Тема урока: **Иррациональные уравнения**

Цель:

- Познакомиться с понятием «иррациональные уравнения» и некоторыми методами их решений.
- Развивать умение выделять главное в изучаемом материале, обобщать факты и понятия.

Найти область определения

I	Y=	$\sqrt{x-6}$	X ≥ 6
II	Y=	$\sqrt{\frac{7}{x}}$	X > 0
III	Y=	$\frac{1}{\sqrt{2+x}}$	X > -2
IV	Y=	$\sqrt{x}$	X ≥ 0

Из последнего промежутка найти наименьшее положительное целое число.

Является ли число x_0 корнем уравнения?

I	$\sqrt[3]{x} = -3$	$x_0 = 27$	нет
II	$\sqrt{x} - 5 = 1$	$x_0 = 36$	да
III	$\sqrt{x+1} - 2 = 0$	$x_0 = 8$	нет
IV	$2 = x^2$	$x_0 = \sqrt{2}$	да

- $\sqrt{2}$ - какое число?

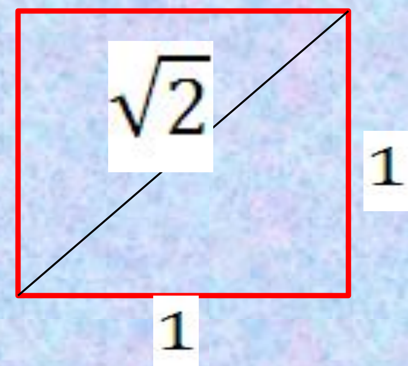
История иррационального числа

Термин «рациональное» (число) происходит от латиноамериканского слова ratio – отношение, которое является переводом греческого слова «логос» в отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых величин, были названы еще в древности иррациональными, т.е. нерациональными (по-гречески «алогос») правда, первоначально термин «рациональный» и «иррациональный» относились не к числам, а к соизмеримым и соответственно не соизмеримым величинам, которые пифагорейцы называли выразимыми и невыразимыми.

$$\sqrt{2}$$

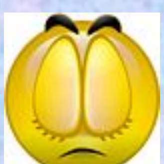
Удивительное открытие пифагорийцев.

Каким числом выражается длина диагонали квадрата со стороной **1**?



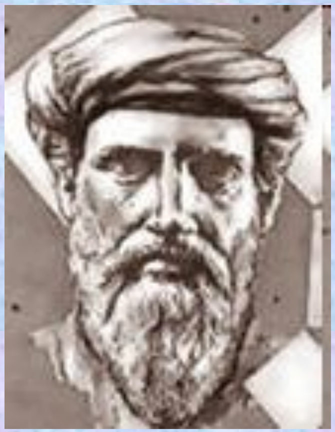
$\sqrt{2}$ – ?

- С латыни слово «irrationalis» означает «неразумный».
- «surdus» - «глухой» или «немой»



«ни высказать, ни

Симон Стевин



ал - Каши

Рене Декарт

Занимались иррациональными числами

Определение:

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**:

$$x + \sqrt{x} = 2 \qquad 3\sqrt{x+5} = x + 2$$

Какое уравнение является иррациональным ?

$\sqrt{x-1} = 3$	$\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$	$\sqrt{3}y - 4 = 5$
$y^2 + 3y\sqrt{2} = 4$	$\sqrt{6y} = 0$	$\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$
$x + \sqrt{x^2+9} = 2$	$\sqrt[3]{x-9} = -3$	$\sqrt{x} = x - 2$

Методы решения иррациональных уравнений:

1. Возведение обеих частей в степень.
2. Использование равносильных переходов.
3. Умножение левой части на сопряженное выражение.
4. Введение новой переменной.

1. Возведение обеих частей уравнения в степень

$$\sqrt{A} = B \rightarrow \quad A = B^2 \quad + \quad \text{Проверка корней}$$

(т.к. могут появиться лишние корни)

- При возведении в четную степень возможно расширение области определения заданного уравнения. Поэтому при решении таких иррациональных уравнений обязательна проверка.
- При возведении в нечетную степень обеих частей иррационального уравнения область определения не меняется.

пример

$\sqrt{x^2+2x+5} = \sqrt{x^2-3x+10}$ возводя обе части в квадрат, получаем

$x^2 + 2x + 5 = x^2 - 3x + 10$

$5x = 5$

$X = 1$

Проверка: $\sqrt{1+2+5} = \sqrt{1-3+10}$ верно Ответ: $x = 1$

2. Использование равносильных переходов.

$$\sqrt{A} = B \longrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$$

Пример:

$$\sqrt{2x-1} = x-2$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x-1 = (x-2)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

Ответ: $x = 5$

3. Умножение левой части на сопряженное выражение.

Если в левой части иррационального уравнения
сумма или разность корней, а подкоренное выражение –
линейная функция одинаковыми линейными коэффициентами,
а в правой части некоторое число, то левую и
правую части уравнения умножают на выражение,
сопряженное выражению в левой чисти ($\sqrt{a}$ + $\sqrt{в}$ и $\sqrt{a}$ - $\sqrt{в}$) -
сопряженные).

Пример:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4$$

$$\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\right)=4\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\right)$$

$$x+7-x+1=4\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\right)$$

$$4\left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\right)=8$$

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2$$

Тогда имеем $\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x+7}+\sqrt{x-1}=4\end{cases}$

$$2\sqrt{x+7}=6$$

$$\sqrt{x+7}=3$$

$$x+7=9 \qquad x=2$$

Проверка: $\sqrt{2+7}+\sqrt{2-1}=4$

$3+1=4$ верно Ответ: $x=2$

4. Введение новой переменной.

Решить уравнение: $(x^2 + 1) + 2\sqrt{x^2+1} = 15$

Введем новую переменную $\sqrt{x^2+1} = t, \quad t \geq 0$

$x^2 + 1 = t^2$, тогда

$t^2 + 2t = 15$

$t^2 + 2t - 15 = 0$ решая,

получим $t = -5 \quad \underline{t = 3}$

$\sqrt{x^2+1} = 3 \qquad x^2 + 1 = 9$

$x^2 = 8$

$x_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -\sqrt{8} = -2\sqrt{2}$

Ответ: $x_1 = 2\sqrt{2}$

$x_2 = -2\sqrt{2}$

Самостоятельная работа

I

$\sqrt{x+1} = x - 5$ 8

$\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$ ± 6

II

$\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ решений нет

$\sqrt[3]{x^2 - 8} = 2$ ± 4

III

$\sqrt{x^3 + 4x - 1 - 8\sqrt{x^4 - x}} = \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}$

1

Итоги урока

- Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются **иррациональными**.

- **При возведении обеих частей уравнения**
  - в **четную** степень (показатель корня – **четное** число) – возможно появление постороннего корня (**проверка необходима**).
  - в **нечетную** степень (показатель корня – **нечетное** число) – получается уравнение, равносильное исходному (**проверка не нужна**).

- **Решая иррациональные уравнения с помощью равносильных преобразований – проверка не нужна.**

Спасибо за внимание