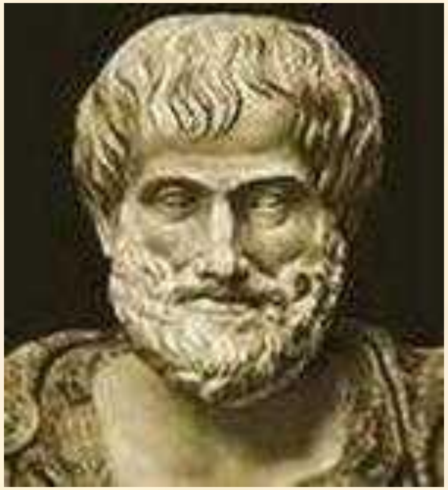
Логические основы вычислительной техники

Логика - наука о формах и способах мышления.

Основы логики были заложены работами ученого и философа **Аристотеля** (384 -322гг. до н.э.).



Он пытался первым найти ответ на вопрос «Как мы рассуждаем?», изучал правила мышления. Аристотель впервые дал систематическое изложение логики.

Он подверг анализу человеческое мышление, его **формы - понятие, суждение, умозаключение**.

Так возникла **формальная логика.**

Основные формы мышления:

Понятие – форма мышления, фиксирующая основные существенные признаки объекта.

Понятие имеет:

Содержание – совокупность существенных признаков объекта.

Объем – совокупность предметов, на которые оно распространяется.

Пример:

Содержание понятия **«Персональный компьютер»** - *«Персональный компьютер – это универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя»*

Объем понятия **«Персональный компьютер»** выражает всю совокупность существующих сейчас в мире персональных компьютеров.

Объем понятия может быть представлено в форме **множества объектов, состоящего из элементов множества**. *Алгебра множеств*, одна из основополагающих современных математических теорий, позволяет исследовать отношения между множествами и, соответственно, объемами понятий.

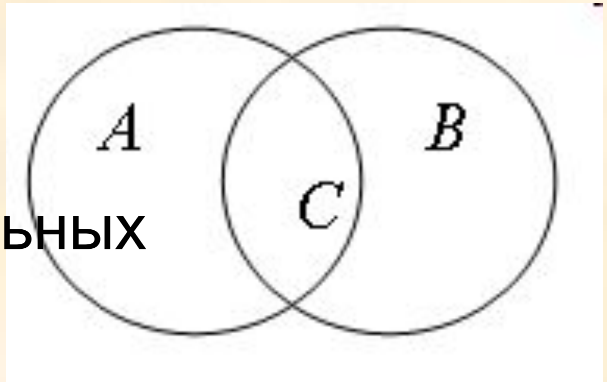
Между множествами (объемами понятий) могут быть различные виды отношений:

- **равнозначность**, когда объемы понятий полностью совпадают;
- **пересечение**, когда объемы понятий частично совпадают;
- **подчинения**, когда объем одного понятия полностью входит в объем другого и т.д.

Для наглядной геометрической иллюстрации объемов понятий и соотношений между ними используются **диаграммы Эйлера-Венна.**

Если имеются какие-либо понятия **A, B, C** и т.д., то объем каждого понятия (множество) можно представить в виде круга, а отношения между этими объемами (множествами) в виде пересекающихся кругов.

Пример 3.1. Отобразить с помощью **диаграммы Эйлера-Венна** соотношение между объемами понятий натуральные числа и четные числа.

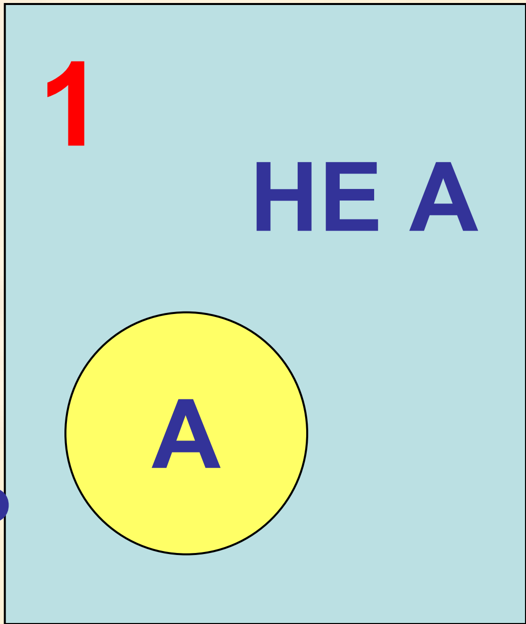


A ={**Натуральные числа** (целые положительные числа)}

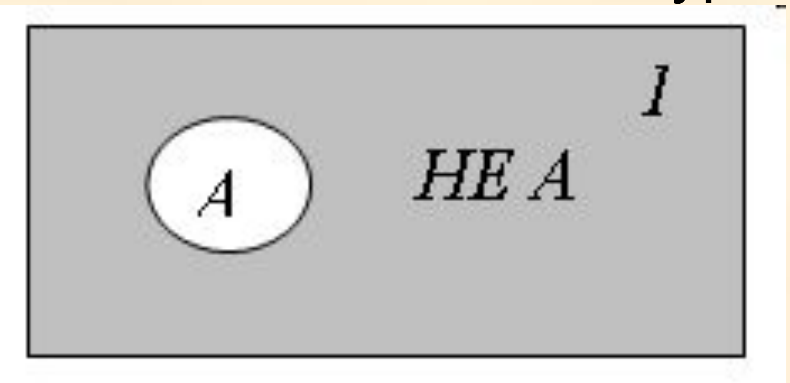
B ={**Четные числа** (множество отрицательных и положительных четных чисел)}

C ={**множество положительных четных чисел**}

Совокупность всех существующих множеств образует всеобщее универсальное множество 1, которое позволяет отобразить множество логически противоположное к заданному. Так, если задано множество **A**, то существует множество **НЕ A**, которое объединяет все объекты, не входящие во множество A. Множество **НЕ A дополняет множество A до универсального множества 1**.



Пример 3.2. Отобразить с помощью **диаграммы Эйлера-Венна** множество натуральных чисел **А** и множество **НЕ А**.



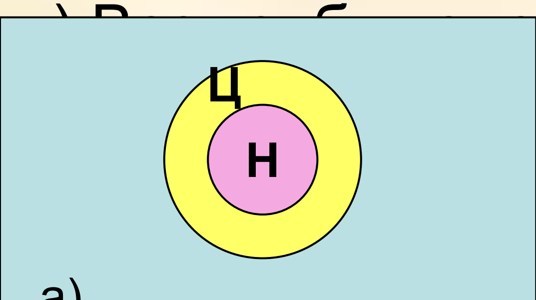
А= {множество натуральных чисел} – круг.
Универсальное множество **1** - прямоугольник,
Множество **НЕ А** - прямоугольник минус круг.

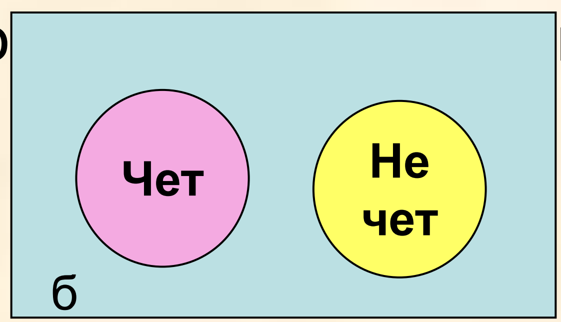
3.3. Отобразить с помощью диаграммы Эйлера-Венна соотношения между следующими объемами понятий:

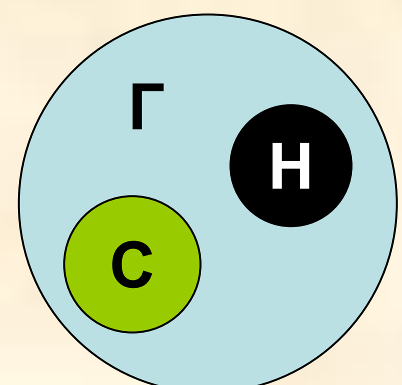
а) целые и натуральные числа;

б) четные и нечетные числа.

... до ... ые грибы







Высказывание - это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними. Высказывание может быть **истинно** или **ложно**.

Не являются высказываниями восклицательные и вопросительные предложения:

Уходя, гасите свет ***Принеси мне книгу***

Ты идешь в кино?

Высказывания делятся на:

1. **простые** ***2+8<5*** - ложно

Земля – планета Солнечной системы- истинно;

2. **составные** (истинность которых вычисляется с помощью алгебры высказываний)

“Все мышки и кошки с хвостами”

“Все мышки с хвостами” и “Все кошки с хвостами”

Умозаключение – форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение)

Пример:

«Все углы треугольника равны» (**посылка**), то **«Этот треугольник равносторонний»** (**заключение**)

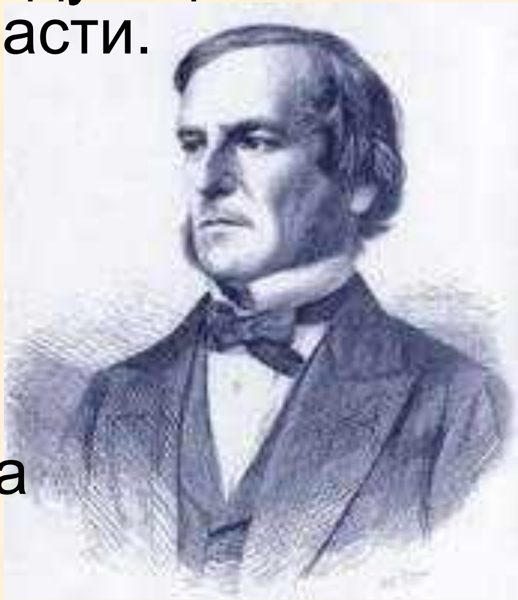
Посылками умозаключений по правилам формальной логики могут быть только истинные суждения, и тогда умозаключение будет истинным. В противном случае можно прийти к ложному умозаключению.

Вопросы для размышления

1. Какие существуют основные формы мышления?
2. В чем состоит разница между содержанием и объемом понятия?
3. Может ли быть высказывание выражено в форме вопросительного предложения?
4. Как вычисляется истинность или ложность простого высказывания? Составного высказывания?

Математическая логика

Немецкий ученый **Готфрид Лейбниц** (1646-1716) заложил основы **математической логики**. Он пытался построить первые логические исчисления (свести логику к математике), предложил использовать символы вместо слов обычного языка, поставил много задач по созданию символьной логики, его идеи оказали влияние на последующие работы ученых в этой области.



Англичанин **Джордж Буль** (1815-1864, математик-самоучка), на фундаменте, заложенном Лейбницем, создал новую область науки - ***Математическую логику*** (*Булеву алгебру* или *Алгебру высказываний*). В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику.

Алгебра логики (высказываний) работает с **высказываниями.**

Различают:

1. **Логические константы (логические утверждения)** – конкретные частные утверждения (**И/Л**)

{Аристотель - основоположник логики}
{На яблонях растут бананы}

2. **Логические переменные (предикаты)** – логические высказывания, значения которых меняются в зависимости от входящих в них переменных, обозначаются заглавными латинскими буквами **A, B, C, D, F,…**

A = **{Аристотель - основоположник логики}**

B = **{На яблонях растут бананы}.**

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному — 0. Таким образом, **A = 1, B = 0**.

3. Логические функции (логические формулы) – сложные логические выражения образованных из простых и связанных логическими операциямим **И, ИЛИ, НЕ** и др.)

Высказывание **“Все мышки и кошки с хвостами”** является сложным и состоит из двух простых высказываний.

A=“Все мышки с хвостами” и B=“Все кошки с хвостами”
Его можно записать в виде логической функции, значение которой истинно: **F(A,B)=A и B**

В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только ***ложно*** **(0**) или ***истинно*** **(1).**

Логические операции

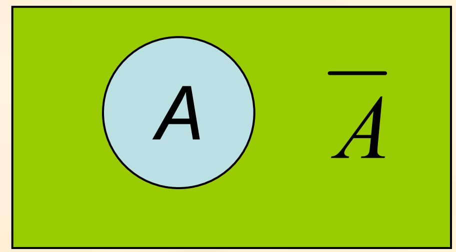
1. Отрицание (инверсия).

Обозначение: **НЕ А, ¬А,** $\overline{A}$

Таблица истинности:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна



А={Дети любят игрушки}

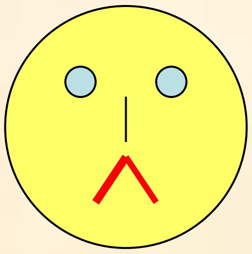
$\overline{A}$ = {Дети **НЕ** любят игрушки}

А={множество учеников 10 А класса}

$\overline{A}$= {множество учеников НЕ 10 А класса}

2. Логическое умножение (Конъюнкция)

Обозначение: И, ∧, &, •

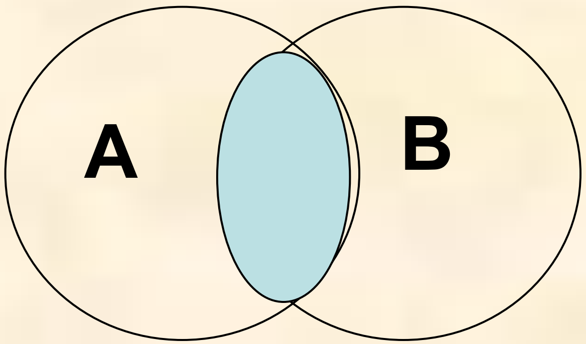


F= A ∧ B

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна

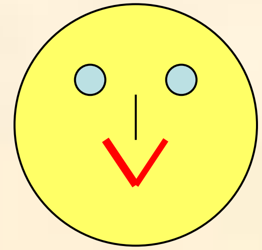


A={Множество обитателей моря}

B={Множество млекопитающих}

F=A ^ B= {кит, акула, дельфин}

3. Логическое сложение (Дизъюнкция)



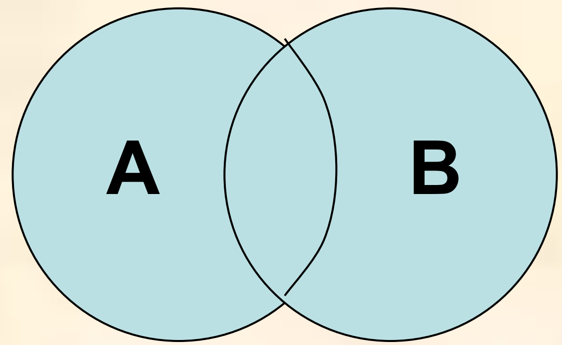
Обозначение: ИЛИ, $\vee$, +, |

F= A $\vee$ B

Таблица истинности:

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна



A={Множество учеников 10 А класса}

B={Множество учеников 10 Б класса}

F=A V B= {Множество учеников 10А или 10Б кл.}

4. ИМПЛИКАЦИЯ (логическое следование)

Обозначение: A→B, A⇒B

Таблица истинности:

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация - логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, **являющееся ложным тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложно.**

условие => следствие

ЕСЛИ, ... *ТО ...*

Если будет дождь, то мы не пойдем на улицу.

Если я поленюсь, то получу двойку.

Если на траве роса, то скоро настанет вечер.

5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ (равнозначность) -

логическая операция, ставящая в соответствие каждым двум простым высказываниям составное высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания одновременно истинны или одновременно ложны.

Обозначение: A~B, A↔B, A≡B, A=B

Таблица истинности:

A	B	A <=> B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Чайник греет воду тогда и только тогда, когда он включен.

Мы дышим свежим воздухом тогда и только тогда, когда гуляем в парке.

Приоритет логических операций:

1. () Операции в скобках
2. НЕ Отрицание
3. **И** логическое умножение
4. **ИЛИ** Логическое сложение
5. → Импликация
6. ↔ Эквивалентность

РЕШИМ ЗАДАЧИ:

Определите, в каком порядке необходимо вычислять значение логического выражения:

1) $\overset{1}{\neg} A \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} B$

2) $A \overset{2}{\&} (B \overset{1}{\&} C)$

3) $(A \overset{1}{\&} B) \overset{4}{\vee} (C \overset{3}{\&} \overset{2}{\neg} D)$

4) $A \overset{2}{\vee} \overset{1}{\neg} D \overset{3}{\vee} B$

5) $A \overset{3}{\rightarrow} (B \overset{2}{\leftrightarrow} \overset{1}{\neg} A)$

Вычисление логических выражений

Пример1.

Вычислить значение логического выражения

«(2·2=5 или 2·2=4}) и (2·2 ≠ 5 или 2·2 ≠ 4)»

Обозначим

A=«2·2=5» – ложно (0)

B=«2·2=4» – истинно (1)

Тогда **(A или B) и (** $\overline{A}$ **или** $\overline{B}$**)**

$$F = (A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = (0 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

Задание 2. Определите истинность составного высказывания

$\overline{(\overline{A} \& \overline{B})} \& (C \vee D)$ состоящего из простых высказываний:

A={Принтер – устройство вывода информации}

B={Процессор – устройство хранения информации}

C={Монитор – устройство вывода информации}

D={Клавиатура – устройство обработки информации}

Установим истинность простых высказываний:

A=1, B=0, C=1, D=0

Определяем истинность составного высказывания:

$$F = \overline{(\overline{A} \& \overline{B})} \& (C \vee D) =$$

$$\overline{(\overline{1} \& \overline{0})} \& (1 \vee 0) = \overline{(0 \& 1)} \& (1 \vee 0) = \overline{0} \& 1 = 0$$

Задание 3. Найти значения логического выражения:

1) $(1 \vee 1) \vee (1 \vee 0) =$ $1 \vee 1 = 1$

2) $(0 \,\&\, 1) \,\&\, 1 =$ $0 \,\&\, 1 = 0$

3) $((1 \vee 0) \,\&\, (1 \,\&\, 1)) \,\&\, (0 \vee 1) = (1 \,\&\, 1) \,\&\, 1 = 1 \,\&\, 1 = 1$

4) (0V1)→(1&1)= 1→1= 1

5) (1&1V0)↔(¬1&1)= 1↔0 = 0

6) ¬((1→0)↔(1&1)V1)= ¬(0↔1)= ¬0= 1

ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ ПО ЛОГИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ

Таблицу, показывающую, какие значения принимает сложное высказывание при всех сочетаниях значений входящих в него простых высказываний (переменных), называют таблицей истинности сложного высказывания (логической формулы).

По формуле логической функции легко рассчитать ее *таблицу истинности*, соблюдая *приоритет логических операций* и действия в скобках

Пример. Построим таблицу истинности следующей функции:

Порядок действий:

$$F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$$

1. **Количество строк в таблице $Q=2^n$**, где n - количество переменных (аргументов), здесь n = 3 (A, B, C) и тогда **$Q=2^3=8$**
2. **Количество столбцов = число переменных + число операций** (здесь 3+3=6 столбцов)
3. **Выписать наборы входных переменных**. Это удобнее сделать так:

a) разделить колонку значений первой переменной пополам и заполнить верхнюю половину 0, нижнюю половину 1.

b) разделить колонку значений второй переменной на 4 части и заполнить каждую четверть чередующимися группами 0 и 1 , начиная опять с группы 0.

c) продолжить деление колонок значений последующих переменных на 8, 16 и т.д. частей и заполнение их группами из 0 или 1 до тех пор, пока группы 0 и 1 не будут состоять из одного символа. (Можно заполнять все колонки, начиная с группы единиц.)

4. **Провести заполнение таблицы истинности** по столбикам, выполняя логические операции.

Построим таблицу истинности для следующей функции: $F(A,B,C) = A \vee (\overline{C} \wedge B)$

A	B	C	$\overline{C}$	$\overline{C} \wedge B$	$A \vee (\overline{C} \wedge B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

Задание. Построить таблицу истинности для следующих функций:

1) $F = \overline{A} \vee B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

2) $F = \overline{A} \wedge B$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \wedge B$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	0

3) $F = (\overline{A \vee B})$

A	B	$A \vee B$	$\overline{(A \vee B)}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Равносильные логические выражения

Логические выражения, у которых последние столбцы в таблице истинности совпадают, называются *равносильными*.

Знак «**=**» - равносильность.

Пример 1. Доказать равносильность логических выражений:

$\overline{A} \wedge \overline{B}$ и $\overline{A \vee B}$

Таблица истинности $\overline{A} \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
0	0	1	1	**1**
0	1	1	0	**0**
1	0	0	1	**0**
1	1	0	0	**0**

Таблица истинности $\overline{A \vee B}$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A \vee B}$
0	0	0	**1**
0	1	1	**0**
1	0	1	**0**
1	1	1	**0**

Следовательно, $\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A \vee B}$

№ 3.2. (Д.р.) Записать составное выражение «**(2·2=4 и 3·3=9) или (2·2≠4 и 3·3≠9)**» в форме логического выражения . Построить **ТИ.**

А =«**2·2=4**» - 1 В = «**3·3=9**» - 1. Тогда

$$F = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B}) = \ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 1 \vee 0 = 1$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A} \wedge \overline{B}$	F
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0

№ 3.3.(Д.р.) Доказать, используя ТИ, равносильность логических выражений:

$$\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \text{ и } A \wedge B$$

Таблица истинности $\overline{A} \wedge \overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	0	1	**0**
1	0	0	1	1	**0**
1	1	0	0	0	**1**

Таблица истинности $A \wedge B$

A	**B**	**A&B**
0	0	**0**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

Следовательно, $\overline{\overline{A} \vee \overline{B}} = A \wedge B$

1. Что содержат таблицы истинности?
2. Какие логические выражения называются равносильными?

Логической (булевой) функцией называют функцию

$F(X_1, X_2, ..., X_n)$, аргументы которой $X_1, X_2, ..., X_n$ (независимые переменные) и сама функция (зависимая переменная) принимают значения 0 или 1.

Таблицу, показывающую, какие значения принимает логическая функция при всех сочетаниях значений ее аргументов, называют таблицей истинности логической функции. Таблица истинности логической функции n аргументов содержит **2^n строк**, **n столбцов значений аргументов** и **1 столбец значений функции**.

Логические функции могут быть заданы **табличным способом** или **аналитически** — в виде соответствующих формул.

Если логическая функция **представлена с помощью дизъюнкций, конъюнкций и инверсий**, то такая форма представления называется **нормальной**.

Каждая логическая функция двух переменных имеет 4 возможных набора значений, то существует 16 различных логических функций от двух переменных: **$N=2^4=16$**

Таблица. **Логические функции двух переменных**

Аргументы		Логические функции															
			$\cdot$						$+$			$\overline{Y}$		$\overline{X}$			
X	***Y***	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Пример 3.10. По имеющимся таблицам истинности выразите через базовые логические функции (конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание) следующие функции:

а) $F9(X, Y)$

б) $F15(X, Y)$

Из таблицы истинности видно, что

$F9(X, Y) = \overline{F_8(X,Y)}$ (отрицание дизъюнкции).

$F15(X, Y) = \overline{F_2(X,Y)}$ (отрицание конъюнкции).

Вопросы для размышления

1. Какое количество логических функций двух аргументов существует и почему?

Ответ: N= 2^4=16 , т.к. каждая логическая функция двух аргументов имеет 4 возможных наборов значений.

2. Какие логические функции двух аргументов имеют свои названия?

Ответ: Инверсия, конъюнкция, дизъюнкция

3. Какое существует количество логических функций трех аргументов?

Ответ: N= 2^8=256 , т.к. каждая логическая функция двух аргументов имеет 8 возможных наборов значений.

В алгебре высказываний все логические операции могут быт сведены к трем базовым: **логическому умножению, логическому сложению, логическому отрицанию.**

Пример. Доказать методом сравнения ТИ, что $A \to B = \overline{A} \vee B$

A	B	A => B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	1	0	**1**

№ 3.4. Доказать, пользуясь ТИ, что операция эквивалентности равносильна выражению

$$A \sim B = (A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$$

A	B	A~B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee \overline{B}$	$\overline{A} \vee B$	$(A \vee \overline{B}) \& (\overline{A} \vee B)$
0	0	**1**	1	1	1	1	**1**
0	1	**0**	1	0	0	1	**0**
1	0	**0**	0	1	1	0	**0**
1	1	**1**	0	0	1	1	**1**

Задание. Перевести высказывания на язык алгебры логики:

1. Зимой холодно и морозно, а также дует ветер

A=«Зимой холодно» **B**=«Зимой морозно» **C**=«Зимой дует ветер

Ответ: A&B&C

2. Если идет дождь, а у меня нет зонта, то я промокну

A=«идет дождь» **B**=«у меня есть зонт» **C**=«я промокну»

Ответ: (**A&¬B**)→**C**

3. Неверно, что если погода пасмурная, то идет дождь тогда и только тогда, когда не дует ветер

A=«погода пасмурная» **B**=«идет дождь» **C**=«дует ветер»

Ответ: ¬(**A** → (**B**↔ **¬C**))

Законы алгебры логики и свойства логических операций

используются для упрощения логических выражений

(минимизации логических функций)

$$A \wedge \overline{A} = 0$$
$$A \wedge A = A$$
$$A \wedge 1 = A$$
$$A \wedge 0 = 0$$

$$A \vee \overline{A} = 1$$
$$A \vee A = A$$
$$A \vee 1 = 1$$
$$A \vee 0 = A$$

Формулы склеивания:

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) = A$$
$$(A \vee B) \wedge (A \vee \overline{B}) = A$$

Законы инверсии (де Моргана):

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$
$$\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Формулы поглощения:

$$A \vee (A \wedge B) = A$$
$$A \wedge (A \vee B) = A$$
$$A \vee (\overline{A} \wedge B) = A \vee B$$
$$A \wedge (\overline{A} \vee B) = A \wedge B$$

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Закон двойного отрицания:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Переместительный закон:

$$A \vee B = B \vee A$$
$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$\overline{(A \to B)} = \overline{A} \,\&\, \overline{B}$$
$$A \to B = \overline{A} \vee B$$

Сочетательный закон:

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$A \leftrightarrow B = (A \,\&\, B) \vee (\overline{A} \,\&\, \overline{B})$$
$$= (\overline{A} \vee B) \,\&\, (A \vee \overline{B})$$

$$\overline{A} \,\&\, (A \vee B) = \overline{A} \,\&\, B$$

$$A \vee (\overline{A} \,\&\, B) = A \vee B$$

№1. Упростить логические выражения:

1. $$F = (x \vee z) \wedge (x \vee \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee z) = \quad x \wedge (\bar{y} \vee z)$$

Здесь для первых двух скобок применена формула склеивания

2. $$F(A,B,C) = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) =$$
$$(A \wedge B) \wedge (C \vee \overline{C}) = \quad A \wedge B \wedge 1 = A \wedge B$$

№ 3.6. a) (Av¬A)&B= 1&B=B

b) (A&(AvB)&(Bv¬B)= A&(AvB)&1=A&(A&B)

№3.5. Доказать справедливость законов де Моргана:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \,\&\, \overline{B} \qquad \overline{A \,\&\, B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	AvB	$\overline{A \vee B}$	$\overline{A} \,\&\, \overline{B}$	A&B	$\overline{A \,\&\, B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Решение логических задач

Способы решения:

1. Табличный
2. Графический (Графы)
3. Средствами алгебры логики

№1. Мастер спорта Седов, кандидат в мастера Чернов, перворазрядник Рыжов встретились в клубе перед началом турнира. «Обратите внимание» - заметил черноволосый – «один из нас седой, другой рыжий, а третий черноволосый. Но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии. Забавно, не правда ли? «Ты прав» - подтвердил мастер. Какого цвета волосы у кандидата и мастера?

1. Табличный

	С	Ч	Р
Седов (м)	-	-	+
Чернов (к.м.)	+	-	-
Рыжов (1 р.)	-	+	-

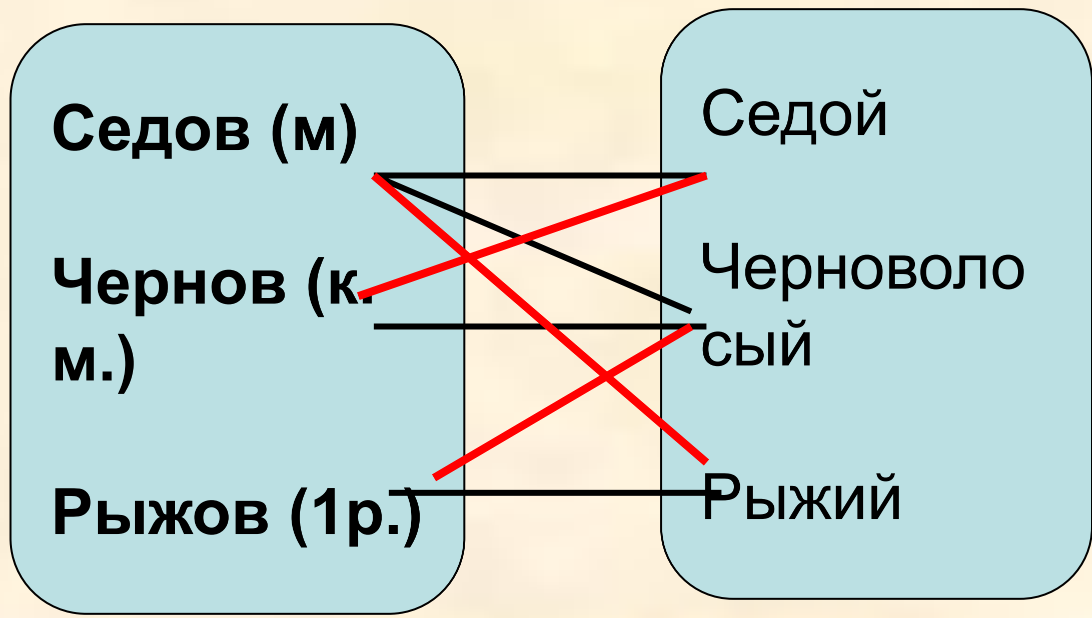
Ответ:

Седов рыжий

Чернов седой

Рыжов черноволосый

2. Графический



Решение задач средствами алгебры логики

Алгоритм:

1. Изучить условие задачи.
2. Выделить простые условия и обозначить их буквами.
3. Записать условия на языке алгебры логики.
4. Составить конечную формулу, для этого:
   - объединить логическим умножением формулы каждого утверждения,
   - приравнять произведение к 1.
5. Упростить формулу, проанализировать полученные результаты, **или** составить таблицу истинности, найти по ТИ значения переменных, для которых F=1, проанализировать результаты.

3. Средствами алгебры логики

Выделим простые условия:

A=«Седов черноволосый»

B=«Седов рыжий»

C=«Чернов седой»

D=«Чернов рыжий»

E=«Рыжов черноволосый»

F=«Рыжов седой»

Тогда:

AvB=1

CvD=1

EvF=1

НЕ A=1

Но,

AB=0

CD=0

EF=0

AE=0

BD=0

CF=0

Составим логическое выражение:

(AvB)&(CvD)&(EvF)&¬A =1

Упростим:

(AvB)&(CvD)&(EvF)&¬A=

((A+B)·(C+D)) ·(E+F) ·¬A=

(AC+AD+BC+**BD**) ·(E+F) ·¬A=

(ACE+ADE+BCE+ACF+ADF+BCF) ·¬A

=(BCE+ADF) ·¬A =

BCE ·¬A + ADF ·¬A

BCE ·¬A =1 Следовательно,

Ответ:

B=1, Седов рыжий

C=1, Чернов седой

E=1, Рыжов черноволосый

№2. В каждой из двух аудиторий может находиться либо каб. Информатики, либо каб. Физики. Таблички: на первой - «По крайне мере в одной из аудиторий размещается кабинет информатики», на второй - «Кабинет физики находится в другой аудитории». Известно, что надписи либо обе Истинны, либо обе Ложны. Найдите кабинет информатики.

Решение.

A=«В 1-ой ауд. каб. Информатики»

B=«Во 2-ой ауд. каб. Информатики»

$\overline{A}$ =«В 1-ой ауд. каб. Физики»

$\overline{B}$ =«Во 2-ой ауд. каб. Физики»

1) X=(AvB)
2) Y=Не A

$$(X \& Y) \vee (\overline{X} \& \overline{Y}) = 1$$

$$(X \& Y) \& \overline{Y} = ((A \vee B) \& \overline{A}) \vee (\overline{(A \vee B)} \& \overline{\overline{A}}) =$$

$$((A + B) \cdot \overline{A}) + (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot A) = (A\overline{A} + B\overline{A}) + (0 \cdot \overline{B}) = B \& \overline{A} = 1$$

Сл-но, B=1 и $\overline{A} = 1$ **Ответ: «В 1-ой ауд. каб. Физики»**

«Во 2-ой ауд. каб. Информатики»

№3. В школьном первенстве по настольному теннису в четверку лучших вошли девушки: Наташа, Маша, Люда и Рита. Самые горячие болельщики высказали свои предположения о распределении мест в дальнейших состязаниях.

Один считает, что первой будет Наташа, а Маша будет второй.

Другой болельщик на второе место прочит Люду, а Рита, по его мнению, займет четвертое место.

Третий любитель тенниса с ними не согласился. Он считает, что Рита займет третье место, а Наташа будет второй.

Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов.

Какое место на чемпионате заняли Наташа, Маша, Люда, Рита?

(В ответе перечислите подряд без пробелов числа, соответствующие местам девочек в указанном порядке имен.)

Решение:

A=«Наташа 1 м.»

B=«Маша 2 м.»

C=«Люда 2м.»

D=«Рита 4 м.»

E=«Рита 3м.»

F=«Наташа 2 м.»

AvB=1, CvD=1, EvF=1

(AvB)&(CvD)&(EvF)=1

Но,
A&F=0
B&C=0
B&F=0
C&F=0
D&E=0

(AvB)&(CvD)&(EvF)=

((A+B)(C+D))(E+F)=

(AC+AD+BC+BD)(E+F)=

(AC+AD+BD)(E+F)=

ACE+ADE+BDE+ACF+ADF+BDF=**ACE=1**

A=1,C=1,E=1

1м –Наташа

2м – Люда

3м – Рита

4м - Маша

О: 1423

№4. Три школьника, Миша (М), Коля (К) и Сергей (С), остававшиеся в классе на перемене, были вызваны к директору по поводу разбитого в это время окна в кабинете. На вопрос директора о том, кто это сделал, мальчики ответили следующее:

Миша: «Я не бил окно, и Коля тоже…»

Коля: «Миша не разбивал окно, это Сергей разбил футбольным мячом!»

Сергей: «Я не делал этого, стекло разбил Миша».

Стало известно, что один из ребят сказал чистую правду, второй в одной части заявления соврал, а другое его высказывание истинно, а третий оба факта исказил. Зная это, директор смог докопаться до истины.

Кто разбил стекло в классе? В ответе запишите только первую букву имени.

Решение:

A=«Миша разбил»

B=«Коля разбил»

C=«Сергей разбил»

$$(\overline{A}\cdot\overline{B})=1$$

$$(\overline{A}\vee C)=1..(\overline{C}\vee A)=0$$

$$(\overline{A}\vee\overline{B})\&(\overline{A}\vee C)\&(\overline{C}\vee A)=1$$

$$(\overline{A}+\overline{B})(\overline{A}+C)(\overline{C}=A)=$$

$$(\overline{A}\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot C+\overline{B}\cdot\overline{A}+\overline{B}\cdot C)(\overline{C}+A)=$$

$$(\overline{A}+\overline{A}\cdot C+1+\overline{B}\cdot C)(\overline{C}+A)=$$

$$(\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{A}\cdot C\cdot\overline{C}+1\cdot C+\overline{B}\cdot C\cdot\overline{C})=$$

$$\overline{A}\cdot\overline{C}+\overline{C}=\overline{C}(\overline{A}+1)=1$$

$$\overline{C}=1\ldots\overline{A}+1=1\ldots\overline{A}=0\ldots A=1$$

Ответ: М - Миша разбил

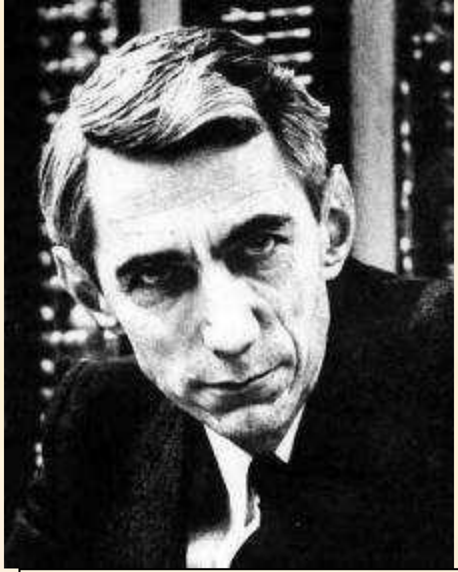
Логические основы устройства компьютера

Двоичная система оказалась удобной в качестве языка логики. Это поняли спустя 100 лет после работ Буля.

(1839 - 1914)

С 1886 г. американский логик **Чарльз Сандерс Пирс** (в честь его названа логическая операция – «стрелка Пирса») работает над модификацией и расширением булевой алгебры. Пирс первый осознал, что бинарная логика имеет сходство с работой электрических переключательных схем. Электрический переключатель либо пропускает ток (истина), либо не пропускает (ложь). Пирс даже придумал простую электрическую логическую схему, но так и не собрал ее.

Американец **Клод Шеннон** – основоположник теории информации, разработчик теоретических основ вычислительной техники, математик и специалист по электронике ***раскрыл связи между двоичным кодированием, алгеброй логики и электрическими схемами (релейными), т.е. наполнил логические выражения физическим смыслом, создал алгебру релейных схем, на которой основана теория бесконтактных логических элементов.***



1916 – 2001гг.

Принципы работы вычислительных машин в своей основе просты.

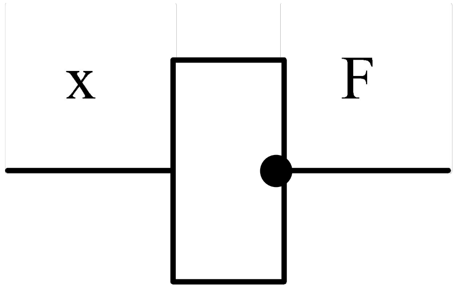
Работа ЭВМ состоит в операциях над числами и символами, закодированными двумя цифрами – 0 и 1, и пересылке этой информации по линиям связи. А работа всех устройств ЭВМ заключается в операциях над этими последовательностями из 0 и 1

Средством обработки двоичных сигналов в ЭВМ являются логические элементы.
Для реализации любых логических операций над двоичными сигналами достаточно элементов **трех типов** – элементов, реализующих три основные логические операции: **И, ИЛИ, НЕ.**

Логические элементы - это электронные схемы с одним или несколькими входами и одним выходом, через которые проходят электрические сигналы, представляющие цифры 0 и 1.

Основные логические элементы (вентили):

1. Элемент НЕ (инвертор)



Функция:

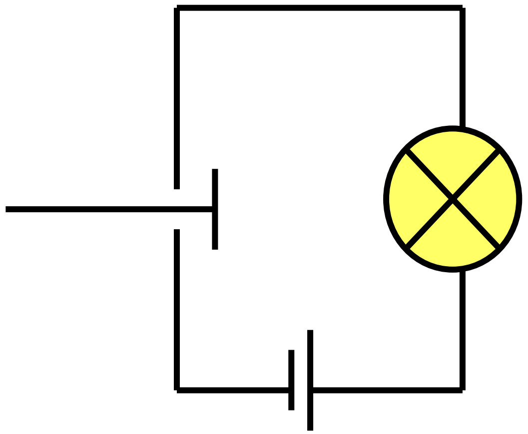
F= не X

$$F = \overline{x}$$

Таблица истинности:

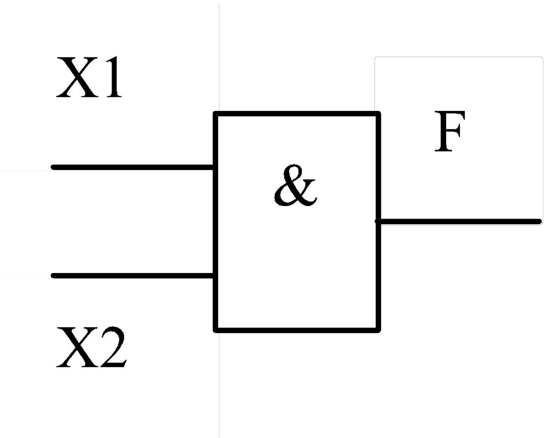
X	F
0	1
1	0

У инвертора один вход и один выход. Сигнал на выходе **F** появится тогда, когда на входе его нет, и наоборот.



Лампочка горит, если выключатель не включен

2. Элемент И Конъюнктор (логическое умножение)



Функция:

F= x1 **и** x2

F= x1 ∧ x2

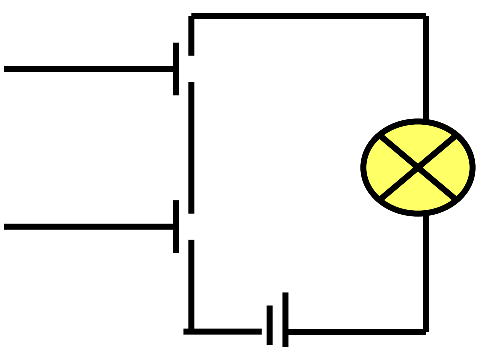
F= x1 · x2

F= x1 & x2

Таблица истинности:

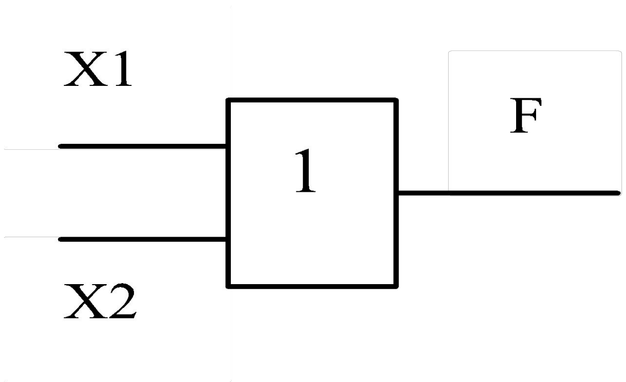
x1	**x2**	**F**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Элемент **И** имеет не менее двух входов и один выход. X1,X2 - входные сигналы, F – выходной сигнал.
Логика элемента И заключается в том, что на его выходе F будет сформирован сигнал 1 тогда и только тогда, когда на каждом из его входов будет сигнал 1.



Лампочка горит тогда и только тогда, когда включены оба выключателя

3.Элемент ИЛИ (Дизъюнкция, логическое сложение)



Функция:

F= x1 **или** x2

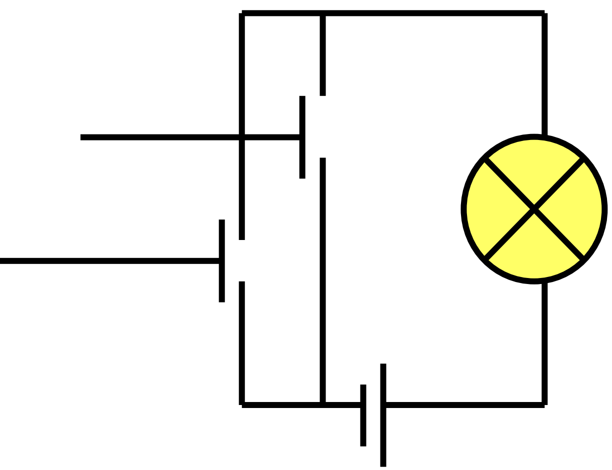
F= x1 **v** x2

F= x1 + x2

Таблица истинности:

x1	**x2**	**F**
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

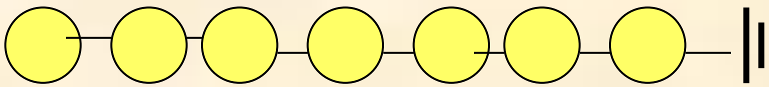
Имеет не менее двух входов и один выход. Сигнал 0 на выходе F элемента ИЛИ появится только в том случае, если сигнал 1 не поступил ни на один из входов.



Лампочка горит, если включен хотя бы один выключатель

Примеры:

1. В старых елочных гирляндах лампочки включались последовательно. Гирлянда работала тогда и только тогда, когда все лампочки были исправны. На какую логическую операцию это похоже?



Логическое умножение: F=A&B&C&D

2. В современных гирляндах лампочки подключены параллельно. На какую логическую операцию это похоже?

Логическое сложение: F=AvBvCvD

3. Выключатель. Если свет не горел, то его включают, если горел – выключают. **Инверсия**

В роли “элементарной частицы” в ЭВМ всегда выступает разновидность выключателя. И если правильно соединить очень много выключателей и поставить очень много людей, которые будут ими щелкать в нужный момент, то получится вычислительная машина.

С помощью логических элементов **НЕ, И, ИЛИ** можно реализовать (собрать как из конструктора) типовые функциональные узлы (блоки) ЭВМ:

- ***триггеры***
- ***сумматоры***
- ***шифраторы***
- ***регистры***
- ***счетчики***
- ***дешифраторы***

Чтобы понять, как работает интересующее нас устройство, необходимо понять логику его работы, т.е. найти соответствие между входными и выходными сигналами, **для этого:**

- ✓ **составить таблицу истинности**
- ✓ **по таблице записать логическую функцию**
- ✓ **построить логическую схему**

ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И СХЕМ ПО ЗАДАННОЙ ТАБЛИЦЕ :

I. Выписывается таблица истинности функции.

II. По данной таблице определяется логическая функция (формула) с помощью следующего метода, называемого **дизъюнктивная совершенная нормальная форма (ДСНФ):**

1. В заданной таблице выбираются наборы переменных, при которых значения функции равно 1.
2. Для каждого такого набора записываются конъюнкции ($\wedge$) всех входных переменных, имеющие значение 1. При этом те переменные, которые имеют значение 0, записываются с отрицанием.
3. Все полученные конъюнкции объединяются знаками дизъюнкции ($\vee$). Это и будет искомая логическая функция, которую можно будет упростить (минимизировать) по законам Булевой алгебры.

III. По упрощенной логической функции строится логическая схема

Пример. По заданной таблице истинности записать логическую функцию, упростить ее и построить логическую схему.

x	y	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{x} \wedge \overline{y}$$
$$\overline{x} \wedge y$$
$$x \wedge \overline{y}$$

1. Запишем **конъюнкцию** для каждой строки, где значение функции = **1**. Переменные, значения которых равны **0**, запишем с отрицанием.

2. Объединив полученные конъюнкции дизъюнкцией, получим следующую логическую функцию.

$$F = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y})$$

3. Упростим: $F = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y}) = \overline{X} \vee (X \wedge \overline{Y})$

4. По полученной функции построим логическую схему:

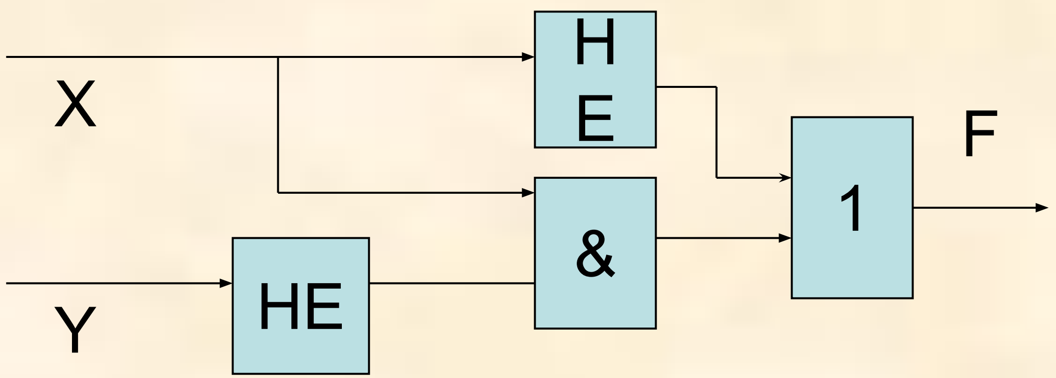
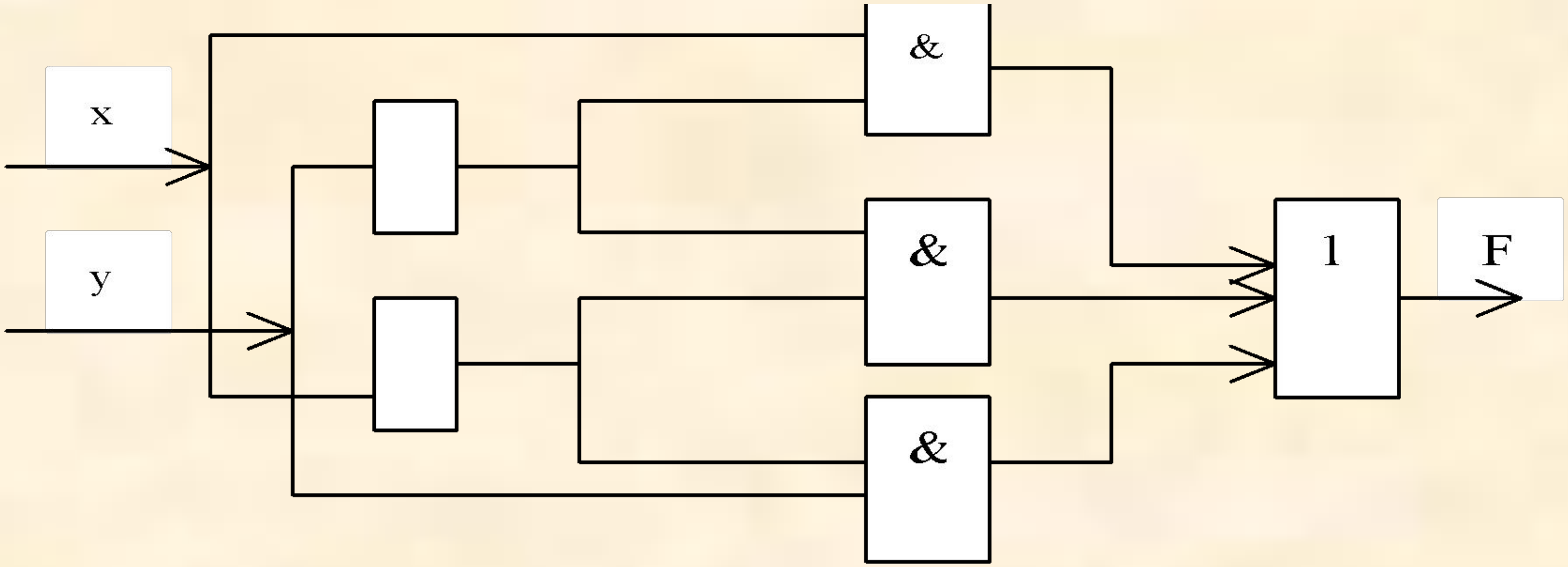


Схема по не упрощенной логической функции

$$F = (\overline{X} \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y) \vee (X \wedge \overline{Y})$$



3. Составить схему, работа которой задана таблицей истинности:

A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

а) Составим логическую формулу схемы:

$$F = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C)$$

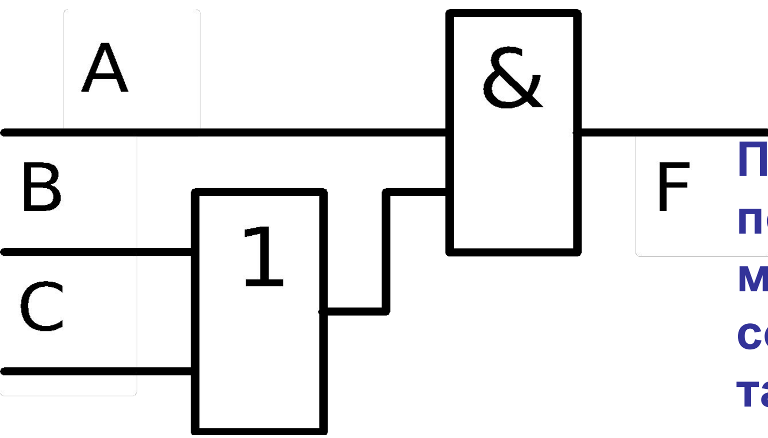
б) Упростим полученную формулу:

$$F = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge B \wedge C) =$$

$$(A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (C \wedge \overline{C}) = (A \wedge \overline{B} \wedge C) \vee (A \wedge B) =$$

$$A \wedge (B \vee (\overline{B} \wedge C) = A \wedge (B \vee C)$$

в) по упрощенной (минимизированной) функции составим логическую схему:



Правильность полученной формулы можно проверить сопоставлением таблиц истинности по последним столбцам.

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ПОСТРОЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ И ЛОГИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЕ

Задание. Запишите логическую функцию, описывающую состояние схемы, составьте таблицу истинности:

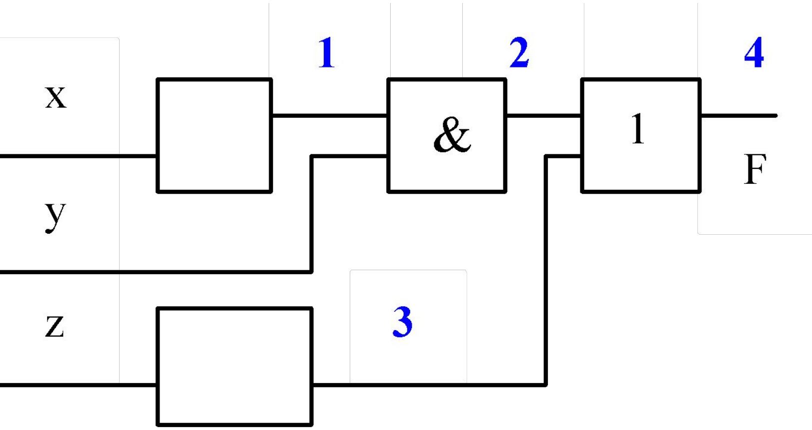


Таблица истинности:

x	y	z	$\overline{x}$	$\overline{x} \wedge y$	$\overline{z}$	$(\overline{x} \wedge y) \vee \overline{z}$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Для записи функции необходимо записать значения на выходе каждого элемента схемы:

1. $\overline{x}$
2. $\overline{x} \wedge y$
3. $\overline{z}$
4. $(\overline{x} \wedge y) \vee \overline{z}$

Следовательно получится функция: $F = (\overline{x} \wedge y) \vee \overline{z}$

ЗАДАНИЕ

I. По заданным таблицам истинности запишите логические функции, составьте логические схемы.

1.

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F=(\overline{A}\,\&\,B)\vee(A\,\&\,\overline{B})$$

$\overline{A}\,\&\,B$

$A\,\&\,\overline{B}$

2.

A	B	F(A,B)
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$\overline{A}\,\&\,\overline{B}$

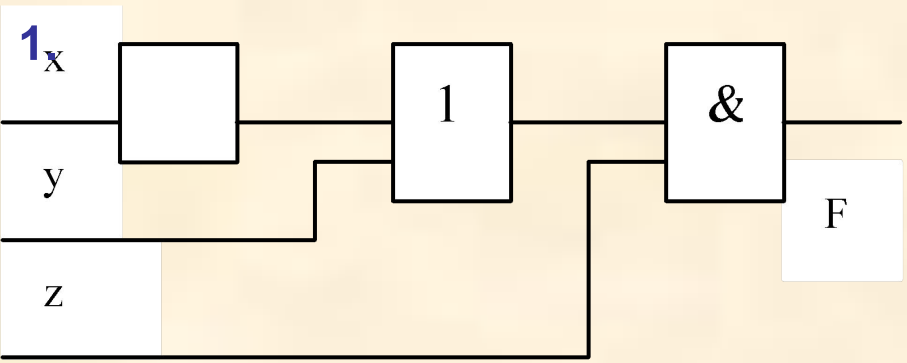
$\overline{A}\,\&\,B$

$A\,\&\,B$

$$F=(\overline{A}\,\&\,\overline{B})\vee(\overline{A}\,\&\,B)\vee(A\,\&\,B)$$

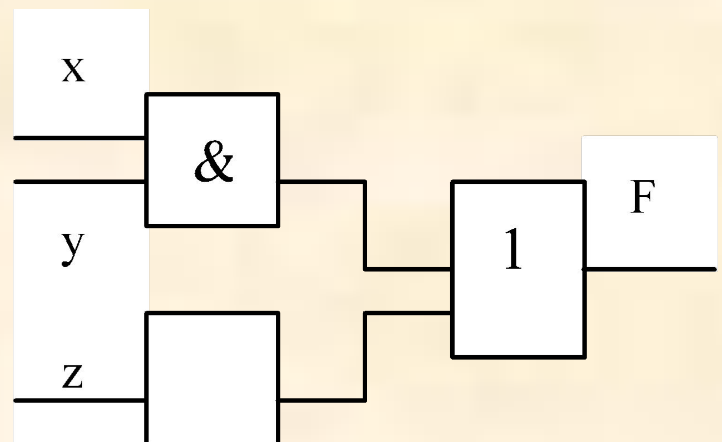
II. Запишите логическую функцию, описывающую состояние схемы, постройте таблицу истинности:

1.



$$F=(\overline{X}\vee Y)\,\&\,Z$$

2.



$$F=(X\,\&\,Y)\vee\overline{Z}$$

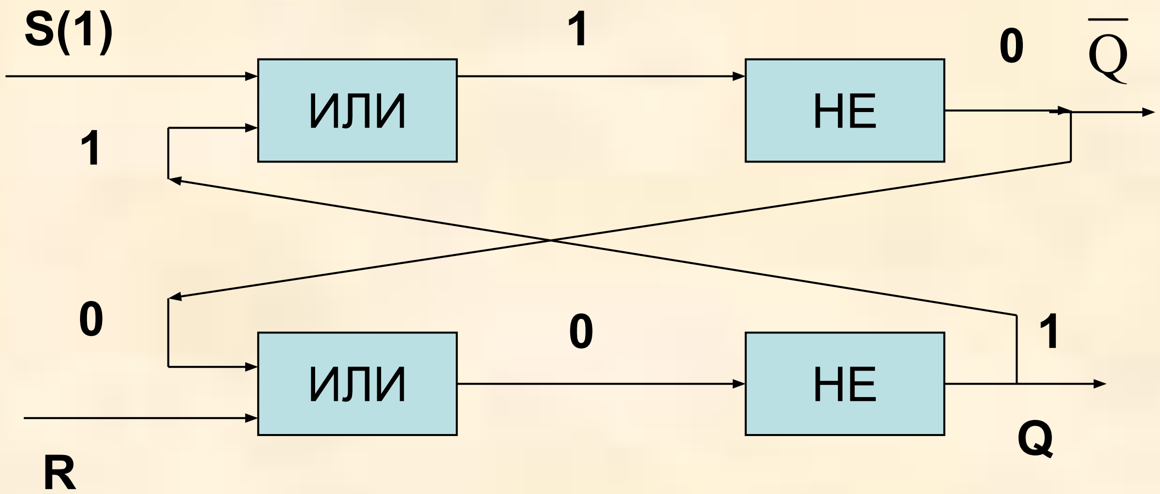
III. Упростите:

1. $$(A\wedge B\wedge C)\vee(\overline{A}\wedge B\wedge C)$$
$$=B\wedge C$$

2. $$(A\vee\overline{B}\vee C)\wedge\overline{(A\vee B\vee C)}$$

Триггер (*trigger - защелка, спусковой крючок*) – **запоминающее устройство (хранит 1 бит информации)**

Триггер имеет
два входа:
S (set –установка) и
R (reset – сброс) и
два выхода
Q (прямой) и
НЕQ (инверсный)

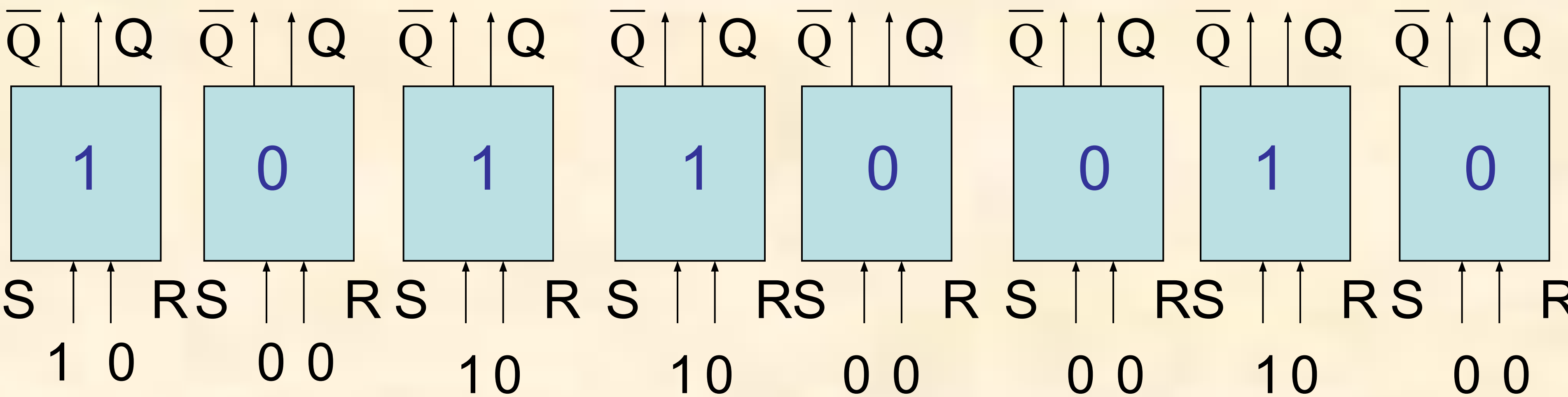


Входы		**Состояние**
S	**R**	**Q**
0	0	Q
1	0	1
0	1	0
1	1	Недопустимо

В обычном состоянии на входы триггера подан сигнал «0» и триггер хранит «0». Для записи «1» на вход S (set – установочный) подается сигнал «1». При последовательном рассмотрении прохождения сигнала по схеме видно, что триггер переходит в это состояние и будет устойчиво находиться в нем и после того, как сигнал на входе S исчезнет. Триггер запомнил «1», т.е. с выхода триггера Q можно считывать «1».

Чтобы сбросить информацию и подготовиться к приему новой, на вход R (сброс) подается сигнал «1», после чего триггер возвратиться к исходному «нулевому» состоянию.

Регистр – устройство, состоящее из последовательности триггеров. Предназначен для хранения многоразрядного двоичного числового кода, которым может быть представлять и адрес, и команду, и данные



Число триггеров в регистре называется разрядностью компьютера, которая может быть равна 8, 16, **32**, **64**.

Задачи.

1. Сколько триггеров необходимо для хранения информации объемом:

1 байт - **8**

1 Кбайт - **8192**

1 Мбайт - **8388608**

Сумматор – устройство для сложения двоичных чисел. Сумматор – основа микропроцессора, т.к все операции в микропроцессоре сводятся к сложению.

Полусумматор – реализует суммирование одноразрядных двоичных чисел **без учета переноса из младшего разряда**.

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$$P = A \& B$$

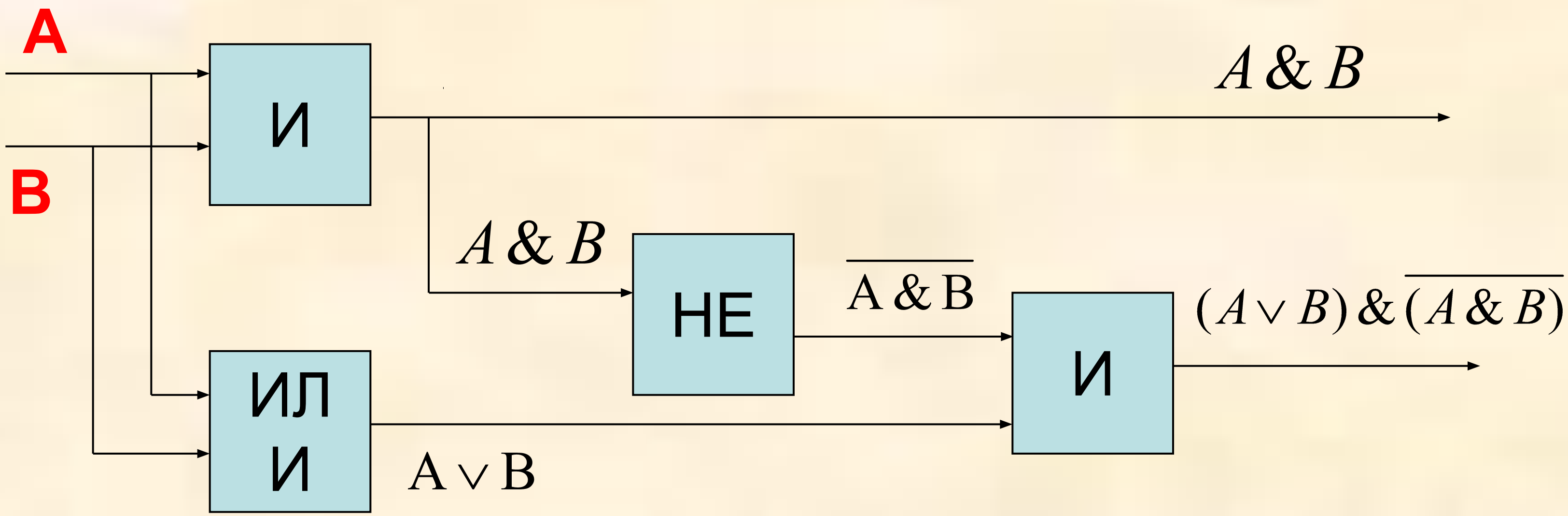
Значения S будут соответствовать сумме, если результат логического сложения умножить на инверсный перенос. Тогда

$$S = (A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$$

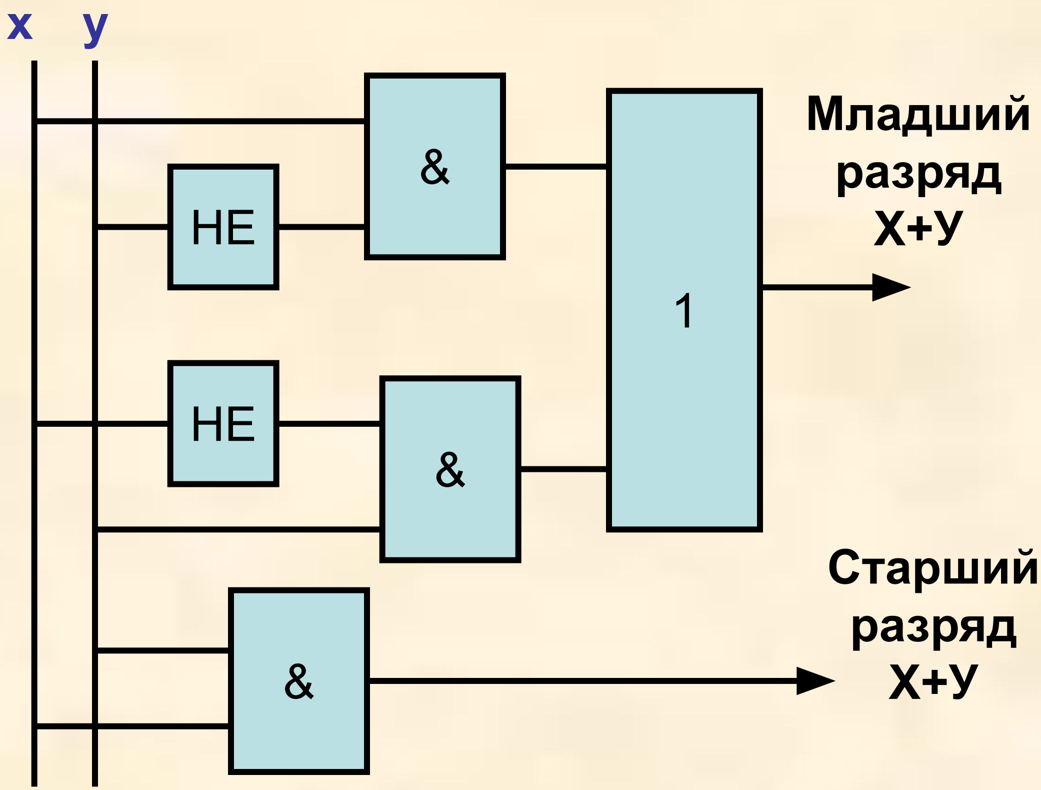
A	B	AvB	A&B	$\overline{A \& B}$	$(A \vee B) \& \overline{(A \& B)}$
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

Схема полусумматора двоичных чисел:

$$S = (A \vee B) \,\&\, \overline{(A \,\&\, B)}$$



Сумматор для двух одноразрядных чисел



x	y	Старший разряд	Младший разряд
0	0		
1	0		
0	1		
1	1		

Подавая на входы x и y сигналы о и 1, на выходах получим два сигнала, которые поразрядно кодируют сумму двух однозначных чисел.

А т.к. действия над числами, записанными в позиционной системе счисления, выполняются поразрядно, то ясно, что аналогичным образом можно построить электронные схемы для сложения многозначных чисел, представленных в двоичной системе счисления