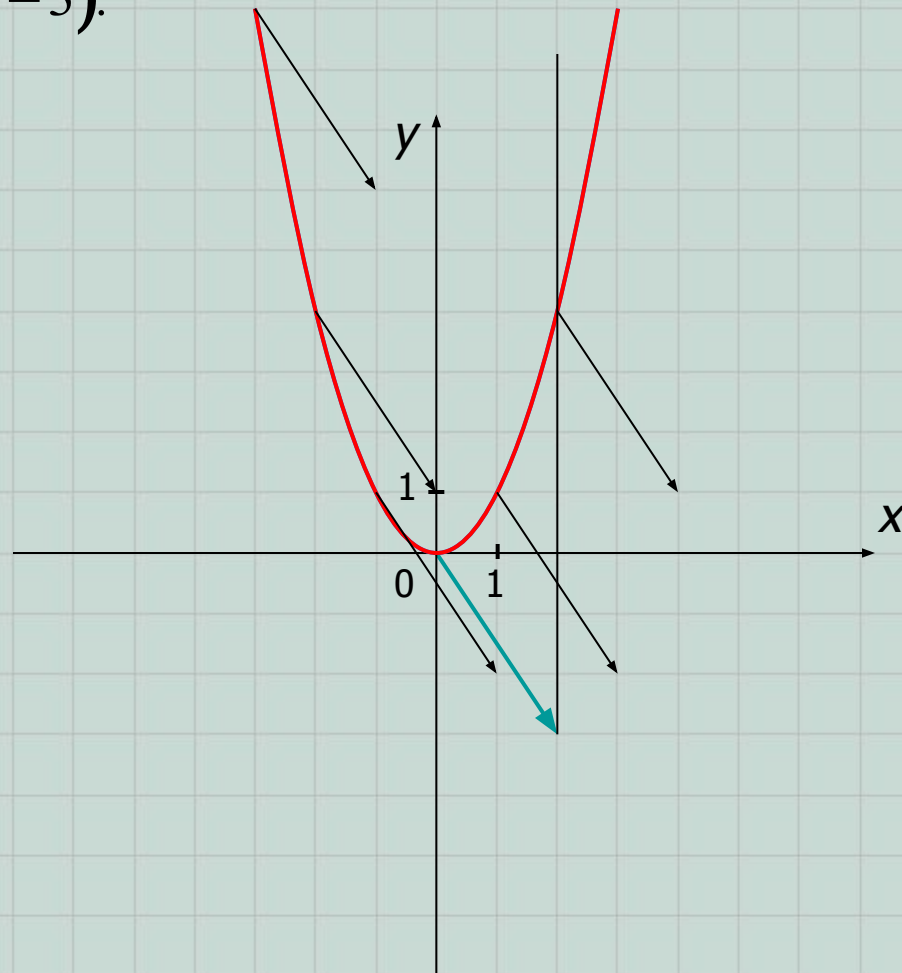
- 1) Построим график функции $y = \frac{4}{x}$.
- 2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $(1; 3)$.



ПРИМЕР 2. Построить график функции, заданной формулой $y = x^2 - 4x + 1$.

Решение. Преобразуем данную формулу, выделив в данном квадратном трехчлене квадрат двучлена: $y = x^2 - 4x + 1 = (x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2) - 4 + 1 = (x - 2)^2 - 3$.

- 1) Построим график функции $y = x^2$.
- 2) Выполним параллельный перенос построенного графика на вектор $(2; -3)$.



ПРИМЕР 3. Построить график функции, заданной формулой $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

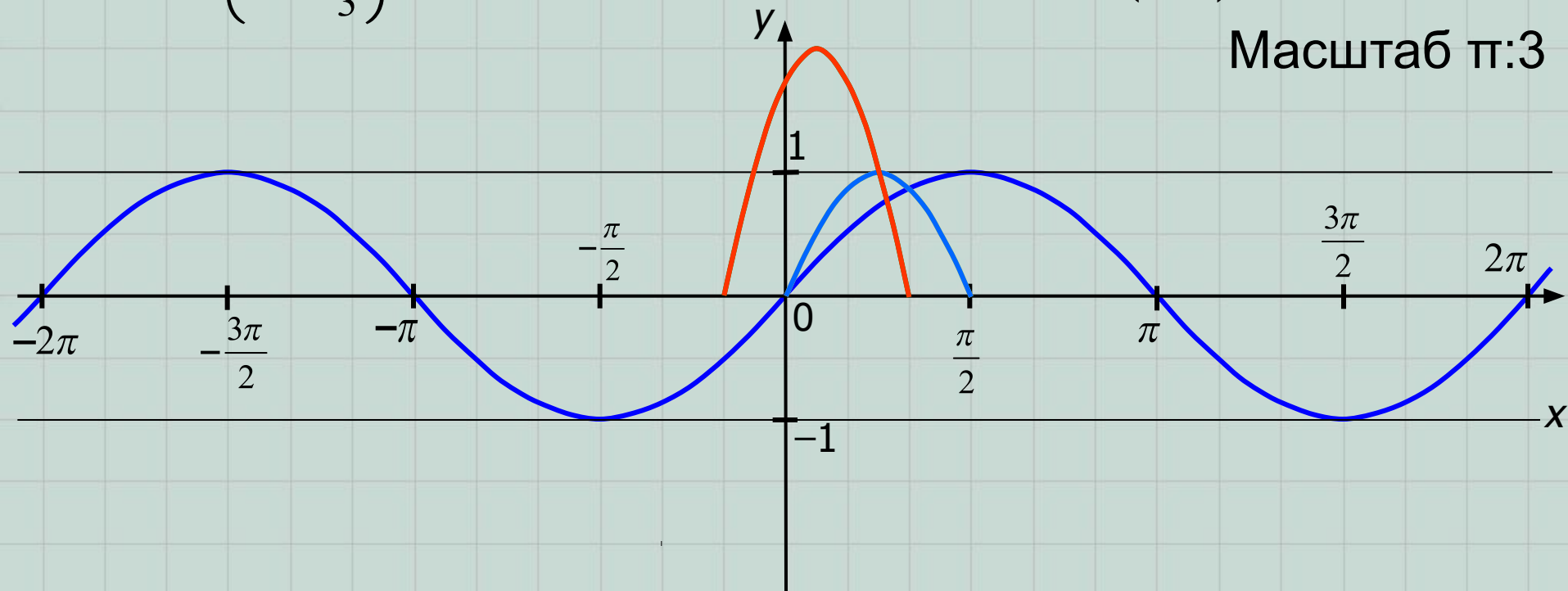
Решение. 1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin(2x)$ – «сжатие» к оси Oy в два раза;

3) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(2\left(x - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)$ – параллельный перенос вдоль
оси Ox влево на $\frac{\pi}{6}$ ед.отр.;

4) $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ – «растяжение» от оси Ox в два раза;

5) $y = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ – параллельный перенос на вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Масштаб $\pi:3$



Остается воспользоваться свойством периодичности любой тригонометрической функции (определите наименьший положительный период самостоятельно) и достроить полученную часть до полного графика на всей числовой оси:

Масштаб $\pi:3$

