

Показательная функция, ее свойства и применение.

Организация итогового повторения
по алгебре и началам анализа
в 11 классе





Основная цель:



Актуализация базовых знаний и способов действий по теме.

Показательная функция, ее свойства и применение.

- Степень с рациональным показателем.
- Показательная функция.
- Показательные уравнения.
- Показательные неравенства.
- Дополнительный справочный материал.

Свойства степени с рациональным показателем

Если $a > 0$, то:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2. $a^n : a^m = a^{n-m}$;

3. $(ab)^n = a^n b^n$;

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$;

5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, где $b \neq 0$

6. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$;

7. $a^1 = a$;

8. $a^0 = 1$;

9. $1^n = 1$;

10. $0^n = 0$, где $n \neq 0$;

11. Если $r \in \mathbb{Q}, 0 < a < b$, то $a^r < b^r$

при $r > 0$ и $a^r > b^r$ при $r < 0$;

12. Если $r, s \in \mathbb{Q}, r > s$, то $a^r > a^s$

При $a > 1$ и $a^r < a^s$ при $0 < a < 1$.

«Деятельность учителя неотделима от деятельности учащихся... Она должна состоять из трех основных этапов: *мотивационного, операционно-познавательного и рефлексивно-оценочного*».

Фридман Л.М.

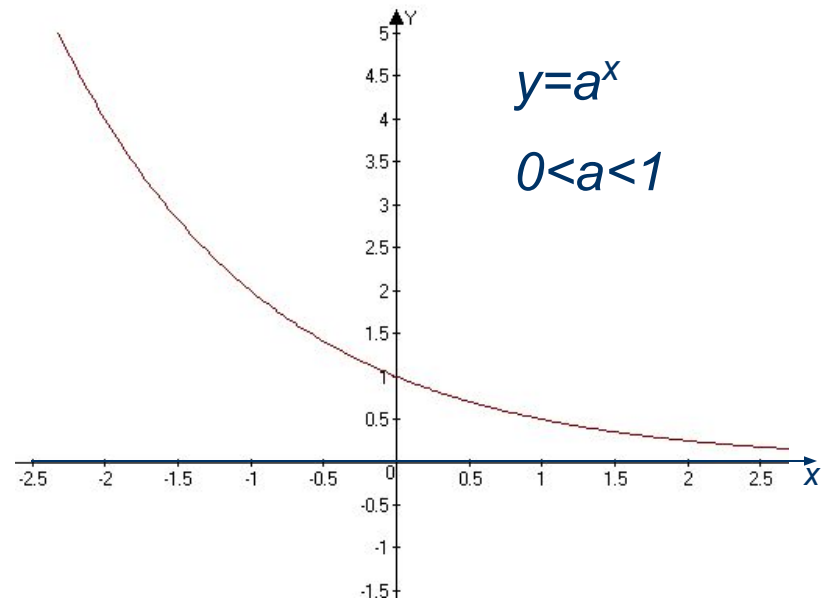
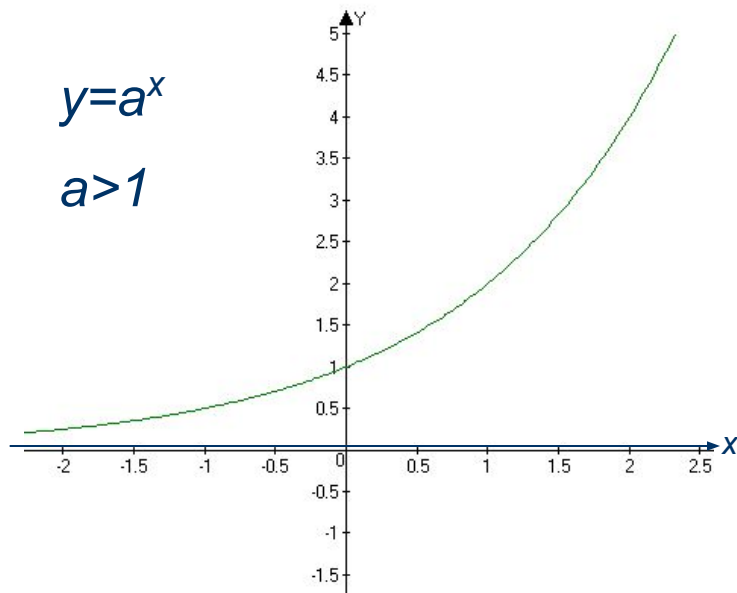
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ



СВОЙСТВА И ГРАФИК

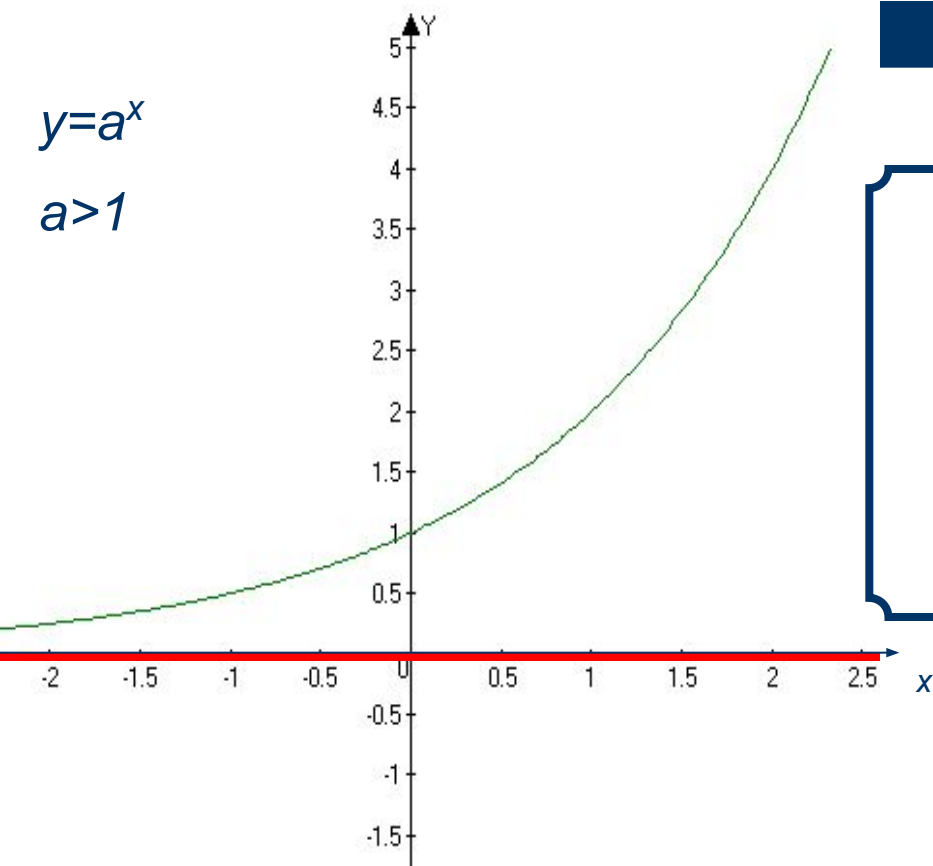
Определение

- Функция, заданная формулой $y=a^x$ (где $a>0$, $a\neq 1$), называется показательной функцией с основанием a



Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

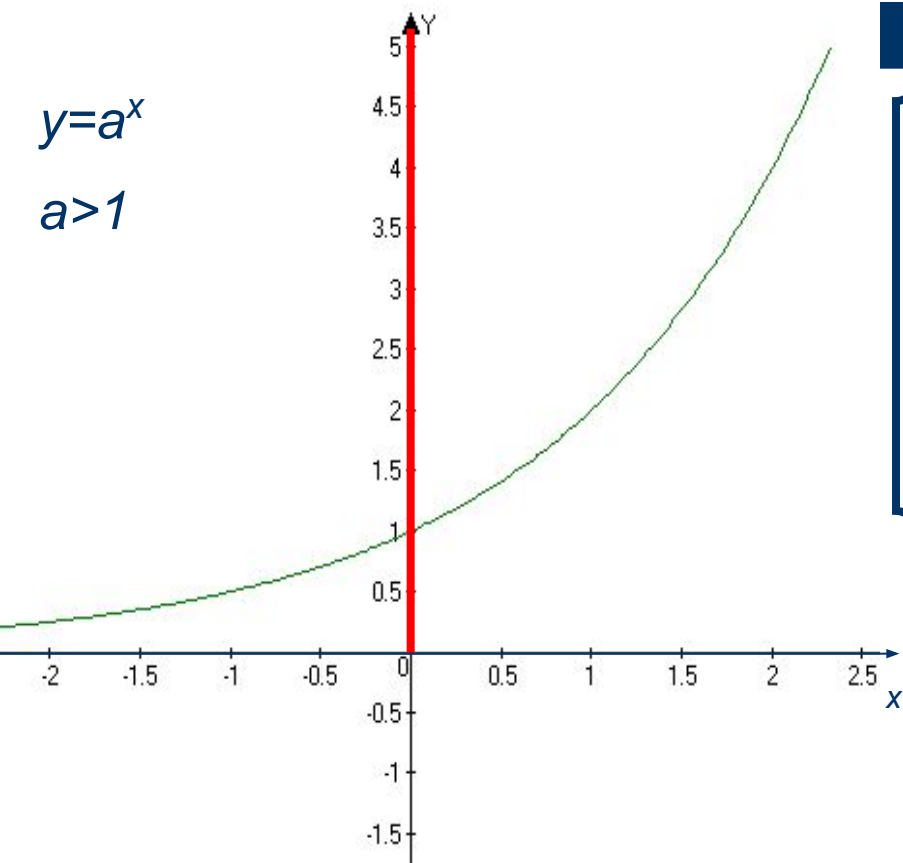
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Область определения –
множество всех
действительных чисел
 $D(a^x) = \mathbf{R}$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

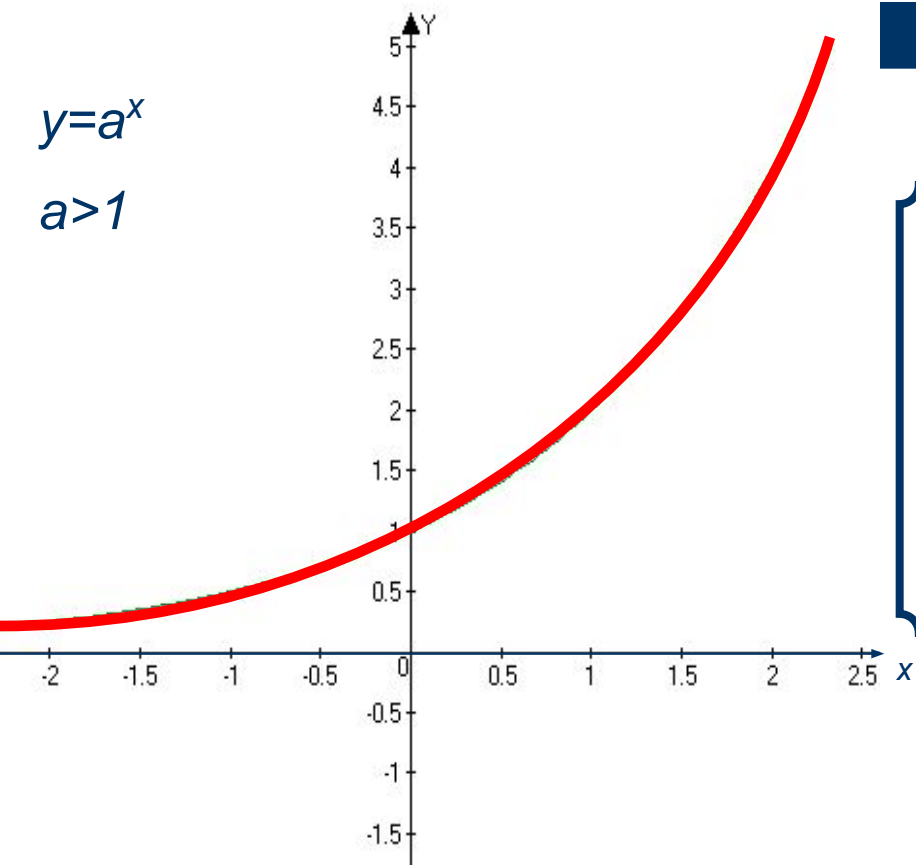
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Область значений –
множество всех
положительных чисел
 $E(a^x) = \mathbf{R_+}$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

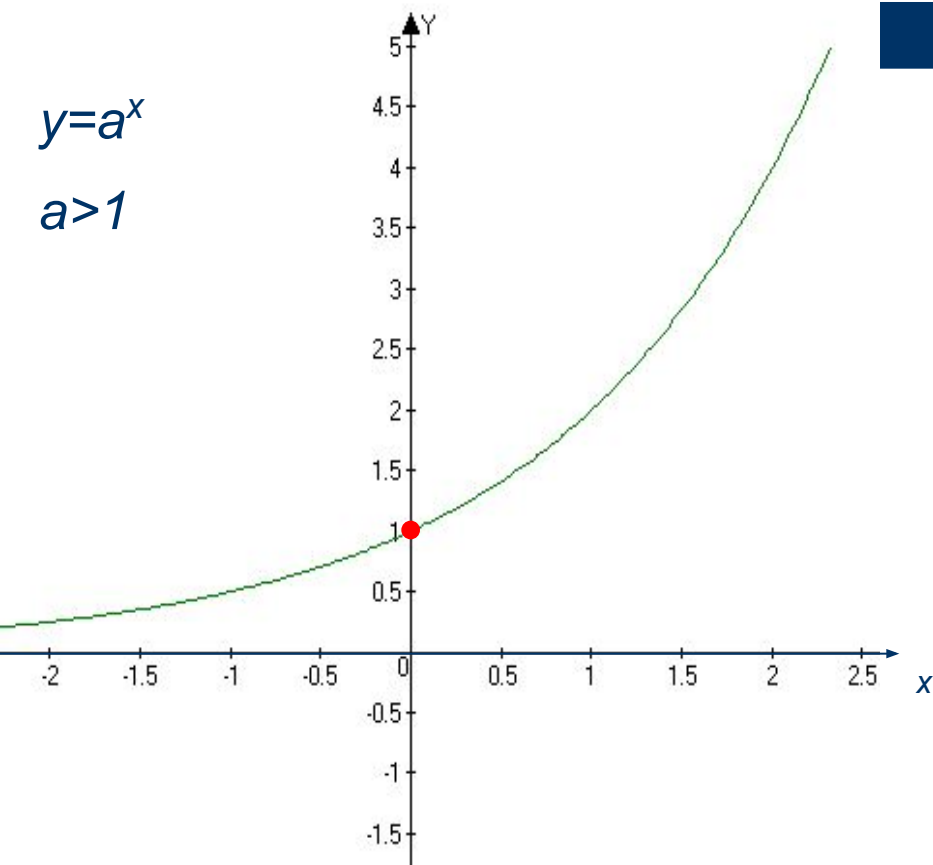
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Функция возрастает на всей области определения

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

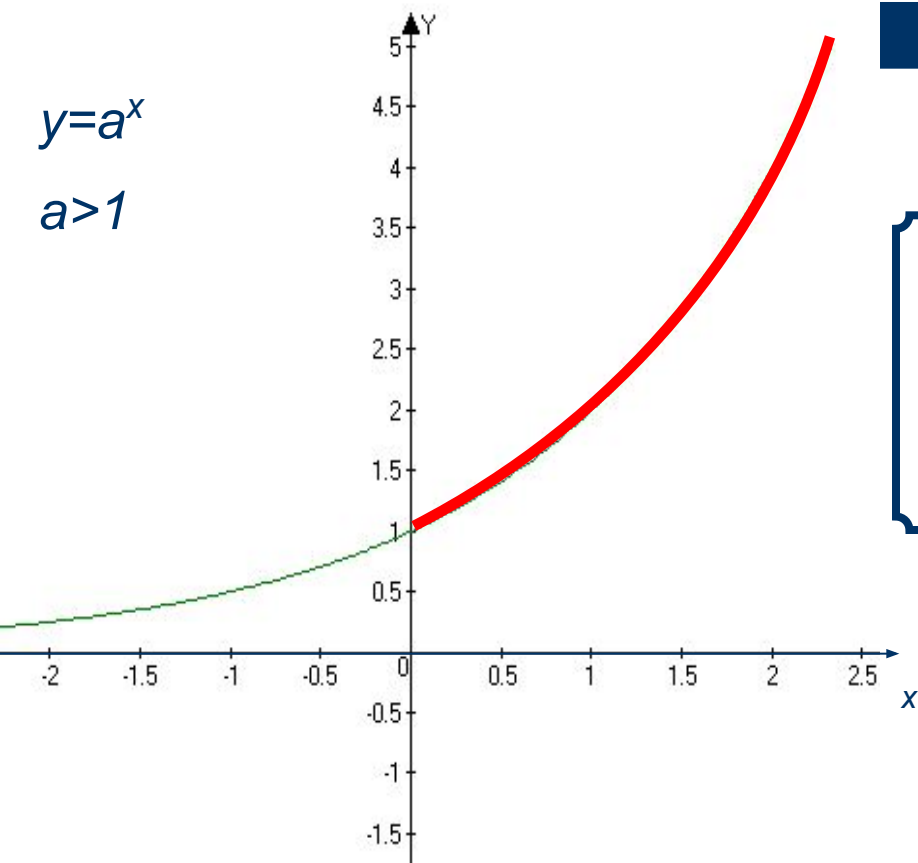
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- При $x=0$ значение функции равно 1

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

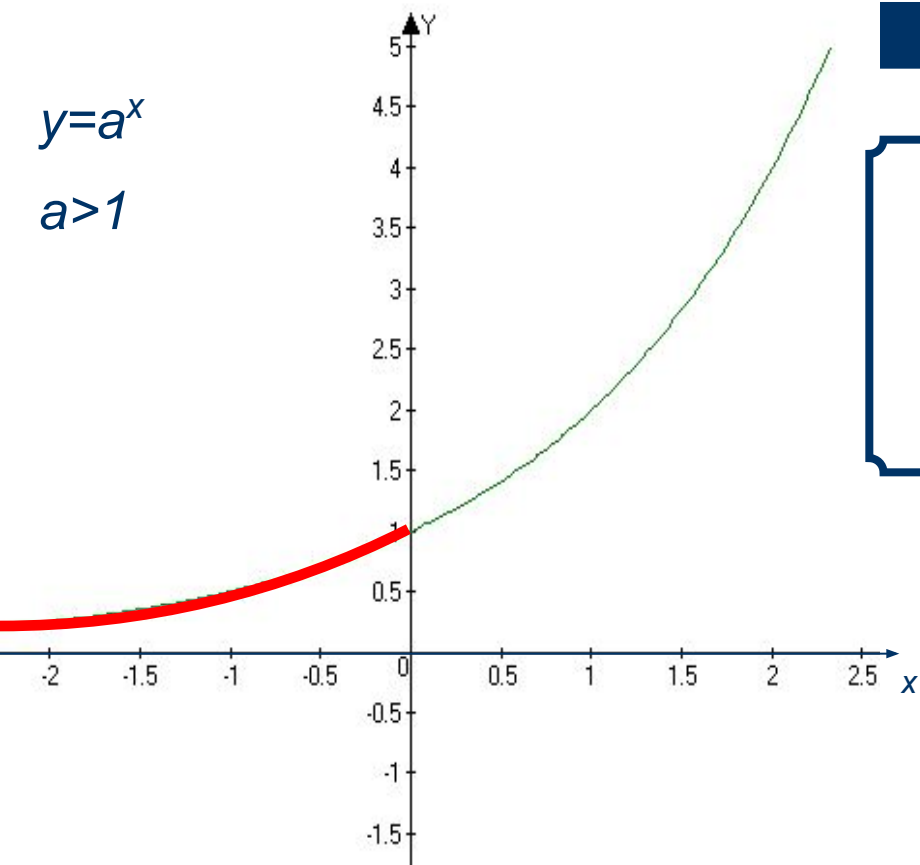
$$y=a^x$$
$$a>1$$



- Если $x>0$, то $a^x>1$

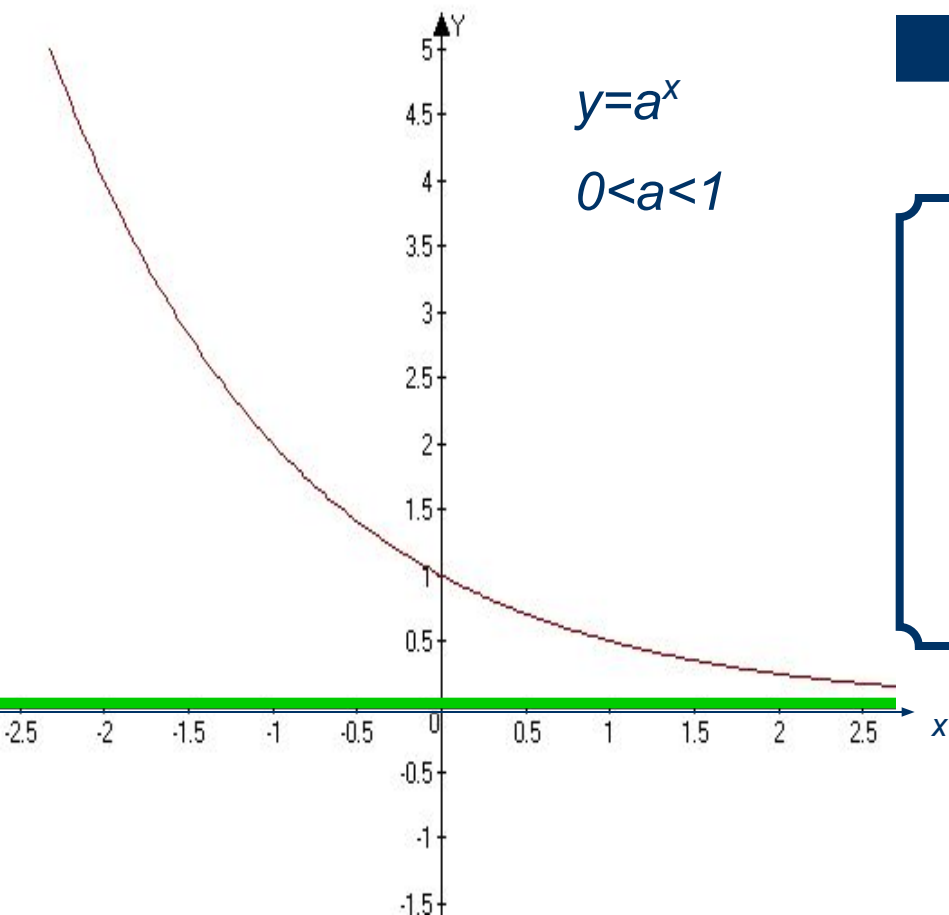
Свойства показательной функции $y=a^x$ при $a>1$

$$y=a^x$$
$$a>1$$



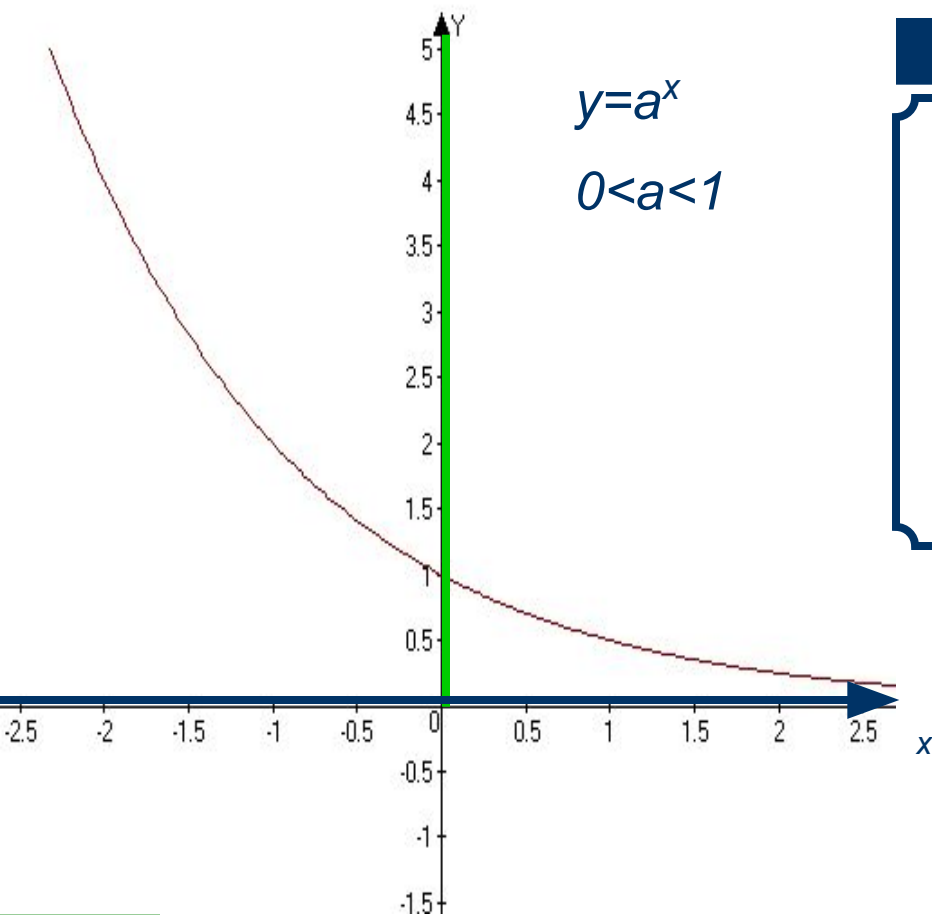
- Если $x<0$, то $0<a^x<1$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



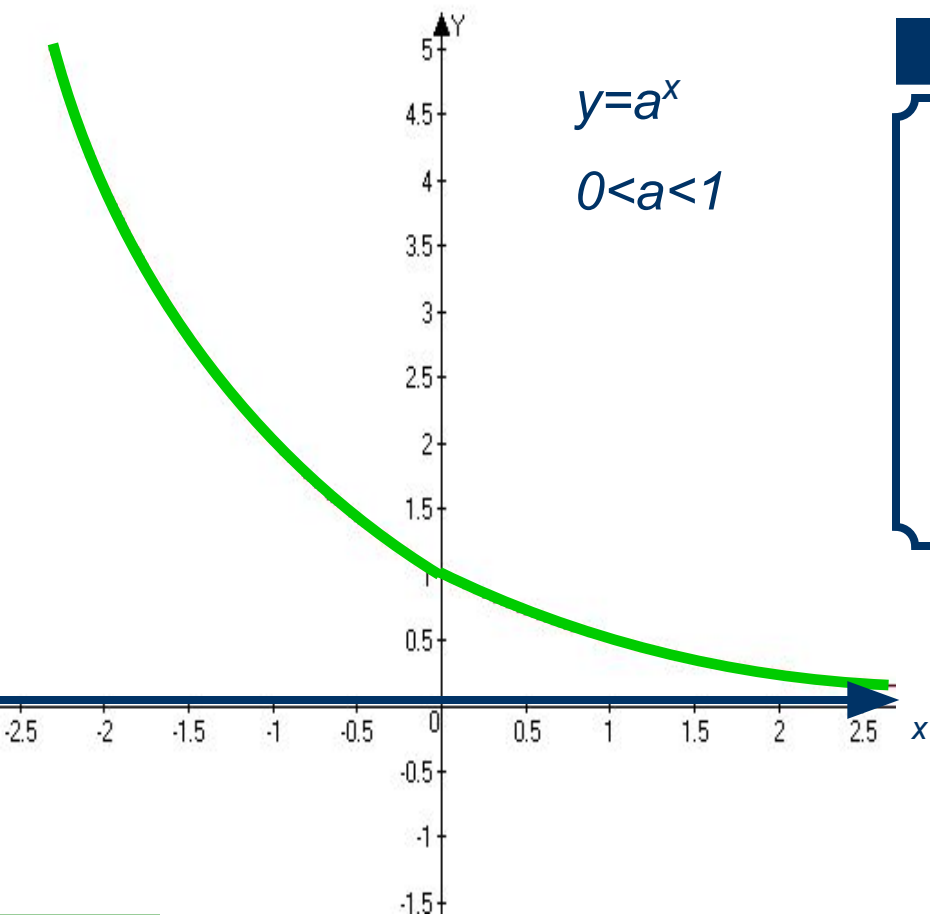
- Область определения –
множество всех
действительных чисел
 $D(a^x) = \mathbf{R}$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



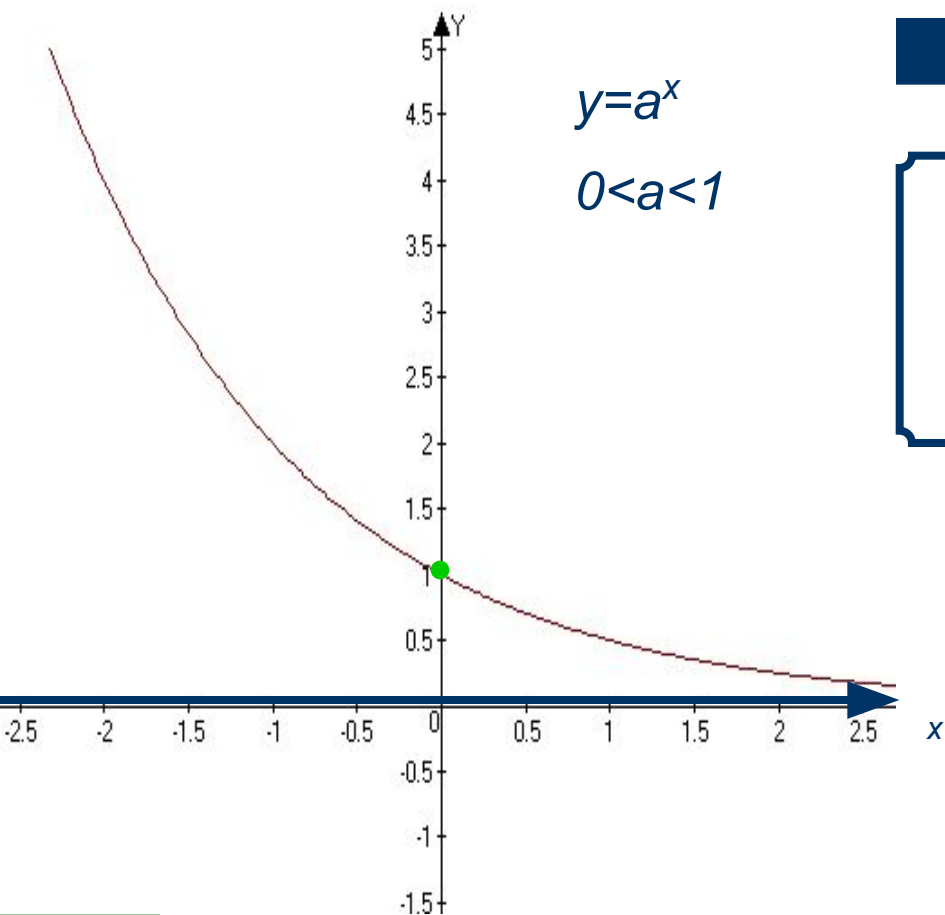
- Область значений –
множество всех
положительных чисел
 $E(a^x) = \mathbf{R}_+$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



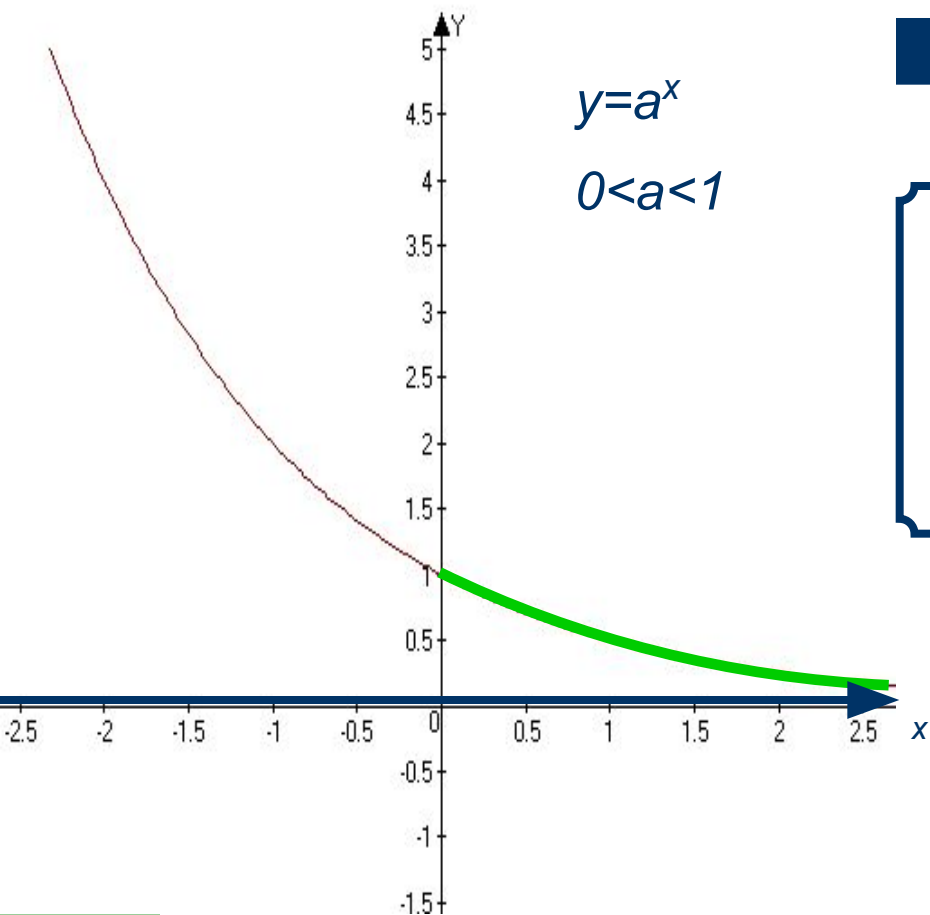
- Функция убывает на всей области определения

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



- При $x=0$ значение функции равно 1

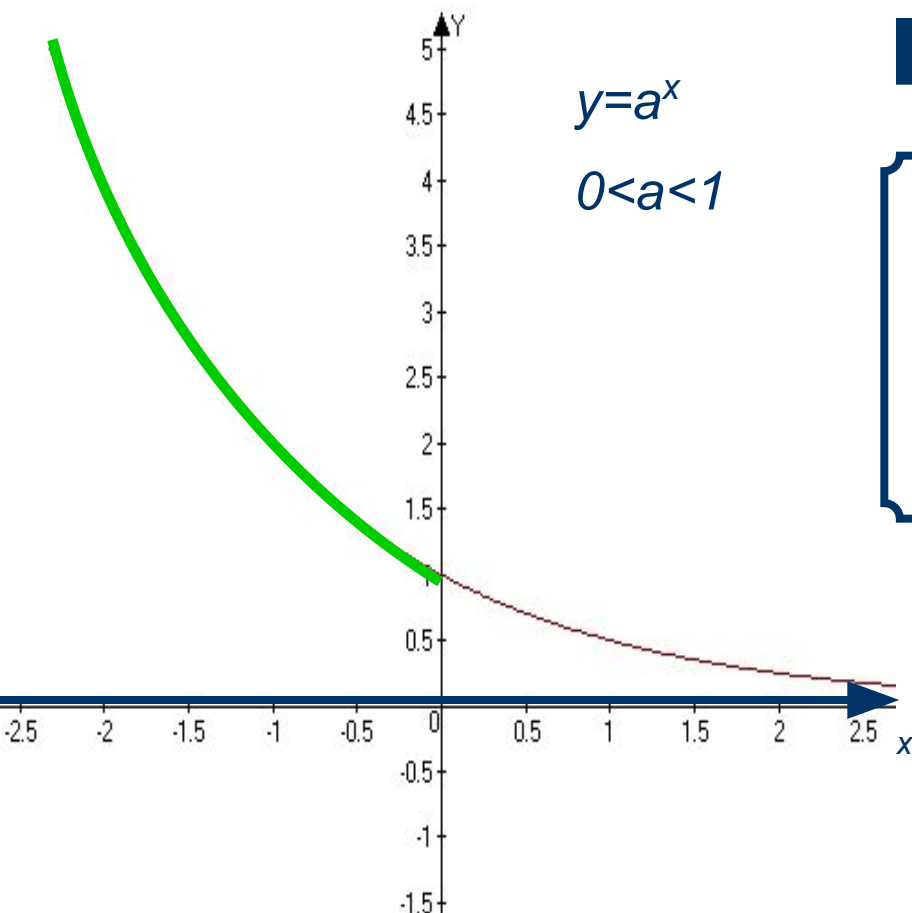
Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



$$y=a^x$$
$$0<a<1$$

- Если $x>0$, то $0<a^x<1$

Свойства показательной функции $y=a^x$ при $0<a<1$



- Если $x < 0$, то $a^x > 1$

Показательные уравнения

$$a^x = b$$

Если

$$b = a^m,$$

то

$$a^x = a^m$$

и

$$x = m$$

Если

$$b > 0,$$

то

$$a^x = b \Leftrightarrow$$

$$x = \log_a b$$

Если

$$b < 0,$$

то

$$a^x = b$$

**не
имеет
корней**

Показательные неравенства

$$a^x \succ b; \quad a^x \geq b; \quad a^x \prec b; \quad a^x \leq b.$$

Если $0 < a < 1$

1. $a^x \succ b$, где $b = a^m \Leftrightarrow a^x \succ a^m \Leftrightarrow x \prec m$
2. $a^x \leq b$, $b \neq a^m$, $b > 0 \Leftrightarrow x \geq \log_a b$
3. $a^x \leq b$, если $b < 0$, то **не имеет решения**
4. $a^x \succ b$, если $b < 0$, то $x \in \mathbb{R}$

Если $a > 1$

1. $a^x \succ b$, где $b = a^m \Leftrightarrow x \succ m$
2. $a^x \leq b$, где $b \neq a^m$, $b > 0 \Leftrightarrow x \leq \log_a b$

Производная и первообразная

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

$$F(x) = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Тест 1

Проверь себя!

- | | | |
|-----|------|----------|
| 1. | Да. | 11. Да. |
| 2. | Нет. | 12. Да. |
| 3. | Нет. | 13. Да. |
| 4. | Да. | 14. Нет. |
| 5. | Да. | 15. Да. |
| 6. | Да. | 16. Да. |
| 7. | Да. | 17. Да. |
| 8. | Нет. | 18. Да. |
| 9. | Нет. | 19. Нет. |
| 10. | Нет. | 20. Да. |



Тест 2

Проверь себя !

- | | | |
|--------|---------|---------|
| 1. «-» | 8. «-» | 15. «+» |
| 2. «-» | 9. «+» | 16. «-» |
| 3. «+» | 10. «-» | 17. «+» |
| 4. «-» | 11. «+» | 18. «-» |
| 5. «+» | 12. «+» | 19. «-» |
| 6. «-» | 13. «+» | 20. «-» |
| 7. «+» | 14. «+» | 21. «+» |

18-21 правильных ответов – «5», 14-17 – «4», 11-13 – «3»,
меньше 11 – не владеете материалом

Основные опорные сигналы

$$1. \quad A \cdot B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ \exists A, B \end{cases}$$

$$2. \quad \frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$$

$$3. \quad A \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ A = 0 \end{cases} \quad A \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ A = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$$

$$9. \quad A^B = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} A > 0 \\ B = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A = 1 \\ \exists B \end{cases}$$

$$6. \quad |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$7. \quad \sqrt{A} > B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \\ A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \quad \text{и}$$

$$\sqrt{A} \leq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A \leq B^2 \end{cases}$$

$$8. \quad \frac{A}{B} \leq \frac{A}{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq C \\ B \neq 0, C \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} A < 0 \\ B \leq C < 0 \end{cases}$$

Способы решения уравнений

- Разложение левой части на множители.
- Замена переменной.
- Функциональный (с помощью свойств функции).
- Однородные (делением обеих частей на выражение не равное нулю)
- Графический.
- Логарифмирование.

Проверь себя! Тест 3, часть 1

1. Опора 9 , функциональный способ
2. Опора 1 , функциональный способ
3. Опора 8 , замена переменной, функциональный способ
4. Опора 3 , функциональный способ, метод интервалов
5. Опора 6 , однородные уравнения
6. Опора 2 , замена переменной, разложение на множители
7. - замена переменной, метод интервалов
8. Опора 7 , функциональный способ
9. Опора 2 , замена переменной, функциональный способ
10. Опора 5 , $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$
11. Опора 1 , функциональный способ
12. - , графический способ
13. Опора 5 , геометрическая прогрессия
14. Опора 4 , функциональный способ
15. - , замена переменной, метод интервалов

Указания к заданиям 16 - 19

16. Используйте основное свойство дроби и исследование решений линейного уравнения.

17. $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

18. Базовые знания – производная и первообразная показательной функции.

19. Записать данную функцию в виде степени с основанием 2. опереться на свойства показательной и квадратичной функций.

Решите. Тест 3 (часть2)

Вариант 1.

Решите уравнение, в ответ запишите наименьший корень $\left|x\right|^{\frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}}} = 1$

Вариант 2.

Решите уравнение, в ответ запишите корень или сумму корней

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0$$

Вариант 3.

Решите уравнение $(2^{x^2-3x+2} - 4)^2 + (5^{x^2-x-6} - 1)^2 = 0$

Проверь себя!

Вариант 1

Решите уравнение. В ответ запишите наименьший корень $\left| \tilde{o} \right| \frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}} = 1$.

Решение.

$$\left| x \right| \frac{\sin x}{\sqrt{5-x^2-4x}} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ -x^2 - 4x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ -5 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ \sin x = 0 \\ x^2 + 4x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ -5 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \\ x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -5 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\pi \end{cases}$$

π

Ответ: -

Проверь себя!

Вариант 2

Решите
уравнение.

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0.$$

Решение. Так как $3^x + 81 > 0$ при любых x ,
то

$$(3^x + 81) \cdot \sqrt{3^{|x|} - 9} \cdot \lg(4 - 3^x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{|x|} - 9 = 0 \\ 4 - 3^x > 0 \\ 4 - 3^x = 1 \\ 3^{|x|} - 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ 3^x < 4 \\ 3^x = 3 \\ 3^{|x|} \geq 3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Ответ: -2

Проверь себя!

Вариант 3

Решите уравнение. $\left(2^{x^2-3x+2} - 4\right)^2 + \left(5^{x^2-x-6} - 1\right)^2 = 0.$

Решение $\left(2^{x^2-3x+2} - 4\right)^2 + \left(5^{x^2-x-6} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2} - 4 = 0 \\ 5^{x^2-x-6} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-3x+2} = 2^2 \\ 5^{x^2-x-6} = 5^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x^2 - x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Ответ:

3