



Логарифмы

План:

- *Определение.*
- *Свойства.*
- *Десятичные и натуральные логарифмы.*
- *Логарифмическая функция, ее свойства и график.*
- *Решение логарифмических уравнений и неравенств.*



Определение логарифма:

- Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .
- Основное логарифмическое тождество:
 $a^{\log_a b} = b$, где $b > 0$, $a > 0$
- Действие нахождения логарифма называется *логарифмированием*.

Свойства логарифмов:

- $\text{Log}_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\text{Log}_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
- $\text{Log}_a b^r = r \log_a b$
- $\text{Log}_a b = \log_c b / \log_c a$
- $\text{Log}_a b = 1 / \log_b a$
- $a^{\log b c} = c^{\log b a}$
- $\text{Log}_{a^r} b = 1/r \log_a b$
- $a^{\log a b} = b$

Десятичные и натуральные логарифмы:

- *Десятичным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию 10. Записывается $\lg b$
- *Натуральным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию e , где e -иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом записывается $\ln b$



Логарифмическая функция.

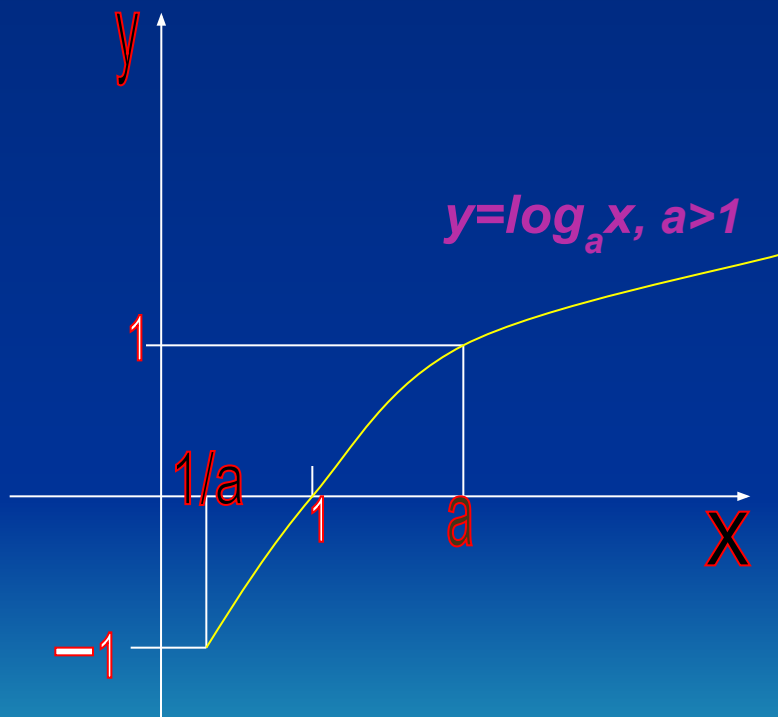
- **Логарифмическая функция: $y = \log_a x$**

Свойства:

1. Множество значений логарифмической функции - множество всех положительных чисел
2. Множество значений логарифмической функции - множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.
3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $x > 0$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$
4. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.
5. Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны.



Логарифмическая функция и её график:



Логарифмические уравнения

Решить уравнение:

$$\text{Log}_2(x+1) + \text{Log}_2(x+3) = 3$$

Решение:

Используя свойство логарифма, получаем:

$$\text{Log}_2(x+1)(x+3) = 3$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем:

$$(x+1)(x+3) = 8.$$

Теперь раскроем скобки и решим квадратное уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$,
откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$

При $x_2 = -5$ числа $(x+1)$ и $(x+3) < 0$, следовательно $x = -5$ не является корнем уравнения.

Ответ. $x = 1$



Решение систем:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ 4y^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Из первого уравнения выразим x через y :
 $\log_2 x / y = \log_2 2$, $x / y = 2$, $x = 2y$. Подставив $x = 2y$ во второе уравнение системы, получим $4y^2 + 2y - 12 = 0$, откуда $y_1 = 3/2$, $y_2 = -2$. Найдем значения x : $x_1 = 3$, $x_2 = -4$. Проверка показывает, что -4 и -2 – постороннее решение.

Ответ. $x = 3$, $y = 3/2$.

Логарифмические неравенства:

- Решить неравенство:

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$$

Решение:

О.о. $x > 3$.

Используя свойства логарифма, получаем:

$\log_2(x-3)(x-2) \leq \log_2 2$. Логарифмическая функция с основанием 2 является возрастающей, поэтому при $x > 3$ неравенство $\log_2(x-3)(x-2) \leq \log_2 2$ выполняется при $(x-3)(x-2) \leq 2$. Это неравенство можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}$$



Лавенюкова