

МАТЕМАТИКА



ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

Метод интервалов. Общий метод интервалов.

ЛЕКЦИЯ № 7

«Метод интервалов. Общий метод интервалов.»

**Литература С.М. Никольский
«Алгебра и начала
анализа: Учебник для 10
класса
общеобразовательных
учреждений» §2 п. 2.7 – 2.9.**

План

лекции:

- Рациональные неравенства**
- Метод интервалов**
- Общий метод интервалов**

Опреде

ние

Неравенство, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно x , называют рациональным неравенством с неизвестным

$$(5x + 1)(3 - 2x) < 0$$

$$\frac{(2x - 3)^4(7 - x)^3}{(2x - 1)^2(3 - x)} \geq 0$$

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \leq \frac{2}{x - 5} - 3$$

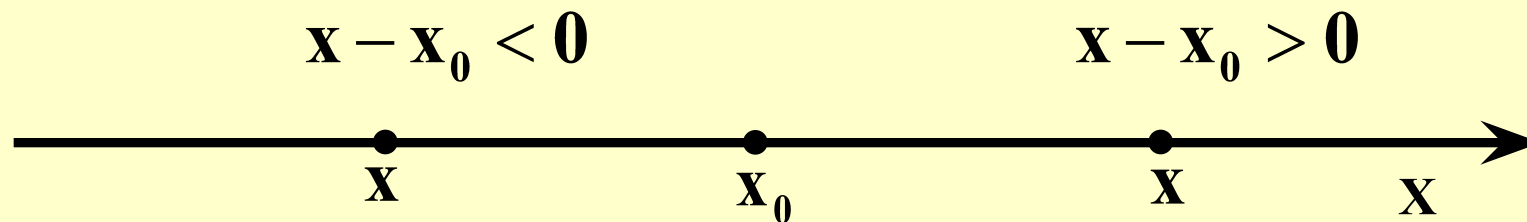
$$\frac{4x - 6}{5 - x} > 2$$

$$(x^2 - 1)^2(3 - 2x)^3(4 - x) < 0$$

Определе ние

Решением неравенства с неизвестным называют число, при подстановке которого в это неравенство вместо получается верное числовое неравенство.

Решить неравенство – значит найти все его решения или показать, что их нет.



Метод интервалов для решения
неравенств вида $A(x) > 0$ на следующем

$$A(x) < 0$$

утверждении.
Точка x_0 делит ось x на две части:

- 1) для любого x , находящегося справа от точки x_0 , двучлен $x - x_0$ положителен;
- 2) для любого x , находящегося слева от точки x_0 , двучлен $x - x_0$ отрицателен.

Пусть требуется решить

неравенство
 $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) > 0$

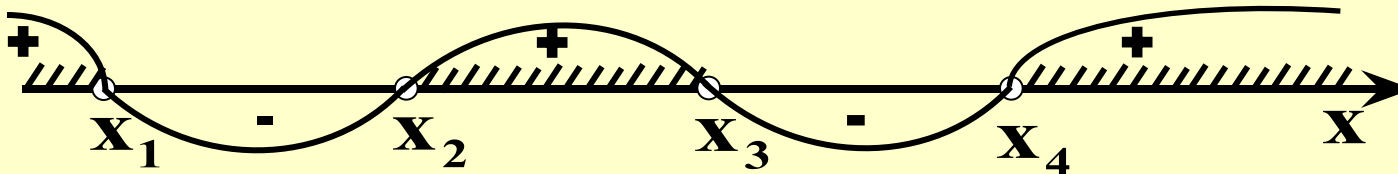
Не нарушая общности,

положим
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$

Тогда:

5). Аналогично рассуждая,

получим, что
 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) > 0$ для x интерва
 $(x_4; \infty)$, $(x_2; x_3)$, $(-\infty; x_1)$ **и** $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) < 0$
для x интерва $(x_3; x_4)$, $(x_1; x_2)$.



Замечани

Сами числа x_1, x_2, x_3, x_4 не являются решением неравенства $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) > 0$

Замечани

Множество решений неравенств вида $A(x) \geq 0$ и $A(x) \leq 0$ где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ есть объединение множества всех решений неравенств $A(x) > 0$ и $A(x) < 0$ и множества всех решений уравнения $A(x) = 0$.

Метод интервалов для решения неравенств вида

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) \leq 0 \quad A(x) \geq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

где

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_k$$

, то есть все x_k различны.

1. Привести рациональное неравенство к
одному из видов:

$$A(x) > 0, A(x) < 0, A(x) \geq 0, A(x) \leq 0$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n), \quad \text{где } n \geq 1, n \in \mathbb{N}.$$

2. Найти нули множителей, стоящих в левой части неравенства, и расположить их на оси O_x в соответствующем порядке.

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$A(x) < 0 \quad A(x) > 0 \quad A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

где

$$n \geq 1, n \in \mathbb{N} \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad x_k$$

то есть все

различны.

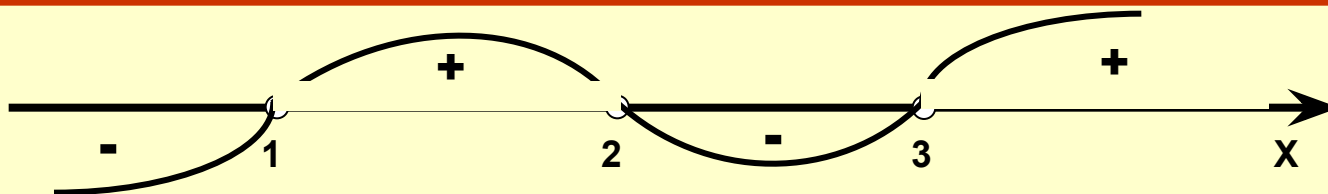
3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный.

Пример 1

Решение

Решить неравенство $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

Нули множителей: $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$



Ответ:

$$\begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 3. \end{cases}$$

Пример 2

Решение

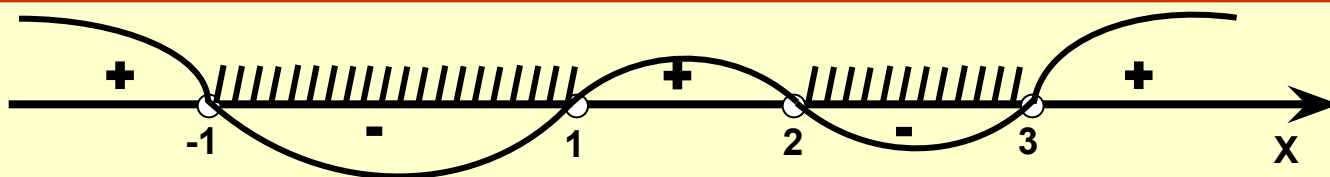
Решение

$$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0$$

$$(2-x)(x^2-4x+3)(x+1) > 0,$$

умножив неравенство на -1 и разложив квадратный трёхчлен на множители, получим неравенство равносильное данному

Нули множителей: $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$



Ответ: $-1 < x < 1,$
 $2 < x < 3.$

Пример 3

Решение

Решение

Решение

$$(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$$

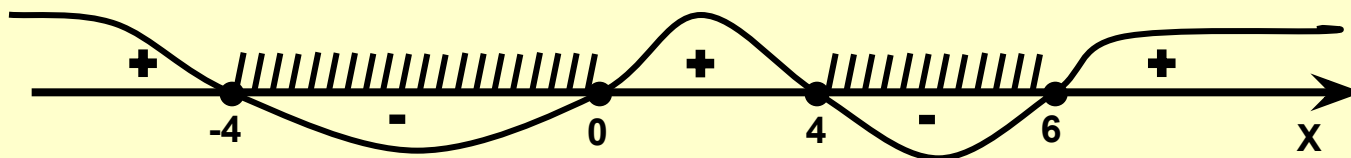
$$(x^2 - 6x)(16 - x^2) \geq 0$$

умножив неравенство на -1 и
разложив квадратные трёхчлены
на множители, получим

$$x(x-6)(x-4)(x+4) \leq 0$$

данному

Нули множителей: $x = -4$, $x = 0$, $x = 4$, $x = 6$



Ответ: $-4 \leq x \leq 0$,
 $4 \leq x \leq 6$.

Пример 4

Решить

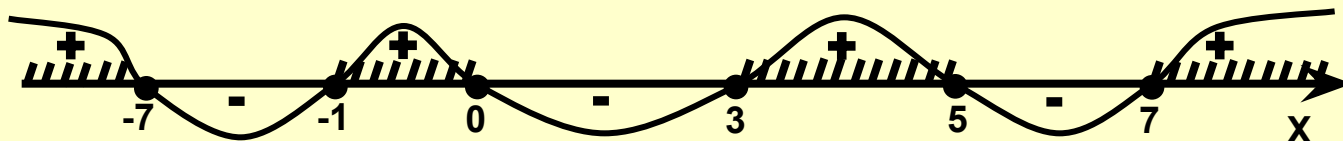
неравенство $(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$

Решение

$(x^2 - 2x - 3)(x^2 + x + 1)(49 - x^2)(5x - x^2) \geq 0$,
умножив неравенство 2 раза на -1 ,
разложив квадратные трёхчлены
на множители и учитывая, что $x^2 + x + 1 > 0$ при $x \in \mathbb{R}$,
получим неравенство
равносильное данному

$$(x - 3)(x + 1)(x - 7)(x + 7)x(x - 5) \geq 0$$

Нули множителей: $x = -7, x = -1, x = 0, x = 3, x = 5, x = 7$



Ответ:

$$\begin{aligned} &x \leq -7, \\ &-1 \leq x \leq 0, \\ &3 \leq x \leq 5, \\ &x \geq 7. \end{aligned}$$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, ,

где $A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

$x_1, x_2, \dots, x_n$,

если не все x_i различны

1. Привести рациональное неравенство к
одному из видов:

$A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$

, где

$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$, $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

$x_1, x_2, \dots, x_n$

если не все x_i различны, то

произведение одинаковых двучленов

записывают в виде степени этого двучлена

$A(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - x_n)^{k_n}$ $k_m \geq 1; k_m \in \mathbb{N}$

Общий метод интервалов для решения неравенств вида $A(x) > 0$, $A(x) < 0$, $A(x) \geq 0$, $A(x) \leq 0$, ,

где

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad ,$$

если не все x_i различны

3. Над промежутком справа от наибольшего нуля многочлена поставить знак «+», так как на этом промежутке все множители положительны. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной нуль, сменить знак на противоположный, если соответствующий этому нулю двучлен возведён в нечётную степень, и сохранить знак, если соответствующий этому нулю

двучлен возведён в чётную степень

Пример 1

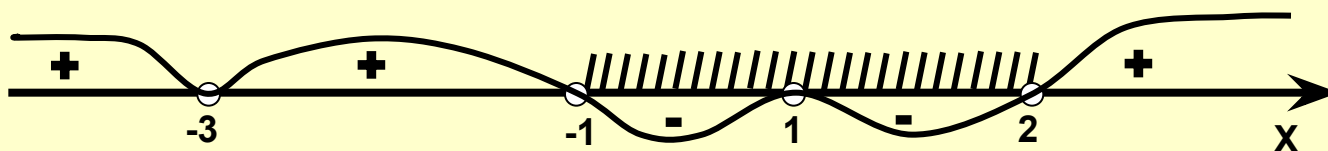
Решение

Решение

Решение

Решить неравенство $(x+3)^2(x+1)^3(x-1)^4(x-2) < 0$

Нули множителей: $x = -3$ $x = -1$ $x = 1$ $x = 2$



Ответ: $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 1 < x < 2. \end{cases}$

Пример 1

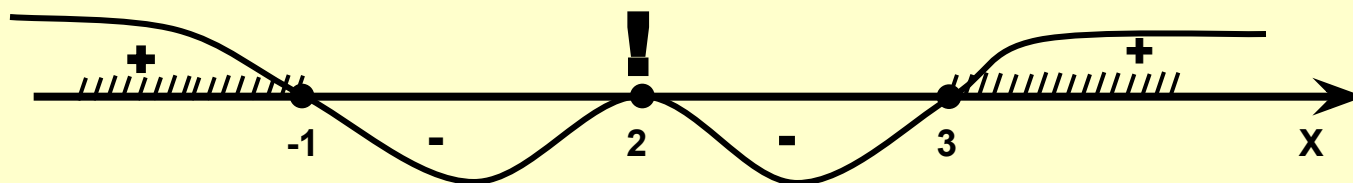
Решение

Решить неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0$

$$(x+1)(3-x)(x-2)^2 \leq 0,$$

$$(x+1)(x-3)(x-2)^2 \geq 0$$

Нули множителей: $x = -1$ $x = 2$ $x = 3$



Ответ: $\left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{array} \right.$

Метод интервалов для решения

неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \quad B(x)$$

и

, где

и

$$x - x_0$$

разлагаются в

Замечани разных двучленов

вида

Неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) > 0$

,

неравенство $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$ равносильно неравенству $A(x) \cdot B(x) < 0$

.

Пример 1

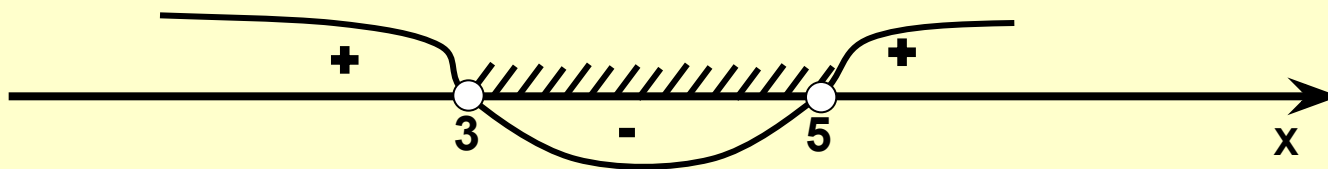
**Решить
неравенство**
 $\frac{x-3}{x-5} < 0$

Решение

$$\frac{x-3}{x-5} < 0,$$

$$(x-3)(x-5) < 0.$$

Нули множителей $x=3$ $x=5$



Ответ:
 $3 < x < 5.$

Пример 2

Решить

неравенство

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0$$

Решение

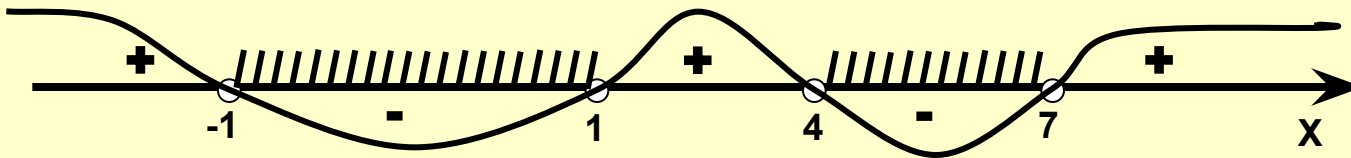
$$\frac{x^2 - 5x + 4}{-x^2 + 6x + 7} > 0,$$

умножив неравенство на -1 и разложив квадратные трёхчлены на множители, получим неравенство равносильное данному

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)} < 0.$$

$$(x-1)(x-4)(x+1)(x-7) < 0.$$

Нули множителей: $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$, $x = 7$



Ответ:

$$\begin{cases} -1 < x < 1, \\ 4 < x < 7. \end{cases}$$

Пример 3

**Решить
неравенство**
$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x}$$

Решение

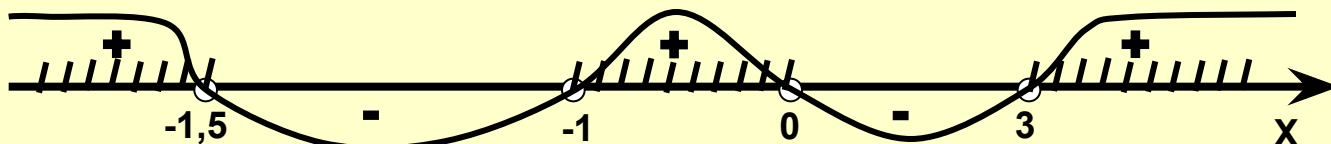
$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x},$$
$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0,$$

$$\frac{x^2 - (2x+3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(2x+3)} > 0,$$
$$\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)} > 0,$$

$$(x+1)(x-3)x(2x+3) > 0.$$

Нули множителей: $x = -1,5$ $x = -1$ $x = 0$ $x = 3$



Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} x < -1,5, \\ -1 < x < 0, \\ x > 3. \end{array} \right.$$

Метод интервалов для решения неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \quad A(x) \quad B(x)$$

и , где и

разлагаются в

произведения двучленов, где в

числителе и знаменателе дроби

Не нарушая общности положим, что

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

неравенство имеет

$$\frac{(x - x_1)^{k_1} (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0$$

вид

тогда его можно

представить в виде

$$\frac{(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x - x_1)^{k_1+k_2} (x - x'_2) \cdot \dots \cdot (x - x'_m)} > 0 .$$

Пример 1

Решить неравенство

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$$

Решение

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)},$$

$$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x(x-2) + 2(x+3) - 5x}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

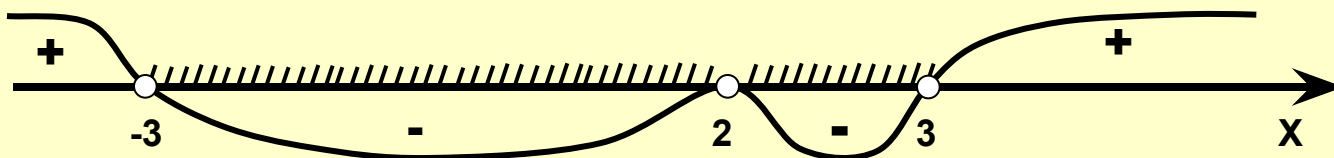
$$\frac{x^2 - 5x + 6}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x-2)} < 0,$$

$$\frac{x-3}{(x+3)(x-2)^2} < 0,$$

$$(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0.$$

Нули множителей: $x = -3$, $x = 2$, $x = 3$



Ответ:

$$\begin{cases} -3 < x < 2, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$

Замечани

е.

Множество решений неравенств вида

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$$

есть объединение множества

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

всех решений неравенств

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

и

множества всех решений уравнения

.

Приме

Решен

ие

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых

решений неравенства
$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2},$$

$$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0,$$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0,$$

$$\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0,$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

$$\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0,$$

Приме

Решен

це

(ЦТ 2000 г.) Найти число целых

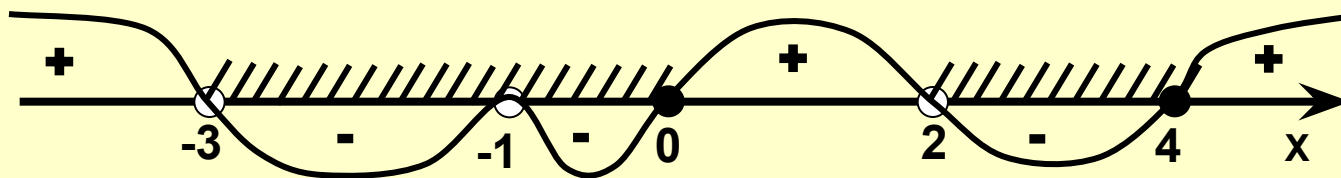
решений неравенства $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$

$$\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$$

$$\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0, \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$$

Нули числителя: $x = 0$, $x = 4$

Нули знаменателя: $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$



Итак

$$\begin{cases} -3 < x < -1, \\ -1 < x \leq 0, \\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Целые

$$x = -2; 0; 3; 4.$$

решения:

**Ответ: 4 целых
решения.**

Домашнее задание

- 1) Материал лекций 1 – 7.
- 2) Галицкий М.Л. «Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов» § 8 № 8.54в), г); 8.72; 8.90; 8.96.
- 3) Сборник для подготовки к ЦТ. Тема № 6.