

**Государственное Образовательное Учреждение
Лицей №1523**

ЮАО г.Москва

Лекции по алгебре и началам анализа

11 класс

© Хомутова Лариса Юрьевна

900igr.net

Лекция №5



Показательные и логарифмические неравенства

1. Показательные неравенства

1.1. Решение простейших показательных неравенств

Простейшими показательными неравенствами называются неравенства вида

$$a^x > b, a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^x > b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

- Решение:
- a) $a > 1, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$
 - b) $0 < a < 1, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$
 - c) $a > 0, b < 0 \quad x \in R$
-

Рассмотрим решение неравенства

$$a^x < b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

- Решение:
- a) $a > 1, b > 0 \quad x \in (-\infty; \log_a b)$
 - b) $0 < a < 1, b > 0 \quad x \in (\log_a b; +\infty)$
 - c) $a > 0, b < 0 \quad x \in \emptyset$

1.2. Решение показательных неравенств вида

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$\begin{aligned} a) \quad & a > 1, \quad f(x) < g(x) \\ b) \quad & 1 < a < 0, \quad f(x) > g(x) \end{aligned}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$\begin{aligned} a) \quad & a > 1, \quad f(x) > g(x) \\ b) \quad & 1 < a < 0, \quad f(x) < g(x) \end{aligned}$$

1.3. Решение показательных неравенств **с помощью замены переменных**

1.4. Решение сложных показательных неравенств

Сложными показательными неравенствами называются неравенства вида

$$f(x)^{g_1(x)} \vee f(x)^{g_2(x)}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} > f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \geq f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) \geq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} < f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$f(x)^{g_1(x)} \leq f(x)^{g_2(x)}$$

Решение:

$$\left[\begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \\ 0 < f(x) \leq 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{cases} \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1) \cdot (g_1(x) - g_2(x)) \leq 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

2. Логарифмические неравенства

2.1. Решение простейших логарифмических неравенств

Простейшими логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_a x > b, \log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$$

где $a > 0, a \neq 1$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x > b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

$$b) 0 < a < 1, \quad x \in (0; a^b)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a x < b, \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad x \in (0; a^b)$$

$$b) 0 < a < 1, \quad x \in (a^b; +\infty)$$

2.2. Решение логарифмических неравенств вида

$$\log_a f(x) \vee \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$b) 0 < a < 1, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x), \quad \text{где } a > 0, a \neq 1$$

Решение:

$$a) a > 1, \quad \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

$$b) 0 < a < 1, \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

2.3. Решение логарифмических неравенств **с помощью замены переменных**

2.4. Решение сложных логарифмических неравенств

Сложными логарифмическими неравенствами называются неравенства вида

$$\log_{f(x)} g_1(x) \vee \log_{f(x)} g_2(x)$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) < \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \right]$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \leq \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) > \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{cases} f(x) > 1 \\ g_1(x) > g_2(x) \\ g_2(x) > 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) < g_2(x) \\ g_1(x) > 0 \end{cases} \right.$$

Рассмотрим решение неравенства

$$\log_{f(x)} g_1(x) \geq \log_{f(x)} g_2(x)$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 1 \\ g_1(x) \geq g_2(x) \end{array} \right. \\ g_2(x) > 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 < f(x) < 1 \\ g_1(x) \leq g_2(x) \end{array} \right. \\ g_1(x) > 0 \end{array} \right.$$