

Нестандартные методы решения уравнений и неравенств

Боков Иван

Куркова Анастасия

Малашок Полина

Матющенко Роман

Мхитарян Артем

Подцикина Серафима

Подцыкин Максим

Шпилева Надежда

Научный руководитель: Иноземцева Елена Ивановна

2010 г.

Гипотеза работы

Существует большое количество способов решения уравнений и неравенств, многие из которых не изучаются согласно школьной программе

Цели работы

- Изучить нестандартные методы решения уравнений и неравенств
- Научиться использовать их на практике
- Создать наглядную и понятную презентацию для ознакомительных целей
- Ознакомить класс с этими методами при помощи наглядных примеров
- Создать папку с материалами работы

Древний Египет

«Фальшивое правило»

Задача: куча. Ее седьмая часть 19. Найти кучу

$$x + \frac{x}{7} = 19.$$

(куча) 7
 $\frac{1}{7} \dots 1$

. 8
 .. 16 *
 $\frac{1}{2}$ 4
 $\frac{1}{4}$ 2 *
 $\frac{1}{8}$ 1 *

. 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
 .. 4 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$
 9 $\frac{1}{2}$
 Куча
 16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$

16 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$
 2 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
 Вместе 19.

Будет хорошо

Вавилон

Диофант (жил предположительно в III веке н. э.)

Квадратные уравнения

Задача: Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение — 96



$$(10 + x)(10 - x) = 96,$$

$$100 - x^2 = 96,$$

$$x^2 - 4 = 0.$$

$$x = 2$$

$$x_1 = 12 \text{ и } x_2 = 8$$

Задача № 80

Задача: Найти 2 таких числа, чтобы сумма квадрата каждого из них с другим искомым числом дала полный квадрат

Решение:

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2,$$

$$(2s + 1)^2 + s,$$

$$4s^2 + 5s + 1 = t^2,$$

Положим, что:

$$t = 2s - 2,$$

$$t^2 = 4s^2 - 8s + 4 = 4s^2 + 5s + 1,$$

$$4s^2 - 8s + 4 = 4s^2 + 5s + 1.$$

$$s = \frac{3}{13},$$

$$2s + 1 = \frac{6}{13} + 1 = \frac{19}{13}$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \frac{9}{13} = \frac{256}{169} = \left(\frac{16}{13}\right)^2$$

$$\left(\frac{19}{13}\right)^2 + \frac{3}{13} = \frac{400}{169} = \left(\frac{20}{13}\right)^2$$

уравнения

Архимед (287 до н. э. — 212 до н. э.)

Сочинение: «О шаре и цилиндре»

Задача: рассечь заданный отрезок a на две части x и $a - x$ так, чтобы

$$(a - x) : c = S : x^2$$


МОДУЛЕМ

Способы решения уравнений, содержащих сумму модулей

$$|x - 1| - 2|x + 2| = 0 :$$

1. «Сравнение модулей»

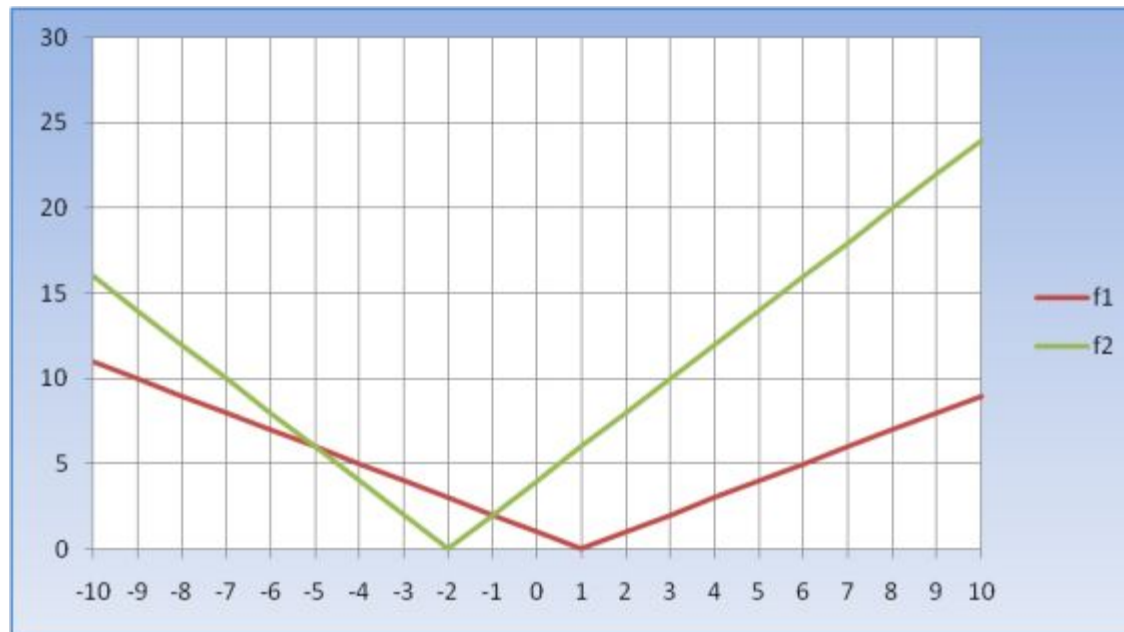
$$|x - 1| = 2|x + 2|$$

2. Сравнение квадратов

$$(|x - 1|)^2 = (2 \cdot |x + 2|)^2$$

3. Графический способ

$$f(x) = |x - 1| \text{ и } f(x) = 2|x + 2|$$



Сравнение квадратов

Пример: $|x - 1| = 2 |x + 2|$

$$(|x - 1|)^2 = (2 \cdot |x + 2|)^2$$

$$(x - 1)^2 - (2x + 4)^2 = 0$$

$$((x - 1) - (2x + 4)) \cdot ((x - 1) + (2x + 4)) = 0$$

$$(x - 1 - 2x - 4) \cdot (x - 1 + 2x + 4) = 0$$

$$x - 1 - 2x - 4 = 0$$

$$-x - 5 = 0$$

$$x = -5$$

или

$$x - 1 + 2x + 4 = 0$$

$$3x + 3 = 0$$

$$x = -1$$

Ответ: -5; -1

раскрытие модуля на интервалах

Пример: $|4|x| + 5| = 6|x|$

$|x| = a$, где $a > 0$, тогда $|4a + 5| = 6a$

$$4a + 5 = -6a$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$4a + 5 = 6a$$

$$a = \frac{5}{2}$$

Не удовлетворяет условию $a > 0$

$$|x| = \frac{5}{2}, \text{ значит, } x = \pm \frac{5}{2}$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{5}{2} \right\}$

Раскрытие модуля на интервалах (начиная с внутреннего)

Пример: $|4|x| + 5| = 6|x|$

На промежутке $(-\infty; 0]$

$$|-4x + 5| = -6x$$

$$\begin{array}{l} -4x + 5 = 6x \quad \swarrow \searrow \quad -4x + 5 = -6x \\ x = \frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad x = -\frac{5}{2} \end{array}$$

Не удовлетворяет условию

$$x = -\frac{5}{2} \quad -\frac{5}{2} \in (-\infty; 0]$$

На промежутке $[0; +\infty)$

$$|4x + 5| = 6x$$

$$\begin{array}{l} 4x + 5 = -6x \quad \swarrow \searrow \quad -4x + 5 = 6x \\ x = -\frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad x = \frac{5}{2} \end{array}$$

Не удовлетворяет условию

$$x = \frac{5}{2} \quad \frac{5}{2} \in [0; +\infty)$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{5}{2} \right\}$

ЧЕТНОСТИ

Пример: $y = |4|x| + 5| = 6|x|$

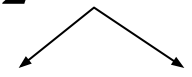
$\downarrow$
 $|4x + 5| = 6x$

$$4x + 5 = 6x$$

$$2x = 5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} \in [0; +\infty)$$


$$x = -\frac{5}{2} \qquad x = \frac{5}{2}$$

и $4x + 5 = -6x$

$$10x = -5$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

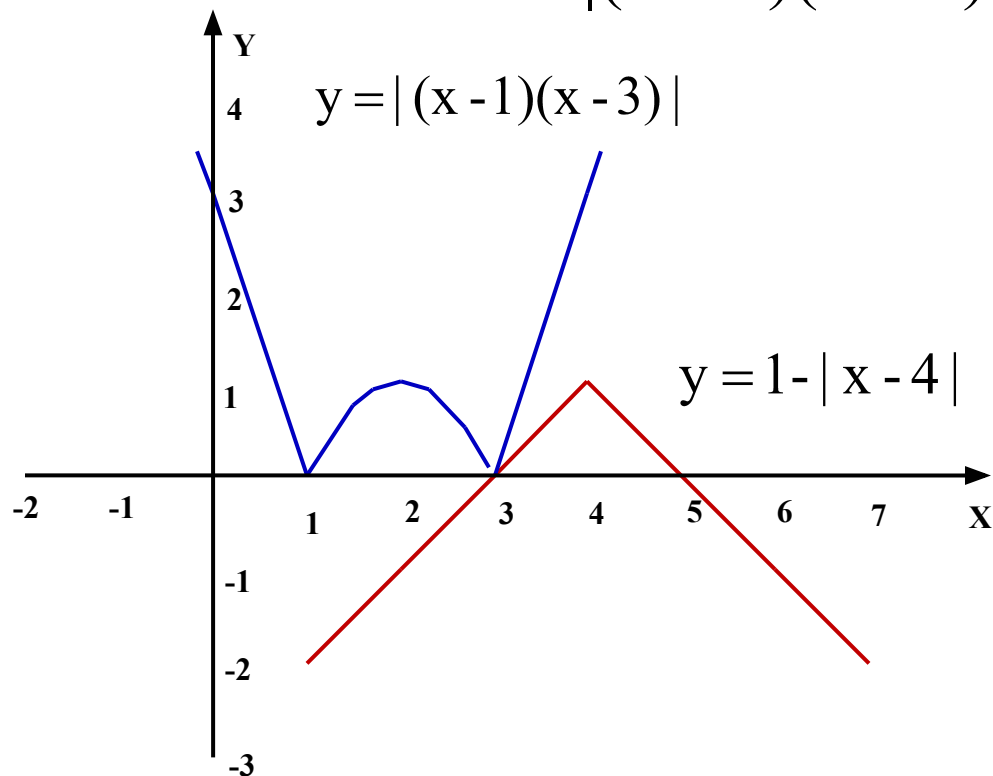
$$-\frac{1}{2} \notin [0; +\infty)$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{5}{2} \right\}$

Графический способ решения уравнений, содержащих модуль

Пример: $|4 - x| + |(x - 1)(x - 3)| = 1$

$$|(x - 1)(x - 3)| = 1 - |4 - x|$$



$$y_1 = |(x-1)(x-3)|$$

$$y_2 = 1 - |x-4|$$

Ответ: 3

Уравнения с параметрами

- Уравнение с параметрами – математическое уравнение, внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров.

Способы решения:

- Графический
- Аналитический

Задача

: При каких значениях **a** один корень квадратного уравнения

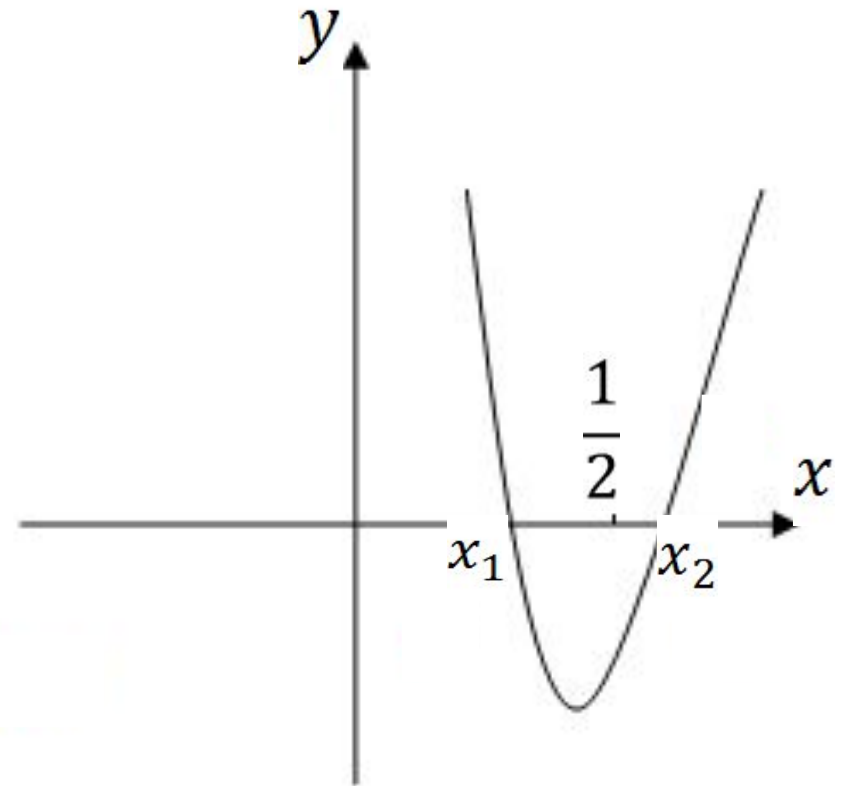
$$x^2 - (a+1)x + 2a^2 = 0 \text{ больше } \frac{1}{2}, \text{ а другой меньше } \frac{1}{2} ?$$

Шаг 1

- Функция

$$y = x^2 - (a+1)x + 2a^2$$

- График этой функции
- парабола, ветви
направлены вверх



Шаг 2

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - (a+1)\frac{1}{2} + 2a^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} + 2a^2$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}$$

$$2a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4} < 0$$

$$8a^2 - 2a - 1 < 0$$

$$8a^2 - 2a - 1 = 0$$

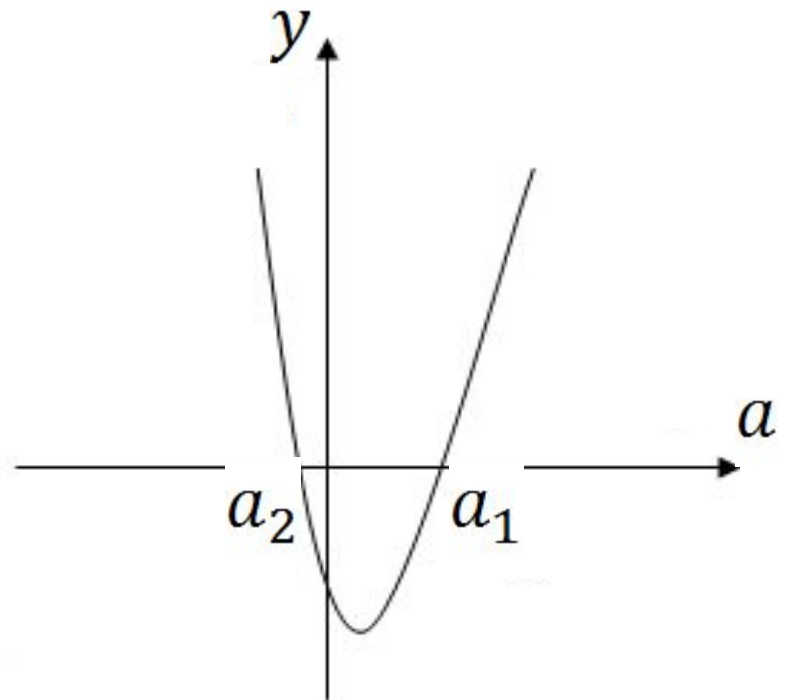
$$D = 4 + 32 = 36$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$$

Ответ: $(-0,25;$
 $0,5)$



Задача: При каких значениях **b** система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y = b; \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1 способ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x + y = b; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = b - y, \\ (b - y)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$$

$$b^2 - 2by + y^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$2y^2 - 2by + b^2 - 9 = 0$$

$$4b^2 - 8(b^2 - 9) = 0$$

$$4b^2 - 8b^2 + 72 = 0$$

$$-4b^2 = -72$$

$$b^2 = 18$$

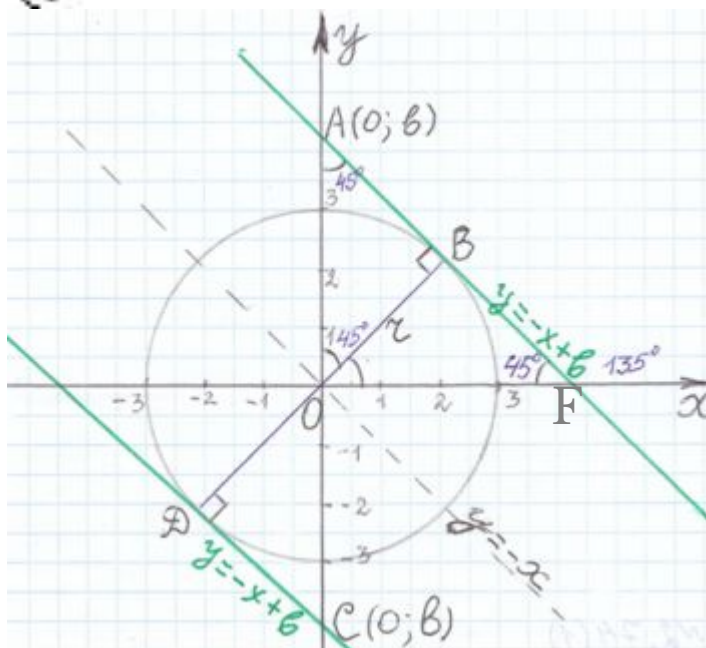
$$b = \pm \sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$$

При $b = \pm 3\sqrt{2}$ система имеет единственное решение

Ответ: $\pm 3\sqrt{2}$.

2 способ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3^2, \\ y = -x + b; \end{cases}$$



- График первого уравнения - окружность с центром в начале координат и радиусом 3.
- График второго уравнения - прямая

$$OA = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}. \quad OC = OA.$$

Значит, $b = \pm 3\sqrt{2}$.

Схема Горнера

Пример: $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

	1	-10	35	-50	24
x=1	1	-9	26	-24	0
x=2	1	-7	12	0	

Делим уравнение на (x-1)

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

Делим уравнение на (x-2)

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Решаем квадратное уравнение, x=3 и x=4

Ответ: 1;2;3;4

Формулы Виета

Задача: Найти кубическое уравнение, корни которого являются квадратами корней $x^3 - 3x^2 + 7x + 5 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 7 \\ x_1x_2x_3 = 5 \end{cases}$$

Обозначим корни искомого кубического уравнения как $y_1y_2y_3$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \\ &= 3^2 - 2 * 7 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &= (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - \\ &- 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 7^2 - 2 * 3 * (-5) = 79 \\ y_1y_2y_3 &= (x_1x_2x_3)^2 = 25 \end{aligned}$$

Ответ: $y^3 + 5y^2 + 79y + 25 = 0$

Решение с выделением полного квадрата

Пример: $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0$.

Представим $-3x^2$ как $(x^2 - 4x^2)$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$

Свернем по формуле и вынесем общий множитель

$$(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) + 4 = 0$$

Введем замену $y = (x^2 - x)$

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

Решим уравнение, $y=2$

$$2 = (x^2 - x)$$

$$x = -1 \text{ или } x = 2$$

Ответ: -1;2

Идея однородности

Пример: $5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 12\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$

Пусть $\frac{x-2}{x+1} = U$, $\frac{x+2}{x-1} = V$, тогда получим

$$5U^2 - 44V^2 + 12UV = 0$$

Разделим обе части уравнения на $V^2 \neq 0$

$$\frac{U}{V} = 2; \quad \frac{U}{V} = -\frac{22}{5}$$

$$5\left(\frac{U}{V}\right)^2 + 12\frac{U}{V} - 44 = 0$$

$$\frac{x-2}{x+1} = \frac{2(x+2)}{x-1} \quad \text{или} \quad \frac{5(x-2)}{x+1} = -\frac{22(x+2)}{x-1}$$

$$x^2 + 9x + 2 = 0$$

$$9x^2 + 17x + 18 = 0$$

корней нет

Ответ: $\frac{-9 - \sqrt{73}}{2}; \quad \frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$

Решение уравнений относительно коэффициентов

Пример: $x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0$

$$x^6 - ((\sqrt{6})^2 + 1)x^2 + \sqrt{6} = 0$$

$$x^6 - x^2(\sqrt{6})^2 - x^2 + \sqrt{6} = 0$$

$$x^2(\sqrt{6})^2 - \sqrt{6} + x^2 - x^6 = 0$$

$$a = x^2 \quad b = -1 \quad c = x^2 - x^6$$

$$D = 1 - 4x^2(x^2 - x^6) = 1 - 4x^4 + 4x^8 = (2x^4 - 1)^2$$

Определяем коэффициенты и решаем квадратное

$\sqrt{6} = \frac{1 - |2x^4 - 1|}{2x^2} ;$ уравнение: $\sqrt{6} = \frac{1 + |2x^4 - 1|}{2x^2}$

$$x^4 + \sqrt{6}x^2 - 1 = 0; \quad \text{или} \quad x^4 - \sqrt{6}x^2 = 0$$

2 квадратных уравнения;

$$x^2 = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{10}}{2} < 0 \text{ корней нет; } x = 0 - \text{посторонний корень}$$

$$x^2 = \sqrt{6}$$

$$x^2 = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2};$$

$$x_3 = -\sqrt[4]{6}; \quad x_4 = +\sqrt[4]{6};$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}};$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}};$$

Ответ: $-\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}; +\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}; -\sqrt[4]{6}; +\sqrt[4]{6}$

Метод разложения на простейшие дроби

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-2}{x+2} + \frac{x-3}{x+3} + \frac{x+4}{x-4} = 4 \quad x \neq 1, x \neq -2, x \neq -3, x \neq 4;$$

$$\frac{x-1+2}{x-1} + \frac{x+2-4}{x+2} + \frac{x+3-6}{x+3} + \frac{x-4+8}{x-4} = 4$$

Выделяем из числителя 1 и переносим:

$$1 + \frac{2}{x-1} + 1 - \frac{4}{x+2} + 1 - \frac{6}{x+3} + 1 + \frac{8}{x-4} = 4$$

$$\frac{x-4+4x-1}{(x-1)(x-4)} - \frac{2x+6+3x+6}{(x+2)(x+3)} = 0$$

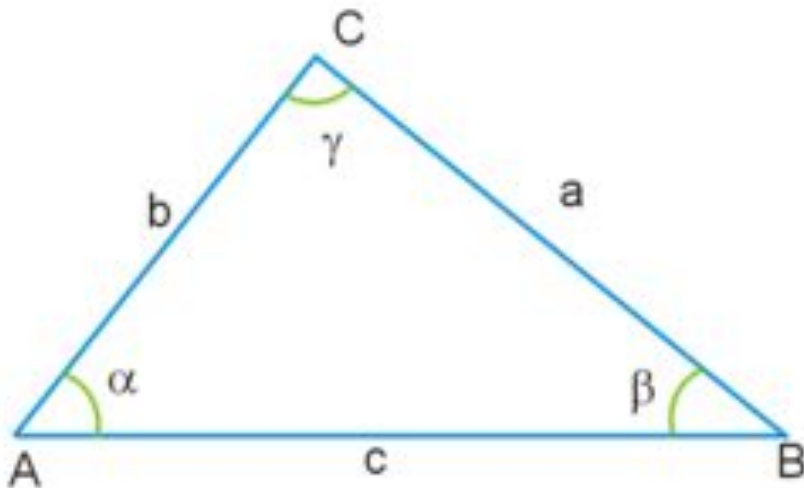
$$(5x-8)(x^2+5x+6) - (5x+12)(x^2-5x+4) = 5x^2+5x-16$$

$$5x^2 + 5x - 16 = 0$$

Ответ: $\frac{-5 - \sqrt{345}}{10}; \frac{-5 + \sqrt{345}}{10}$

Неравенство треугольника

(Евклидова геометрия)



$$|AC| \leq |AB| + |BC|,$$

1. Внешний угол больше внутреннего, с ним не смежного
2. Против большей стороны лежит больший внутренний угол
3. Против большего внутреннего угла лежит большая сторона

Неравенство Коши

Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ - неотрицательные числа, то при

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$a_1 = a_2 = \dots a_n$$

Задача: Из всех равновеликих треугольников найти треугольник наименьшего периметра.

Пусть x, y, z – стороны треугольника, тогда:

$$x + y + z = \frac{3}{4} \left(\frac{x + y + z}{3} + \frac{x + y - z}{1} + \frac{x + z - y}{1} + \frac{z + y - x}{1} \right).$$

Применим неравенство Коши:

$$\begin{aligned} x + y + z &\geq 3 \sqrt[4]{\frac{x + y + z}{3} * \frac{x + y - z}{1} * \frac{x + z - y}{1} * \frac{z + y - x}{1}} = \\ &= 3 * \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} * \sqrt{\left(\frac{x + y + z}{2} * \frac{x + y - z}{2} * \frac{x + z - y}{2} * \frac{y + z - x}{2} \right)} = 3 * \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}} * S = \sqrt{3S} \end{aligned}$$

Наименьшее значение периметра равно $\sqrt{3S}$

Достигается при $x=y=z$

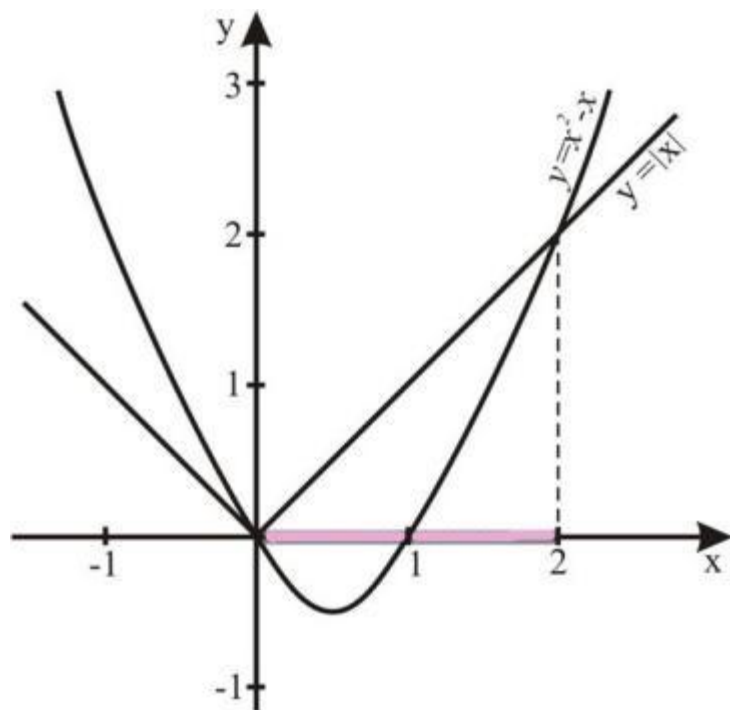
Неравенства с модулем

Соотношение двух величин, одна из которых имеет модуль, показывающее, что одна величина больше или меньше другой.

Методы решения:

- Метод промежутков
- Графический

Пример: $|x| > x^2 - x$



1. Рассмотрим

$$y_1 = |x|$$

$$y_2 = x^2 - x$$

2. $x \in (0; 2)$

Ответ: $(0; 2)$

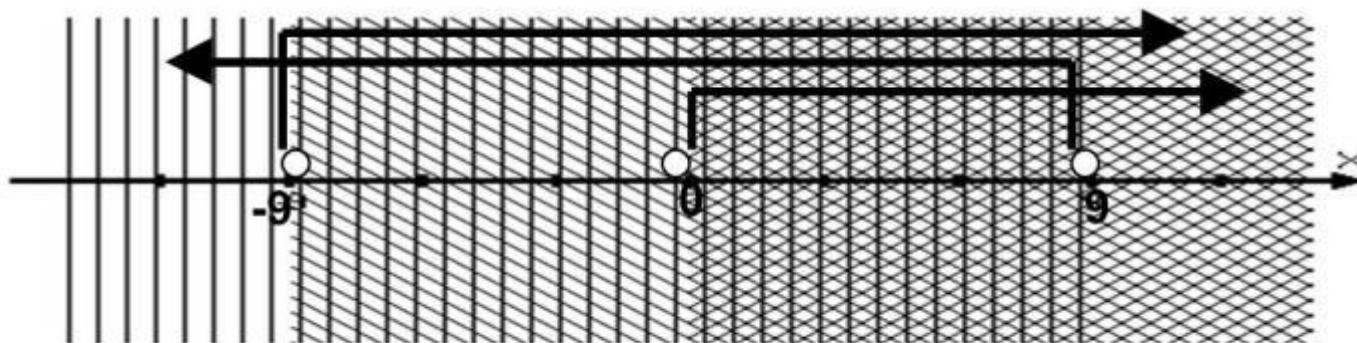
Пример: $|x^2 - 4x - 5| = a$

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 5 - a = 0, & D/4 = 4 + 5 + a = a + 9 \\ x^2 - 4x - 5 + a = 0. & D/4 = 4 + 5 - a = 9 - a \end{cases}$$

Если дискриминанты положительны, то

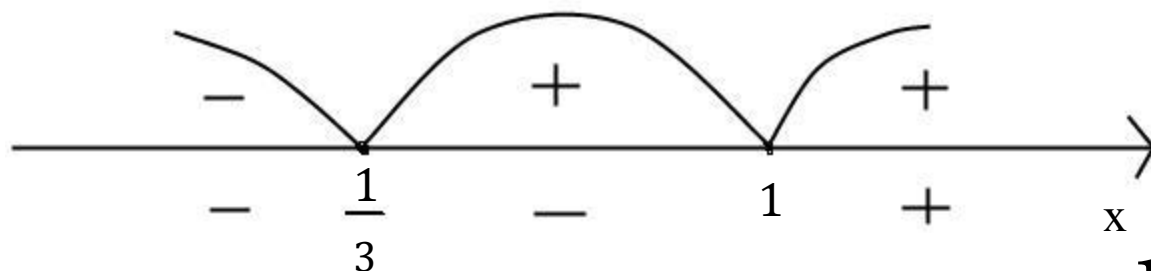
$$\begin{cases} a + 9 > 0, \\ 9 - a > 0, \\ a > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} a > -9, \\ a < 9, \\ a > 0. \end{cases}$$

при $0 < a < 9$



Ответ: $(0; 9)$

Пример $|3x - 1| - |x - 1| < 10$



$$x = 0; \quad -(3x - 1) + (x - 1) < 10 \quad x = -5; \quad \left(-5 \frac{1}{3}\right)$$

$$x = 0,5; \quad (3x - 1) + (x - 1) < 10; \quad 4x < 12; \quad x < 3; \quad \left[\frac{1}{3}; \quad \right]$$

$$x = 2; \quad (3x - 1) - (x - 1) < 10; \quad x < 5; \quad (1; 5)$$

$$\left(-5 \frac{1}{3} \cup \left[\frac{1}{3}; 1 \cup (1; 5)\right.\right)$$

Ответ: $(-5; 5)$

Неравенства с параметрами

Неравенство

$$f(a, b, c, \dots, k, x) > \phi(a, b, c, \dots, k, x),$$

где $a, b, c, \dots, k$ – параметры, а x – действительная переменная величина, называется неравенством с одним неизвестным, содержащим параметры.

Пример: Для всех допустимых значений параметра a решить неравенство:

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{2a-x} + \sqrt{a-1} + \sqrt{3-a} > 0$$

$$\begin{cases} x-a \geq 0; \\ 2a-x \geq 0; \end{cases}$$

$$x \in [a; 2a]$$

$$\begin{cases} a-1 \geq 0; \\ 3-a \geq 0; \end{cases}$$

$$a \in [1; 3]$$

Ответ: $[1;3];[a;2a]$

Задача: Найдите все значения a при которых неравенство не имеет реше $x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4 \leq 0$

$$y = x^2 + (2a + 6)x + 12a + 4$$

График – парабола, ветви вверх

$$\frac{D}{4} = (a + 3)^2 - (12a + 4) = a^2 - 6a + 5$$

$$a^2 - 6a + 5 < 0$$

$$1 < a < 5$$

Ответ: $(1; 5)$

Задача: Найти все значение параметра q , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(x^2 - q)(q - 2x - 8) > 0$$

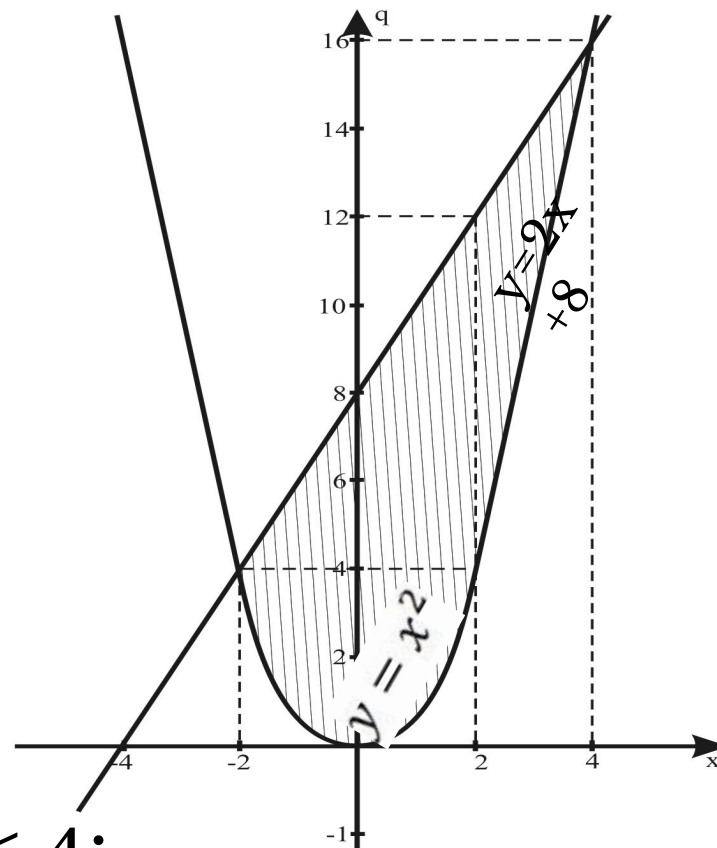
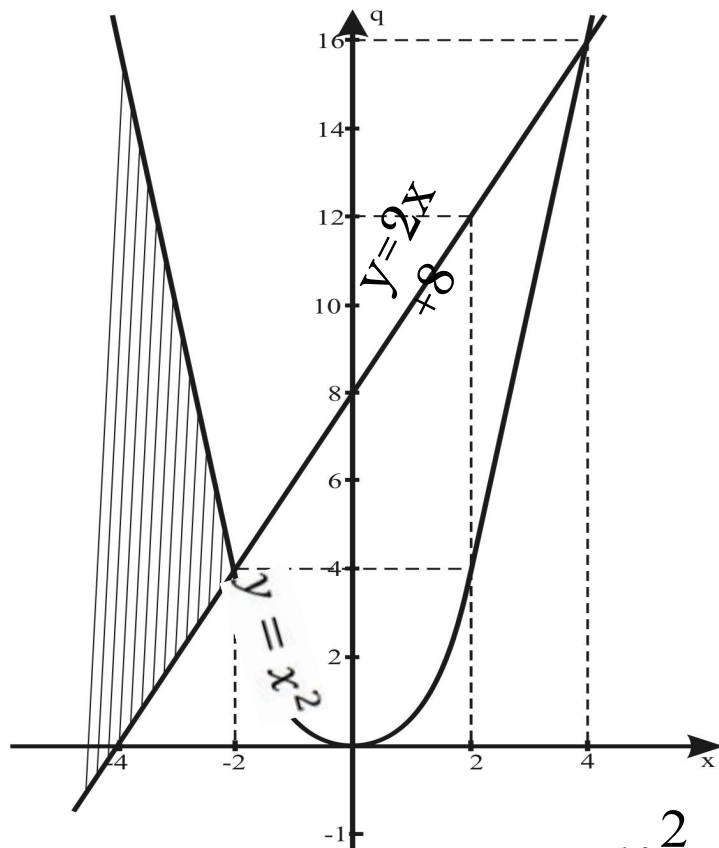
не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 4$

$$\begin{cases} x^2 - q > 0, \\ q - 2x - 8 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - q < 0, \\ q - 2x - 8 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q < x^2, \\ q > 2x + 8; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q > x^2, \\ q < 2x + 8; \end{cases}$$



$$x^2 \leq 4;$$

$$x \in [-2; 2];$$

$$-2 \leq x \leq 2;$$

$$q \leq 0;$$

$$q \geq 12;$$

Ответ: при $q \in (-\infty; 0] \cup [12; +\infty)$ исходное неравенство не содержит ни одного решения неравенства

$$x^2 \leq 4$$

Метод “Ромашки”

$f(x) > 0$ (соответственно $<$, $\leq$, $\geq$), где

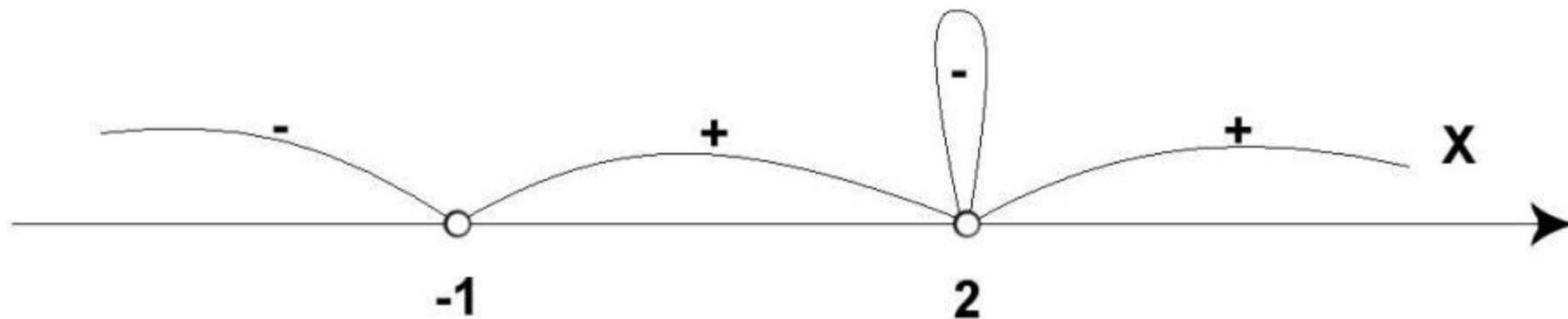
$$f(x) = \frac{(\kappa_1 x + a_1)^{n_1} (\kappa_2 x + a_2)^{n_2} \dots (\kappa_r x + a_r)^{n_r}}{(l_1 x + b_1)^{m_1} (l_2 x + b_2)^{m_2} \dots (l_p x + b_p)^{m_p}}$$

$n_1, n_2, \dots, n_r, m_1, m_2, \dots, m_p$ - натуральные числа

Пример: $(x + 1)(x - 2)^2 > 0$

Рассмотрим функцию $f(x) = (x+1)(x-2)(x-2)$

Нули функции: $x_1 = -1$, $x_2 = x_3 = 2$



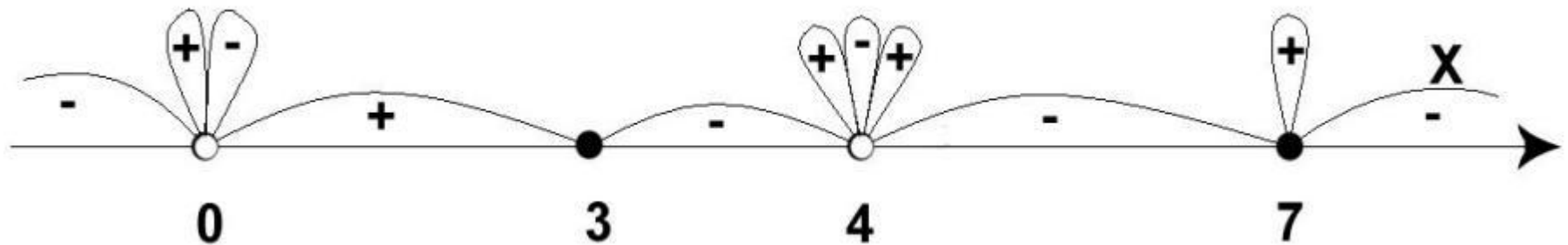
Ответ: $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Пример:
$$\frac{(3-x)(x-7)^2}{x^3(2x-8)^4} \geq 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{(3-x)(x-7)^2}{x^3(2x-8)^4}$

$x \neq 0$. $x \neq 4$

Нули функции: $x=3$, $x=7$



Ответ: $(0; 3] \cup \{7\}$.

Заключение

Мы поставили перед собой задачи:

- Изучить нестандартные методы решения уравнений и неравенств
- Научиться использовать их на практике
- Создать наглядную и понятную презентацию для ознакомительных целей
- Ознакомить класс с этими методами при помощи наглядных примеров
- Создать папку с материалами работы

Считаем, что намеченные нами цели достигнуты.

**Спасибо за
внимание!**