

Преобразование Фурье

Дискретное преобразование Фурье применяется при решении многих прикладных задач. К ним относятся тригонометрическая интерполяция, вычисление свертки функций, распознавание образов и многие другие. Дискретное преобразование Фурье стало особенно эффективным методом решения прикладных задач после создания быстрого преобразования Фурье (см. § 4).

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 1 — разложена в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp\{2\pi i q x\}, \quad (1)$$

причем

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |a_q| < \infty. \quad (2)$$

Здесь i — мнимая единица.

Рассмотрим значения этой функции на сетке из точек $x_l = l/N$, где l, N целые, N фиксировано, и обозначим $f(x_l) = f_l$. Если $q_2 - q_1 = kN$, где k целое, то $q_2 x_l - q_1 x_l = kN x_l = kl$, где kl целое. Следовательно,

$$\exp\{2\pi i q_1 x\} = \exp\{2\pi i q_2 x\} \quad (3)$$

в узлах сетки. Поэтому если функция $f(x)$ рассматривается лишь в узлах сетки x_l , то в соотношении (1) можно привести подобные члены

$$f_l = \sum_{q=0}^{N-1} A_q \exp\{2\pi i q x_l\}, \quad (4)$$

где

$$A_q = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{q+sN}. \quad (5)$$

$$f_l = \sum_{-N/2 < q \leq N/2} A_q \exp\{2\pi i q x_l\}. \quad (9)$$

Если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то величины $|a_j|$ с ростом j убывают быстро, поэтому $A_q \approx a_q$ при малых q . Кроме того, при гладкой $f(x)$ величины A_q и a_q малы при больших q .

Задача 1. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема. Доказать, что

$$\max_{[0,1]} \left| f(x) - \sum_{-N/2 < q \leq N/2} A_q \exp\{2\pi i q x\} \right| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$.

Напомним, что это приближенное равенство обращается в точное равенство в точках сетки. Способ аппроксимации функции

$$f(x) \approx \sum_{-N/2 < q \leq N/2} A_q \exp\{2\pi i q x\}$$

носит название *тригонометрической интерполяции*. Соотношение (9) называют *конечным* или *дискретным рядом Фурье*, а коэффициенты A_q — *дискретными коэффициентами Фурье*.

Существует соответствие между задачей приближения функций линейными комбинациями многочленов Чебышева и тригонометрическими многочленами. Пусть на отрезке $[-1, 1]$ функция $f(x)$ приближается ли-

нейными комбинациями $\sum_{j=0}^{m-1} a_j T_j(x)$. Замена переменных $x = \cos t$ сводит

исходную задачу к задаче приближения функции $f(\cos t)$ линейной ком-

бинацией $\sum_{j=0}^{m-1} a_j T_j(\cos t) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \cos(jt)$.

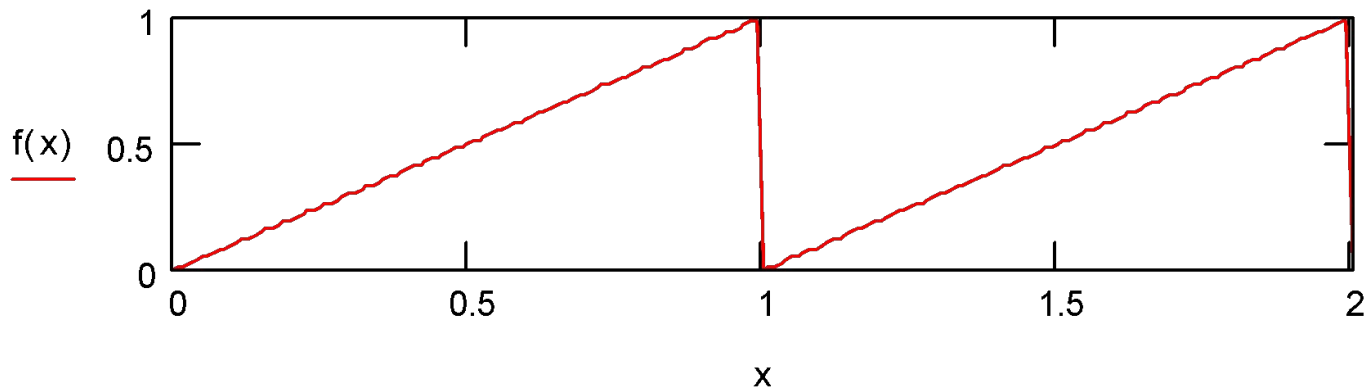
Справедливо равенство

$$(f, g)_1 = \int_{-1}^1 \frac{f(x)\bar{g}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^\pi f(\cos \theta)\bar{g}(\cos \theta) d\theta.$$

Следовательно, задача наилучшего приближения $f(x)$ в норме, соответствующей скалярному произведению $(f, g)_1$, эквивалентна задаче приближения $f(\cos \theta)$ в норме, соответствующей скалярному произведению $(f, g)_2 = \int_0^\pi f(\cos \theta) \bar{g}(\cos \theta) d\theta$. Точно так же существует соответствие в случае задач интерполяции и наилучшего приближения в равномерной метрике. Задача интерполирования функции многочленом по узлам $x_j = \cos \left(\pi \frac{2j-1}{2m} \right)$ — нулям многочлена Чебышева $T_m(x)$ — после такой замены сводится к задаче интерполирования функции $f(\cos \theta)$ при помощи тригонометрического многочлена $\sum_{j=0}^{m-1} a_j \cos(jt)$ по узлам $t_j = \pi \frac{2j-1}{2m}$, образующим равномерную сетку.

Анализ и синтез сигналов с помощью преобразования Фурье.

- Определим функцию, задающую так называемый пилообразный сигнал $f(x) := x - \text{floor}(x)$ $x := 0, 0.01 \dots 2$ и изобразим ее на графике



□ Заполним массив s : $i := 0..127$ $s_i := f\left(\frac{i}{64}\right)$

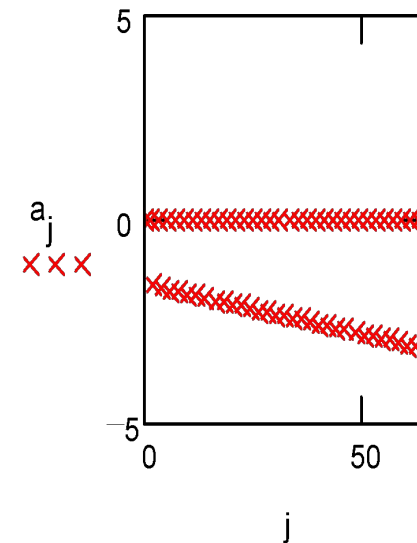
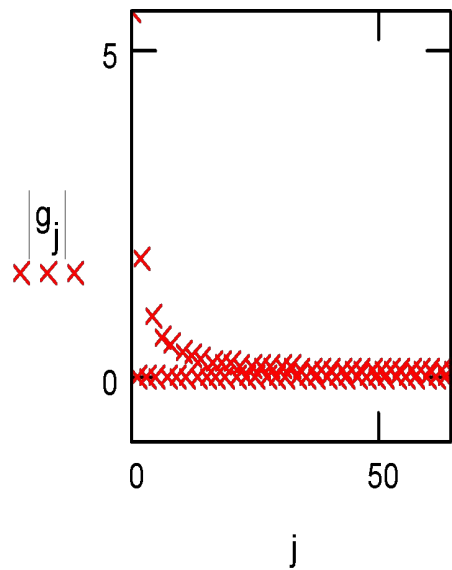
Проводим прямое преобразование Фурье: $g := \text{fft}(s)$

Внимание! В том случае, когда в массиве s содержится 2^m элементов, причем все числа действительные, следует использовать функцию **fft**. Во всех остальных случаях – функцию **cfft**. Массив g содержит комплексные коэффициенты дискретного преобразования Фурье.

Размер массива f – $1 + 2^{m-1}$

□ Для анализа вклада отдельных гармоник в исходный сигнал изобразим на графике модули и аргументы гармоник

$$j := 0..64 \quad a_j := \text{if}(g_j \neq 0, \arg(g_j), 0)$$

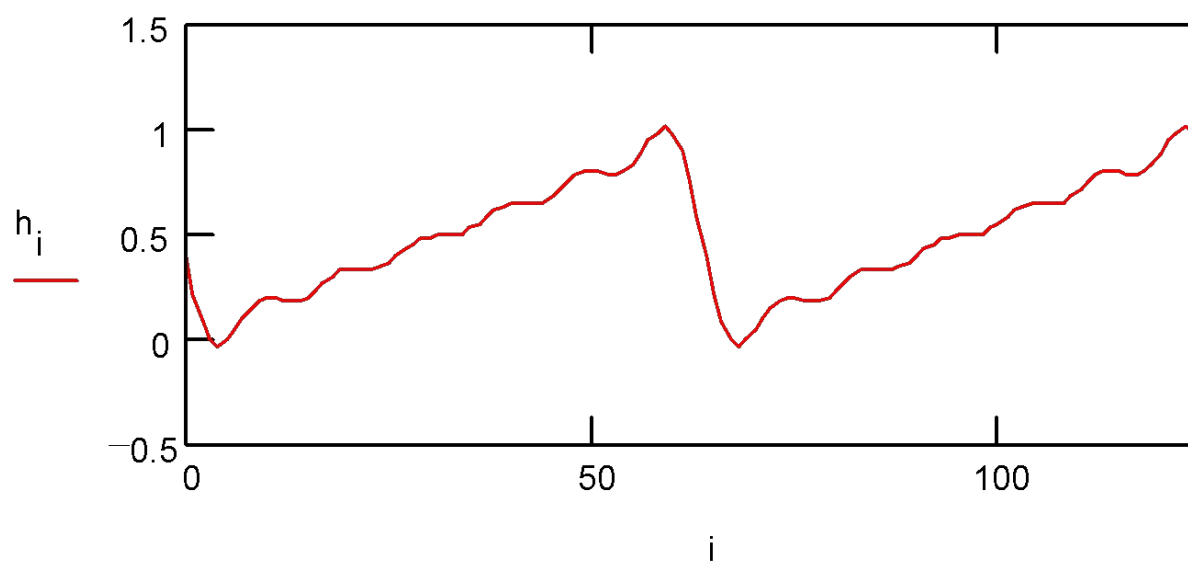


Проводим обратное преобразование Фурье, исключив гармоники с малым вкладом. Будем учитывать только гармоники с амплитудой не менее 0.3. Для отсечения слагаемых с малым вкладом воспользуемся функцией единичного скачка – функцией Хевисайда Φ .

$$\alpha := 0.3 \quad G_j := g_j \cdot \Phi \left(|g_j| - \alpha \right)$$

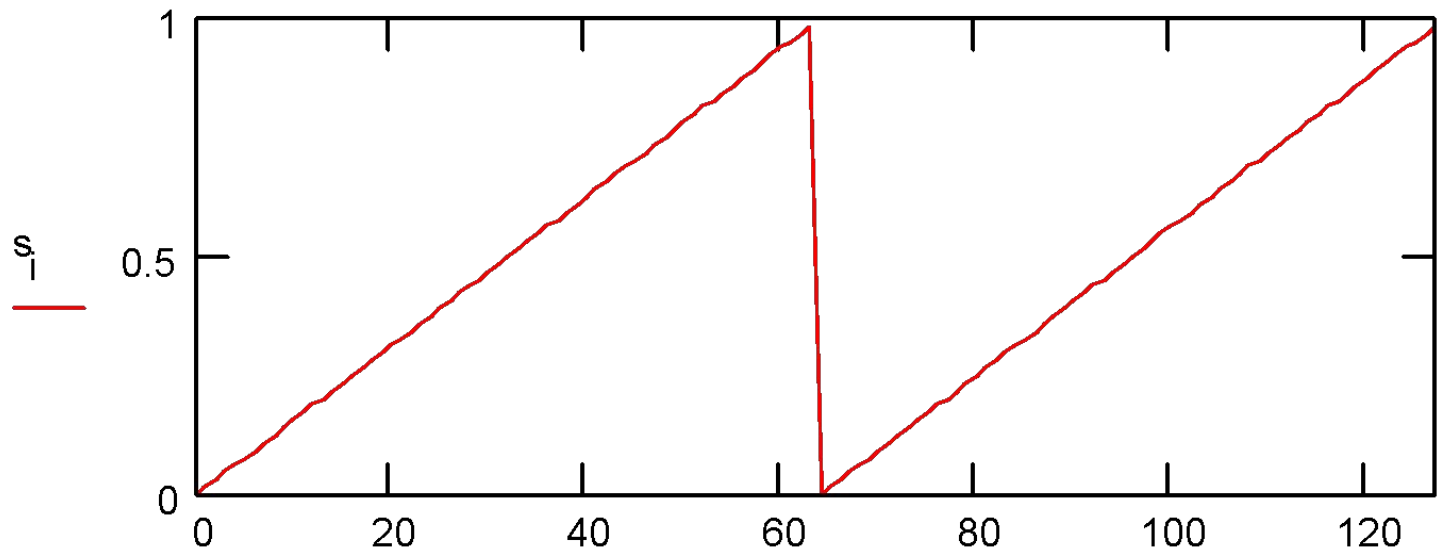
Для обратного преобразования Фурье используется функция ***ifft***, если прямое преобразование осуществлялось с помощью ***fft***, и ***cifft***, если прямое преобразование осуществлялось с помощью ***cfft***.

$$h := \text{ifft}(G)$$



Повторим преобразование Фурье, учтя слагаемые с амплитудой до 0.1.

$$\alpha := 0.1 \quad G_j := g_j \cdot \Phi(|g_j| - \alpha) \quad h := \text{ifft}(G)$$



Учет дополнительных гармоник существенно улучшил
результат синтеза сигналов.

Наилучшее приближение

1. **Наилучшее приближение.** Интерполяция позволяет легко аппроксимировать функцию $y(x)$. Однако точность такой аппроксимации гарантирована лишь в небольшом интервале порядка нескольких шагов сетки. Для другого интервала приходится заново вычислять коэффициенты интерполяционной формулы. Нам же всегда желательно иметь единую приближенную формулу $y \approx \varphi(x)$, пригодную для большого отрезка $a \leq x \leq b$. Поэтому далее будем сравнивать заданную и аппроксимирующую функции на большом отрезке.

При интерполяции мы приравниваем значения $y(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах. Если $y(x_i)$ определены неточно — например, из эксперимента, — то точное приравнивание неразумно. Поэтому нередко целесообразней приближать функцию не по точкам, а в среднем, т. е. в норме L_p .

Пусть заданы функция $y(x)$ и множество функций $\varphi(x)$, принадлежащие линейному нормированному пространству функций. Нас интересуют две задачи. Первая — аппроксимация с заданной точностью: по заданному ε найти такую $\varphi(x)$, чтобы выполнялось неравенство $\|y(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$. Второе — нахождение *наилучшего приближения*, т. е. функции $\bar{\varphi}(x)$, удовлетворяющей соотношению

$$\|y(x) - \bar{\varphi}(x)\| = \inf \|y(x) - \varphi(x)\| = \nu. \quad (36)$$

Существует ли наилучшее приближение и единственно ли оно (для данных функции и множества)? Это имеет место не при любом выборе пространства и множества. Например, в пространстве L_1 , $-1 \leq x \leq +1$, выберем функцию $y(x) = 1$ и множество $\varphi(x) = cx$; тогда

$$\|y - \varphi\|_{L_1} = \int_{-1}^{+1} |1 - cx| dx = \begin{cases} 2 & \text{при } |c| \leq 1, \\ \frac{c^2 + 1}{|c|} > 2 & \text{при } |c| > 1. \end{cases}$$

В самом деле, при $|c| \leq 1$ эта норма равна площади заштрихованной трапеции на рис. 10, а, т. е. двум. При $|c| > 1$ эта

норма, согласно рис. 10, б, равна площади заштрихованной трапеции (которая опять равна двум) плюс площади заштрихованных треугольников. Значит, для любого c , по модулю меньшего единицы, $\varphi = cx$ минимизирует норму отклонения, т. е. наилучшее приближение здесь существует, но оно не единственно.

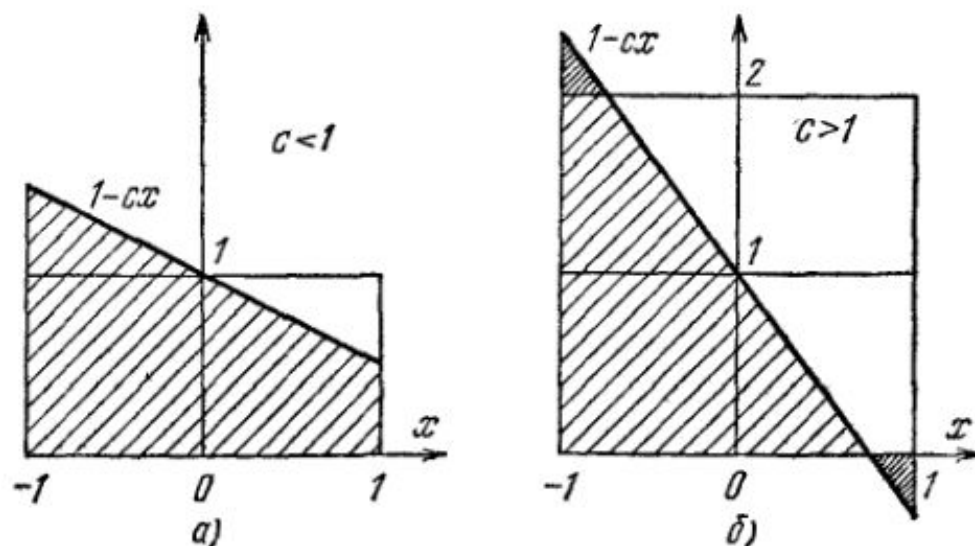


Рис. 10.

Выведем достаточное условие существования наилучшего приближения. Пусть в линейном пространстве функций выбрано множество, образованное функциями вида

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (37)$$

где функции $\varphi_k(x)$ можно считать линейно-независимыми. Это множество есть линейное подпространство нашего пространства. Изменим один из коэффициентов суммы (37) на величину δa_k ; из неравенства треугольника (1.3) следует

$$||y - (\varphi + \delta\varphi)|| - ||y - \varphi|| \leq ||\delta\varphi|| = |\delta a_k| \cdot ||\varphi_k||,$$

т. е. норма $||y - \varphi||$ непрерывно зависит от a_k . Очевидно, $||\varphi||$ также есть непрерывная функция коэффициентов a_k .

Рассмотрим нормы как функции координат a_k . Сфера

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$$

есть замкнутое ограниченное множество, поэтому $\|\varphi\|$ на этой сфере имеет точную нижнюю грань μ и в силу непрерывности достигает ее при некотором $\tilde{\varphi}(x)$. Очевидно, $\mu > 0$; в противном случае $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$, что противоречит линейной независимости $\varphi_k(x)$.

Возьмем шар $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq R^2 = |v + \|y\| + \varepsilon|^2 / \mu^2$, где ε — какое-то положительное число. В силу однородности нормы функции вне этого шара $\|\varphi\| \geq \mu R = v + \|y\| + \varepsilon$ и, следовательно, $\|y - \varphi\| \geq \|\varphi\| - \|y\| \geq v + \varepsilon$. Значит, вне этого шара норма погрешности заведомо далека от нижней грани. Только внутри шара $y(x)$ и $\varphi(x)$ достаточно близки по норме. Но шар — ограниченное и замкнутое множество значений координат a_k , поэтому непрерывная функция координат $\|y - \varphi\|$ достигает на нем точной нижней грани.

Следовательно, в любом линейном нормированном пространстве при линейной аппроксимации (37) наилучшее приближение существует, хотя не во всяком линейном пространстве оно единственно.

1. Наилучшие приближения. Поскольку чебышевская норма сильнее нормы L_p , то принято считать, что равномерная аппроксимация лучше аппроксимации в среднем. Поэтому поиску равномерных и особенно *наилучших равномерных* приближений, определяемых условием

$$\Delta(y, \varphi) = \min, \text{ где } \Delta(y, \varphi) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - \varphi(x)|, \quad (52)$$

где минимум ищется на множестве функций $\varphi(x)$, посвящено много работ. В частности, получены следующие результаты (доказательства большинства из них приведены в учебнике И. С. Березина и Н. П. Жидкова [4]).
