

Нестандартно мыслим.

**Применение теоремы о среднем
арифметическом и среднем
геометрическом при
доказательстве неравенств.**



Применение теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом при доказательстве неравенств.



Цели и задачи:

- Научиться доказывать неравенства различными (рациональными) способами.



Свойства числовых неравенств:

1) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;

2) если $a > b$, a, c – любые числа, то $a + c > b + c$;

если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$, а если $c < 0$, то $ac < bc$

№ 3.13 (4 балла).

Сравнить значение выражений:

$$\sqrt{101} + \sqrt{102} \text{ и } \sqrt{99} + \sqrt{104}.$$

Так как обе суммы положительны, то сравним квадраты этих сумм
 $(\sqrt{101} + \sqrt{102})^2$ и $(\sqrt{99} + \sqrt{104})^2$

$$101 + 2\sqrt{101 \cdot 102} + 102 \text{ и } 99 + 2\sqrt{99 \cdot 104} + 104$$

$$203 + 2\sqrt{101 \cdot 102} \text{ и } 203 + 2\sqrt{99 \cdot 104}$$

$$203 + 2\sqrt{(100+1) \cdot 102} \text{ и } 203 + 2\sqrt{(100-1) \cdot 104}$$

$$\sqrt{10200+102} \text{ и } \sqrt{10400-104}$$

$$\sqrt{10302} > \sqrt{10296}, \text{ значит}$$

$$203 + 2\sqrt{10302} > 203 + 2\sqrt{10296}, \text{ следовательно}$$

$$\sqrt{101} + \sqrt{102} > \sqrt{99} + \sqrt{104}.$$

Ответ: $\sqrt{101} + \sqrt{102} > \sqrt{99} + \sqrt{104}.$

Доказать, что если $ab > 0$, $ac > 0$, то имеет место неравенство:

$$\frac{2a^2 + 4b^2 + c^2}{4ab + 2ac} \geq 1.$$

Так как $ab > 0$, $ac > 0$, то $4ab + 2ac > 0$, тогда данное неравенство примет вид:

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 \geq 4ab + 2ac,$$

$$2a^2 + 4b^2 + c^2 - 4ab - 2ac \geq 0,$$

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) \geq 0,$$

$$(a - 2b)^2 + (a - c)^2 \geq 0,$$

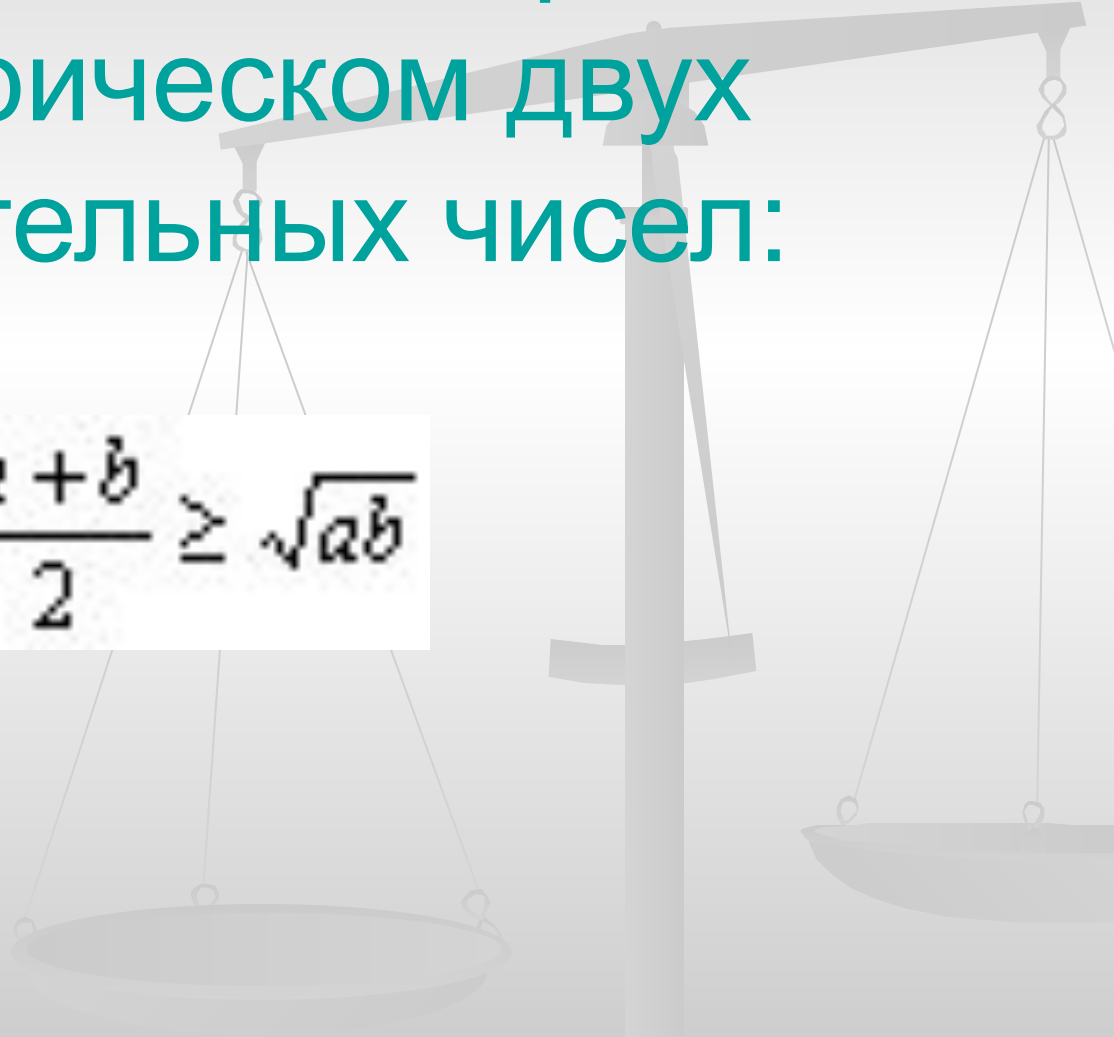
что очевидно, так как $(a - 2b)^2 \geq 0$ и $(a - c)^2 \geq 0$, значит

$$\frac{2a^2 + 4b^2 + c^2}{4ab + 2ac} \geq 1$$

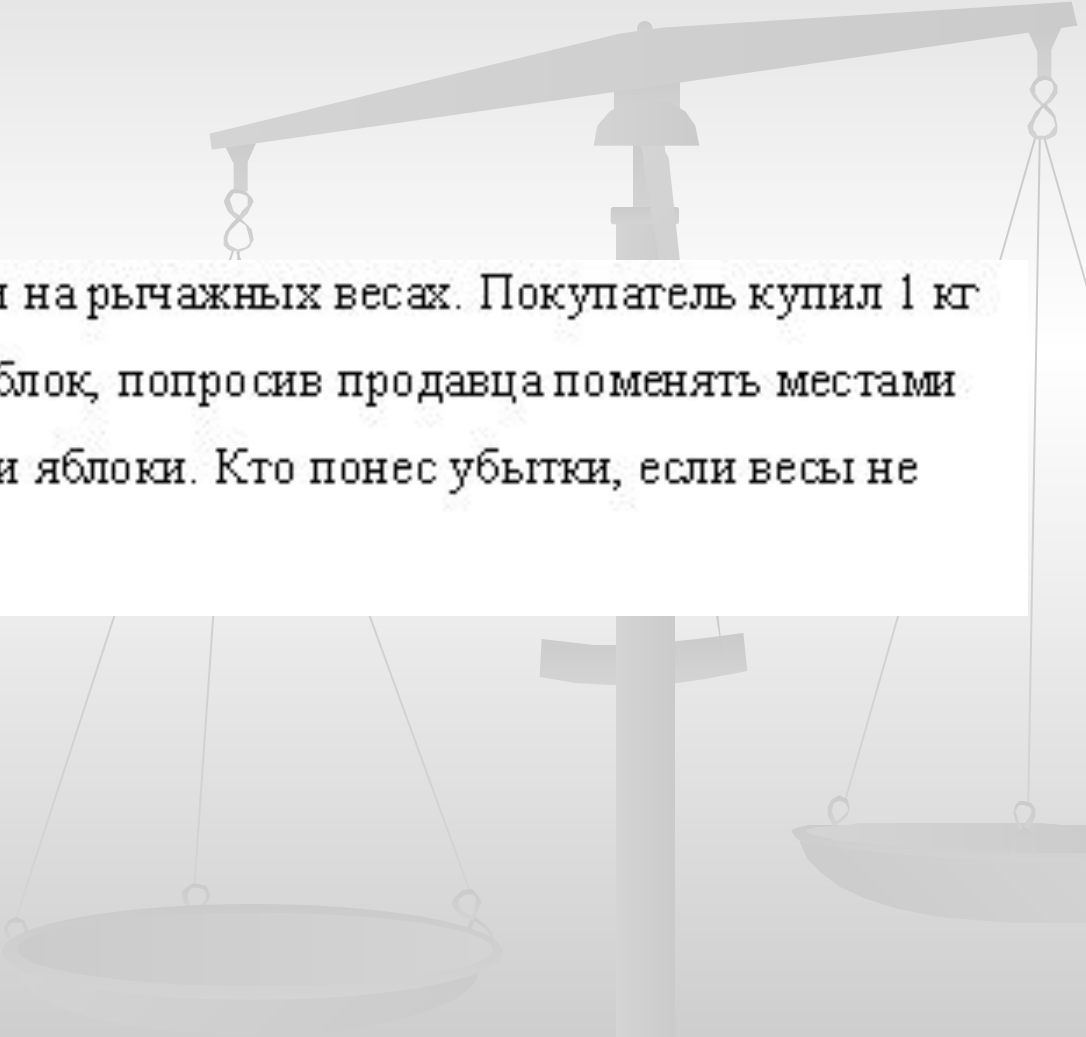
Равенство достигается при $a = c = 2b$.

Неравенство доказано.

Теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$


№ 4 из § 24



Продавец взвешивает яблоки на рычажных весах. Покупатель купил 1 кг яблок, а затем купил еще 1 кг яблок, попросив продавца поменять местами при втором взвешивании гирю и яблоки. Кто понес убытки, если весы не отрегулированы?

Решение:

Пусть плечи весов равны a и b . При первом взвешивании покупатель приобрел x килограммов яблок. Из курса физики известно, что

$x \cdot b = 1 \cdot a$, откуда $x = \frac{a}{b}$. При втором взвешивании покупатель приобрел y

килограммов яблок. Из условия равновесия $y \cdot a = 1 \cdot b$ находим $y = \frac{b}{a}$.

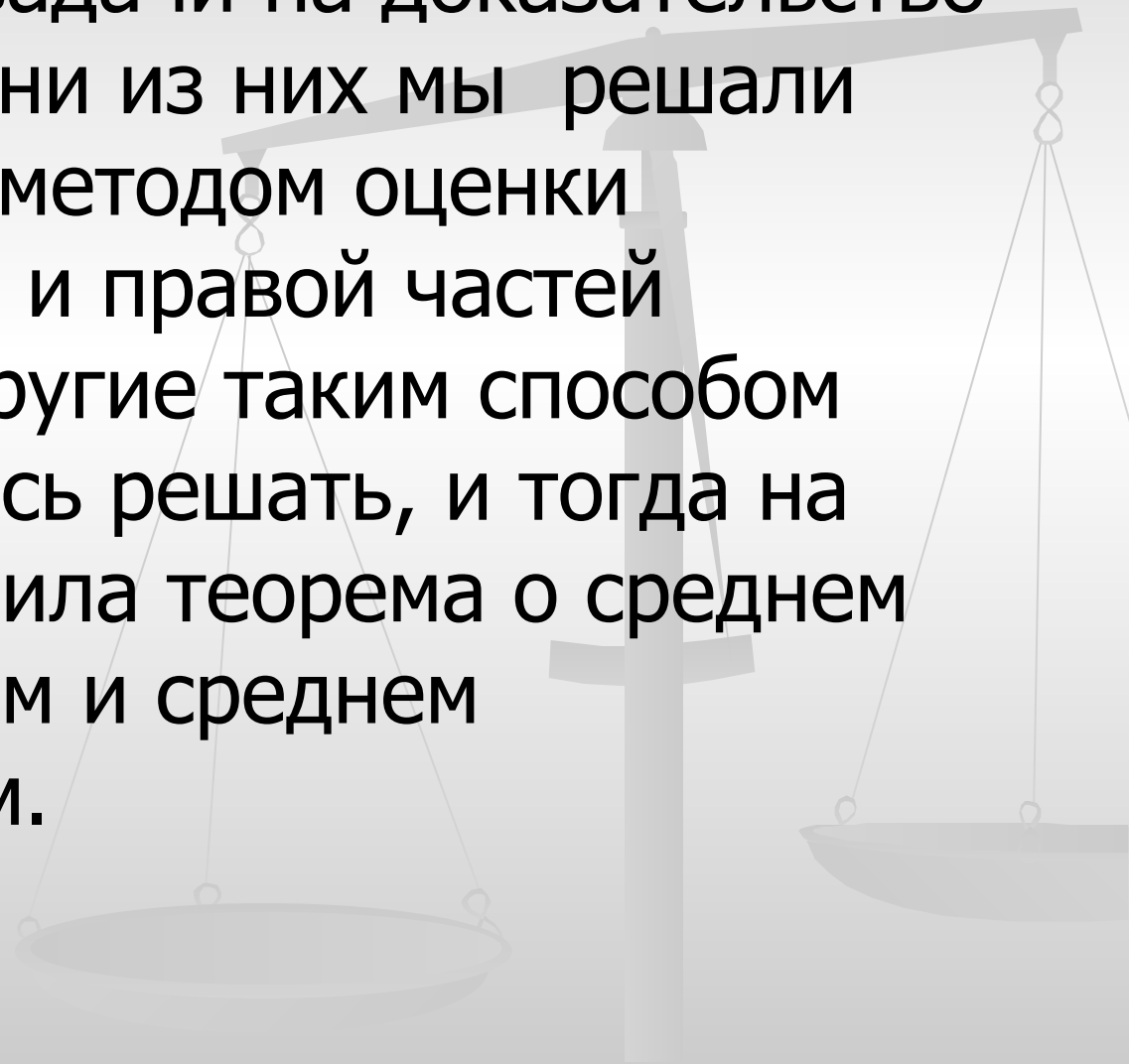
Итак, было куплено $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ килограммов яблок. Используя неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$,

получаем
$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}},$$

откуда
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Ответ: убыток понес продавец.

- Готовясь с учащимися к олимпиаде, я решала с ними множество задач, среди которых были задачи на доказательство неравенств. Одни из них мы решали традиционным методом оценки разности левой и правой частей неравенства, другие таким способом нам не удавалось решать, и тогда на помощь приходила теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом.



Приведу примеры некоторых из НИХ:

Доказать, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$ имеют место следующие неравенства:

$$1) \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geq 2;$$

$$2) \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}};$$

$$3) \sqrt{\frac{a^2}{b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b};$$

$$4) (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4;$$

$$5) (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc;$$

$$6) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3;$$

$$7) a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd;$$

$$8) \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$



Что касается доказательства первых четырех неравенств, то они доказываются элементарно: находим разность левой и правой части, преобразовываем ее так, что становится очевидной ее положительность.

$a^2 + b^2 \geq 2ab$, так как $(a - b)^2 \geq 0$,

$a^2 + b^2 + c^2 \geq (ab + bc + ac)$, так как $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

Например, докажем неравенство $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$.

$$(a + b)\frac{a + b}{ab} - 4 = \frac{(a + b)^2}{ab} - 4 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 4ab}{ab} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} = \frac{(a - b)^2}{ab} \geq 0$$

при $a > 0$, $b > 0$, значит данное неравенство $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$. Доказано.

Для доказательства неравенств 5-8 приходится применять теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом положительных чисел.

Докажем, например, неравенство:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc \text{ при } a > 0, b > 0, c > 0$$

На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для положительных чисел a и b , b и c , a и c запишем неравенства:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$b+c \geq 2\sqrt{bc};$$

$$a+c \geq 2\sqrt{ac}.$$

Так как левые и правые части этих неравенств положительны, то эти неравенства можно почленно перемножить, в результате чего получим:

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ac};$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2};$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc.$$

Доказано.

Докажем также неравенство:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

Запишем на основании указанной теоремы неравенства для пар чисел

$\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$; $\frac{c}{a}$ и 1:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} = 2\sqrt{\frac{a}{c}};$$

$$\frac{c}{a} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot 1} = 2\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Сложив неравенства почленно, получим

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}} + 2\sqrt{\frac{c}{a}} = 2\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right).$$

Запишем теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом

для чисел $\sqrt{\frac{a}{c}}$ и $\sqrt{\frac{c}{a}}$:

$$\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{a}}} = 2.$$

Тогда неравенство может быть записано в следующем виде:

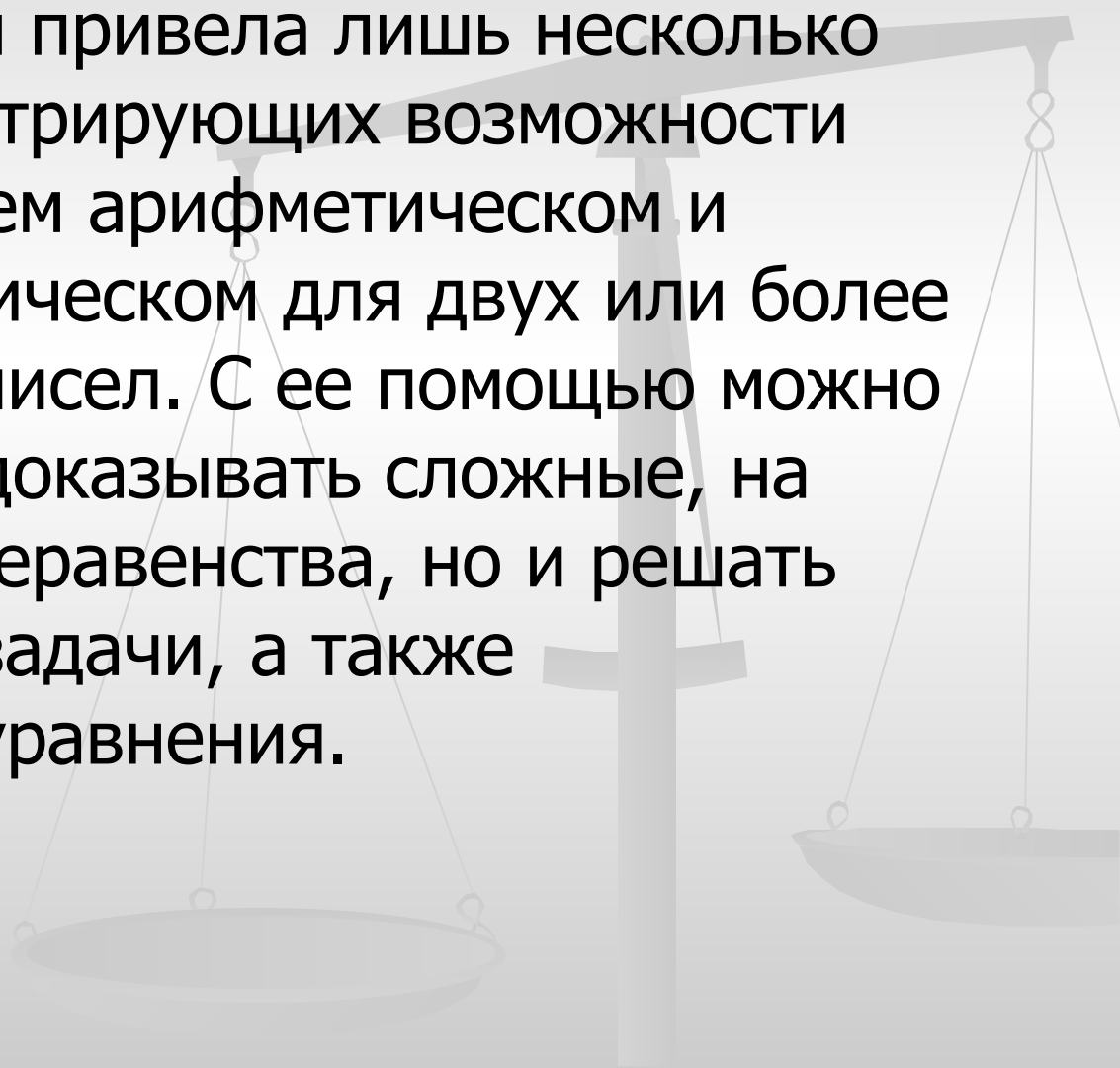
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + 1 \geq 4.$$

В итоге $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$

Доказано.

Заключение:

- В своей работе я привела лишь несколько примеров, иллюстрирующих возможности теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух или более положительных чисел. С ее помощью можно не только легко доказывать сложные, на первый взгляд, неравенства, но и решать геометрические задачи, а также алгебраические уравнения.



ЛИТЕРАТУРА.

- Алимов Ш. А., Колягин Ю. М. и др. Алгебра 8. М.: Просвещение, 2007.
- Савин А. П. Энциклопедический словарь юного математика. М.: Педагогика, 1985.
- Далингер В.А. «Как сделать теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом средством познания» Ж. «Математика в школе» № 9, 2003.
- Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова и др. Алгебра: Сборник заданий для подготовки к итоговой аттестации в 9 классе. – 2 – е издание. – М.: Просвещение, 2007.
- Сивашинский И. Х. «Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям». М.: Наука, 1971.