Квадратичная функция

Квадратичная функция

- Определение
- График
- Свойства функции
- График и свойства функции у = ax^2
- Сдвиг графика у = ax^2
- Способы построения параболы
- Квадратичная функция в заданиях ГИА
- Примеры и комментарии
- Задания ГИА

Резюме

Квадратичная функция

Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c - некоторые числа, причём $a \neq 0$.

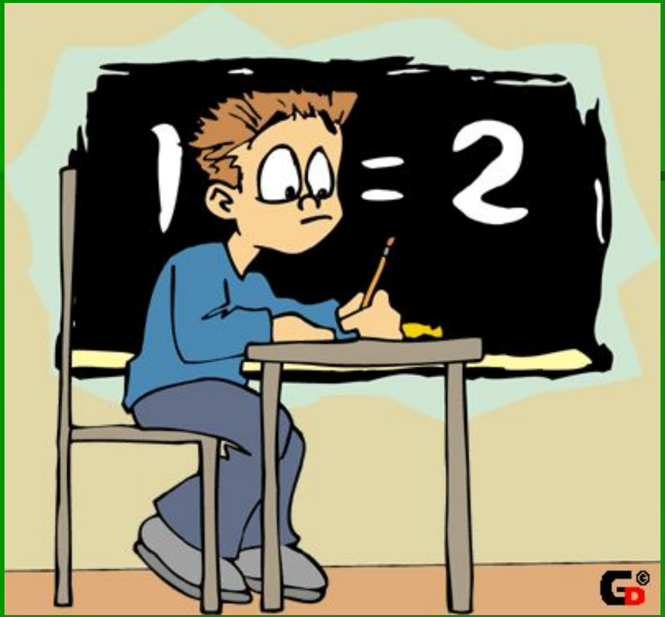
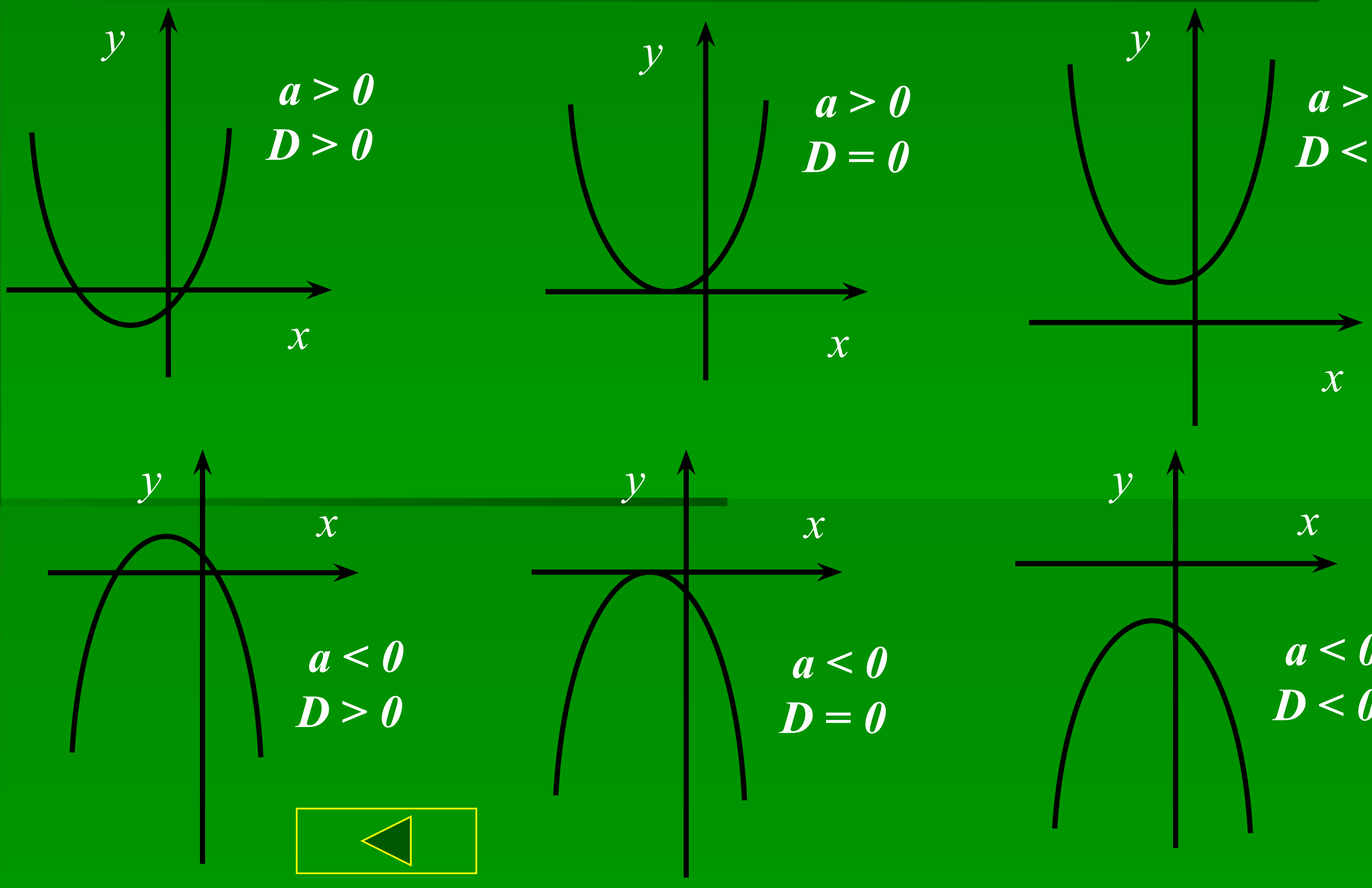


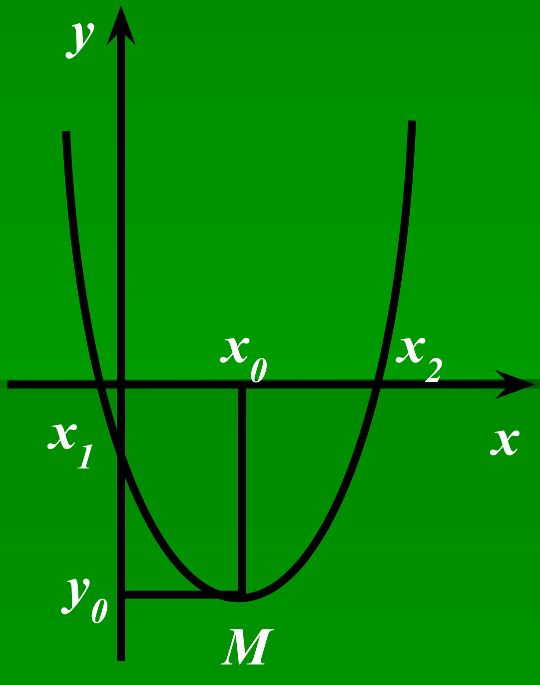
График любой квадратичной функции – парабола.

График функции



График

- $y = ax^2 + bx + c$,



- $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант
- $M(x_0, y_0)$ – вершина параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

- Уравнение параболы, проходящей через точку *M*: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$
- x_1, x_2 – корни параболы: $ax^2 + bx + c = 0$

Свойства функции

- 1. Нули функции: y=0 (пересечения с осью Ox)
- 2.Точки пересечения с осью Oy
- 3.Возрастание функции(если $X_2>X_1$, то $f(X_2)>f(X_1)$):

с возрастанием аргумента увеличивается значение функции.

Убывание функции(если $X_2>X_1$, то $f(X_2)<f(X_1)$):

с возрастанием аргумента уменьшается значение функции

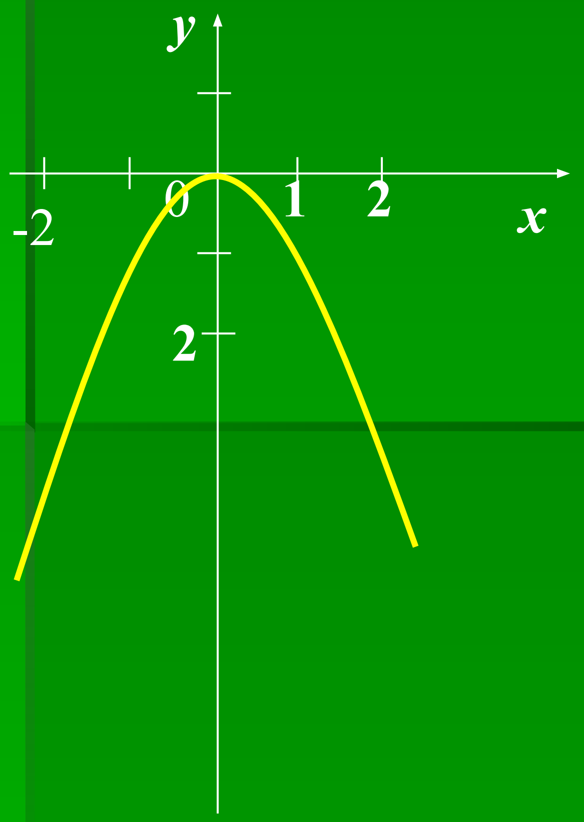
- аргумент и функция связаны противоположными знаками.

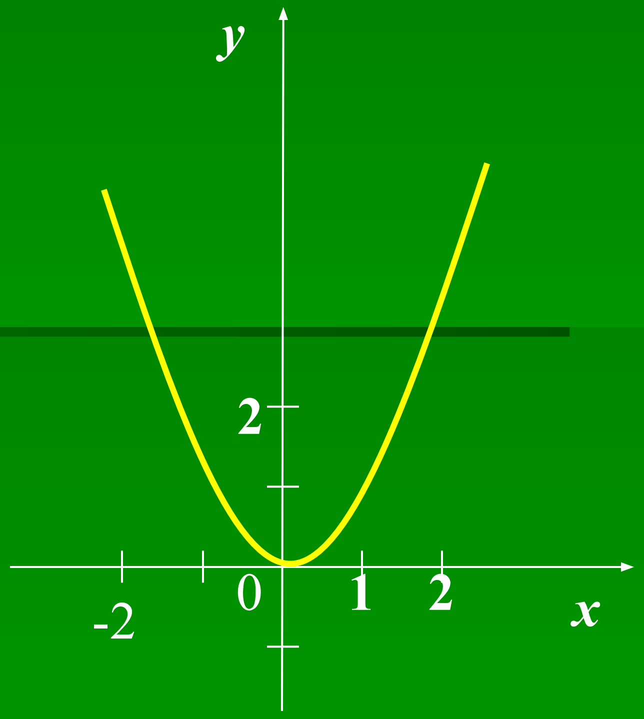
- 4. Промежутки знакопостоянства : $f(x)>0$ и $f(x)<0$.
- 5. Непрерывность функции (разрыв - нельзя провести график не отрываясь).
- 6. Наибольшее и наименьшее значение.

Функция $y=x^2$

Построим график функции $y=x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9



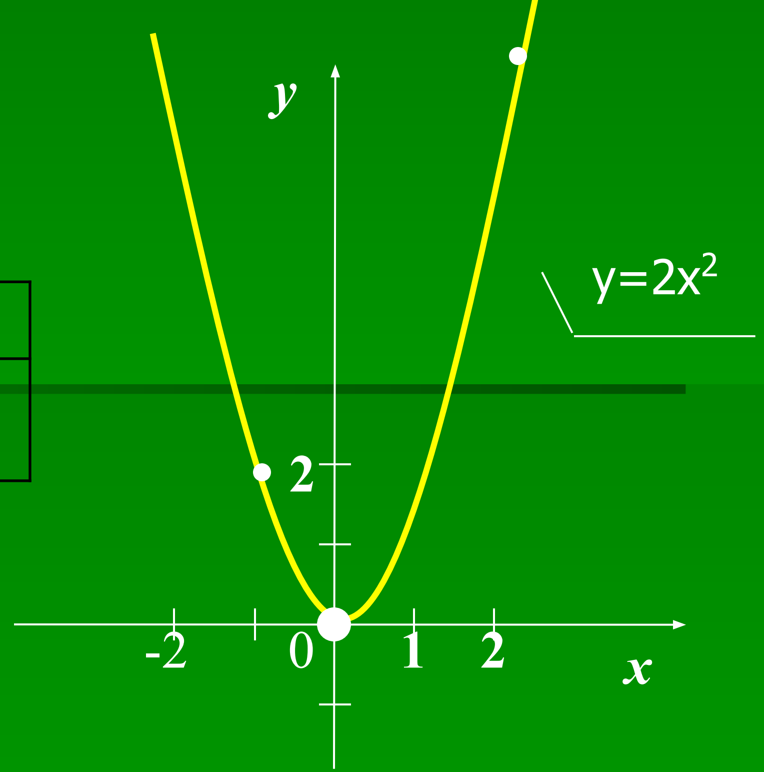


Функция $y=ax^2$

Построим график функции $y=2x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

a>0



Построим график функции $y=-2x^2$

a<0

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

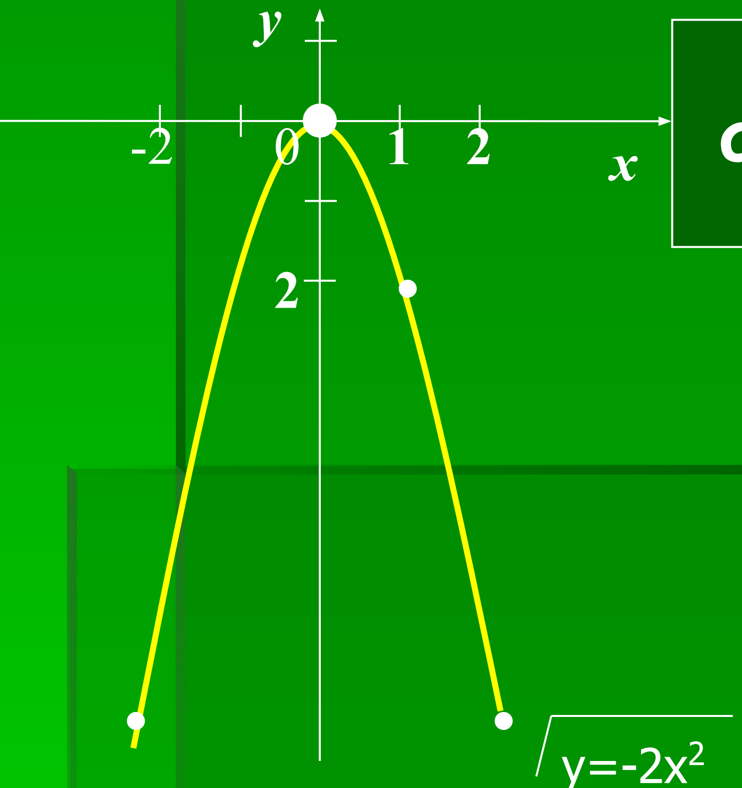


График и свойства функции $y=ax^2$

Графиком функции $y=ax^2$, где $a \neq 0$, является парабола с вершиной в начале координат;

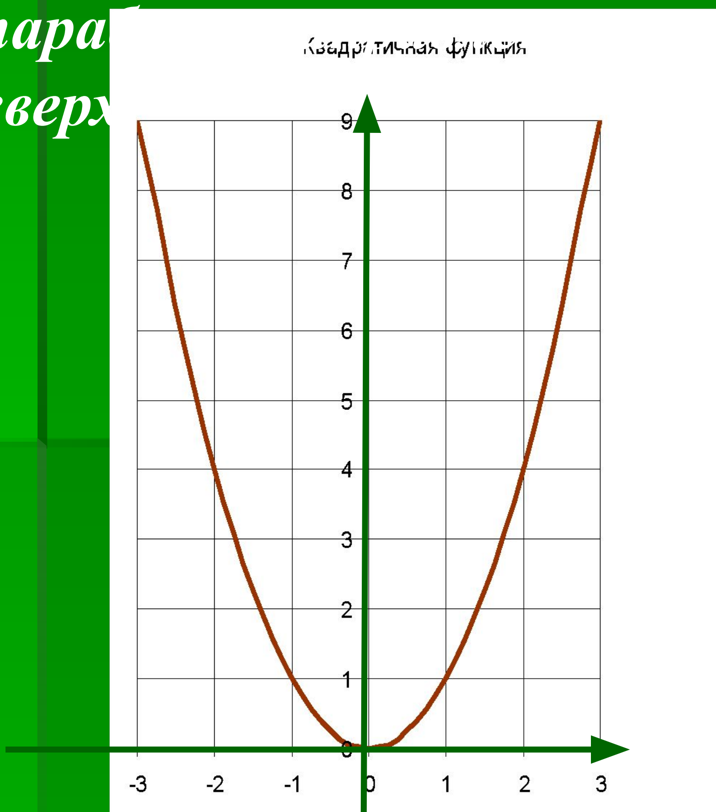
её осью симметрии служит ось у;

при при $a>0$при $a>0$ ветви параболы направлены вверх,

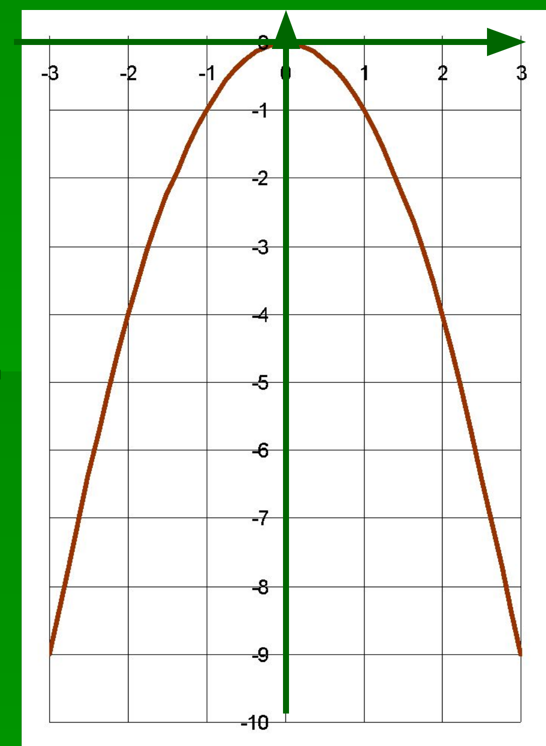
при при $a<0$ ветви вниз.

Свойства квадратичной функции $y = ax^2$

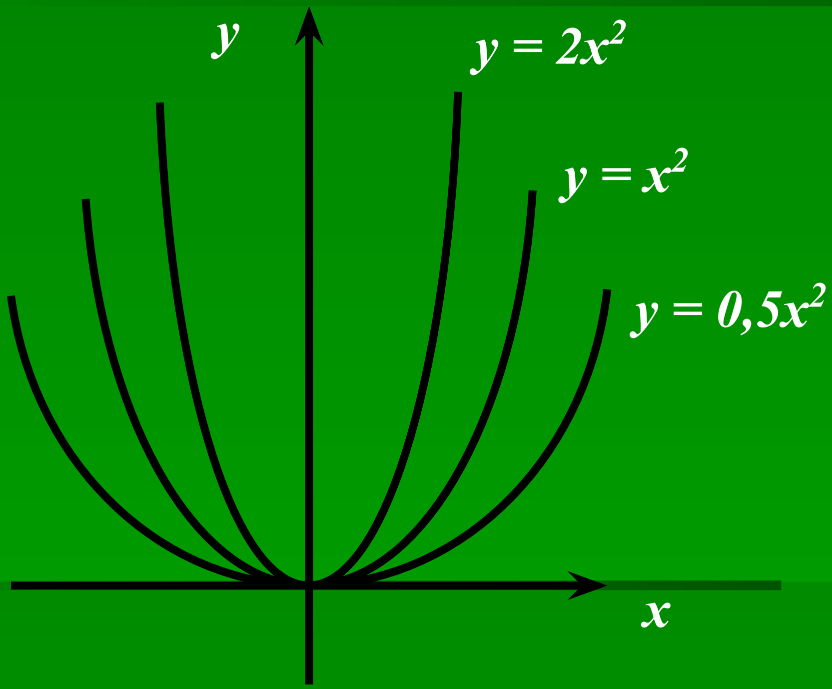
При При $a>0$ ветви пара вверх



При При $a<0$ ветви параболы направлены вниз



Свойства $y = ax^2$ при $a > 0$



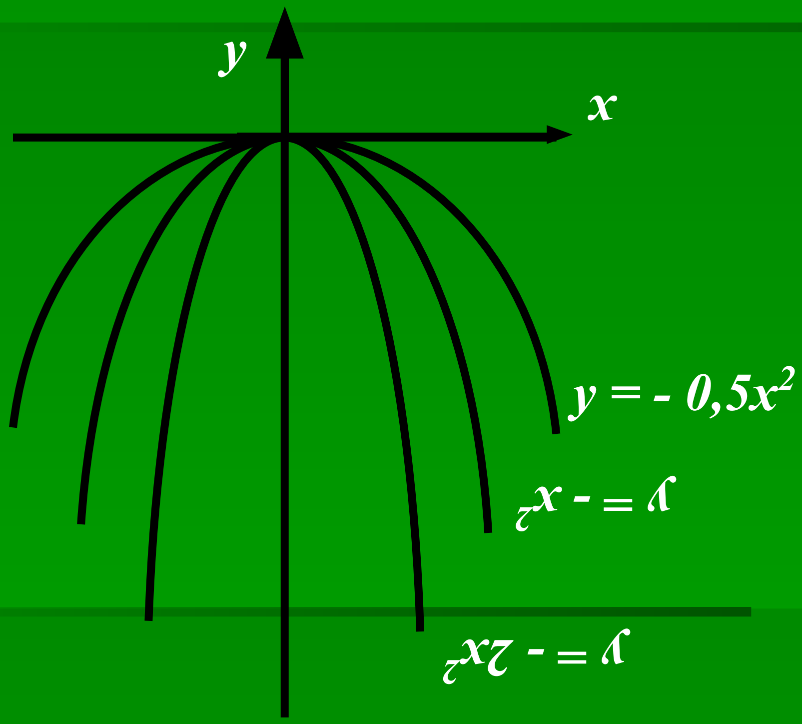
1. Д(у) = R
2. Е(у)= [0; +∞)
3. четная, т.к. у(-х) = у(х)
4. Возрастает

   на промежутке [0; +∞)
5. Убывает

   на промежутке (-∞; 0]
6. Наименьшее значение

   равное 0 при х = 0

Свойства $y = ax^2$ при $a < 0$



1. Д(y) = R
2. E(y)= (-∞; 0]
3. четная, т.к. y(-x) = y(x)
4. Возрастает

   на промежутке (-∞; 0]
5. Убывает

   на промежутке [0; +∞)
6. Наибольшее значение

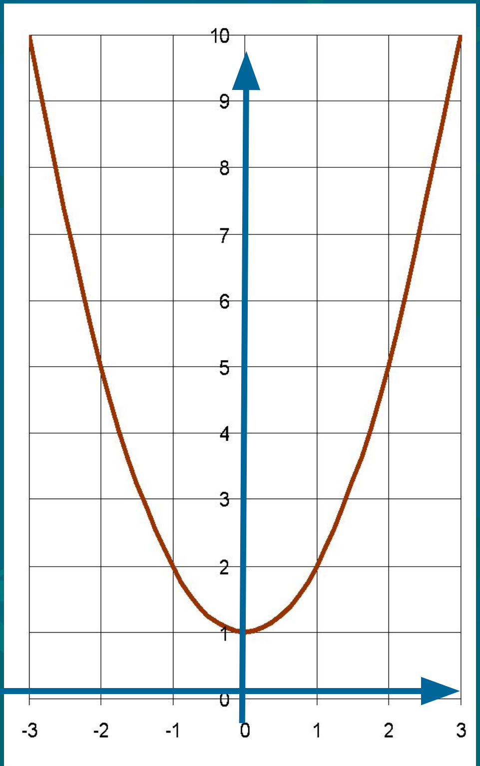
   равное 0 при x = 0

Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат

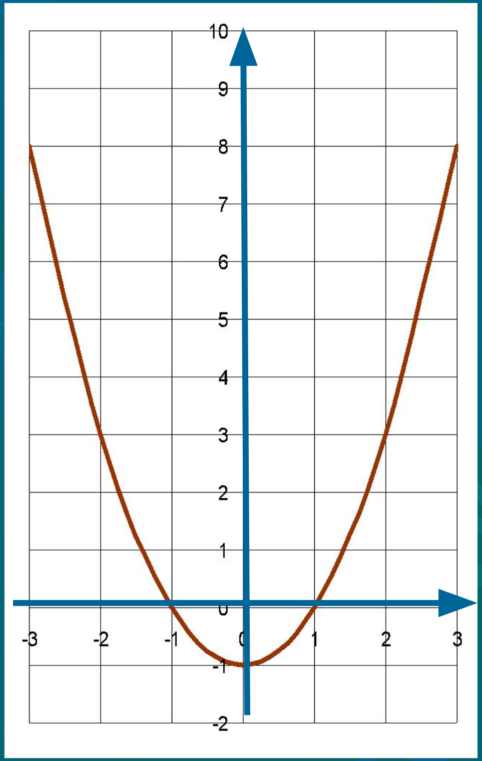
- 1. Чтобы построить график функции $y = ax^2 + g$ + g , нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси на g единиц вверх, если $g > 0$, или на $| g |$ единиц вниз, если $g < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке (0; g).
- 2. Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси x на p единиц влево, если $p > 0$, или на $| p |$ единиц вправо, если $p < 0$.При этом вершина параболы окажется в точке ($- p$; 0).
- 3. Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2 + g$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси x на p единиц влево, если $p >0$, или на $| p |$ единиц вправо, если $p < 0$ и вдоль оси y на g единиц вверх, если $g > 0$, или на $| g |$ единиц вниз, если $g < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке (- p ; g).

Функция $y = ax^2 + g$

1) $g > 0$



2) $g < 0$

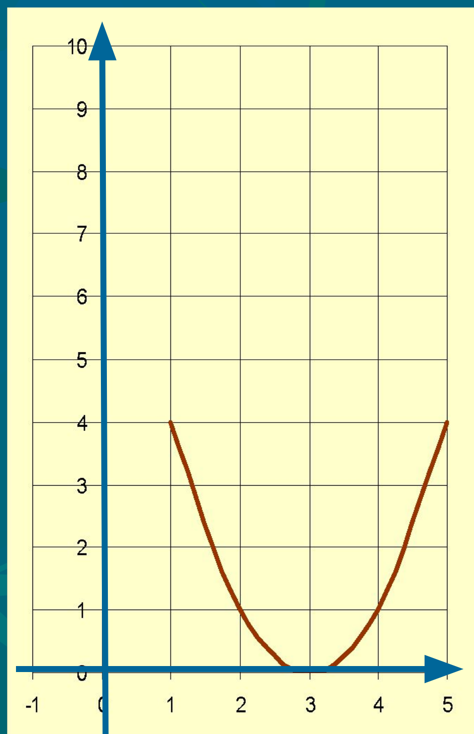


Данный график получается

смещением параболы $y = ax^2$ по оси Oy на g единиц вверх (если $g > 0$) или вниз (если $g < 0$)

Функция $y = a(x - p)^2$

1) $p > 0$



2) $p < 0$

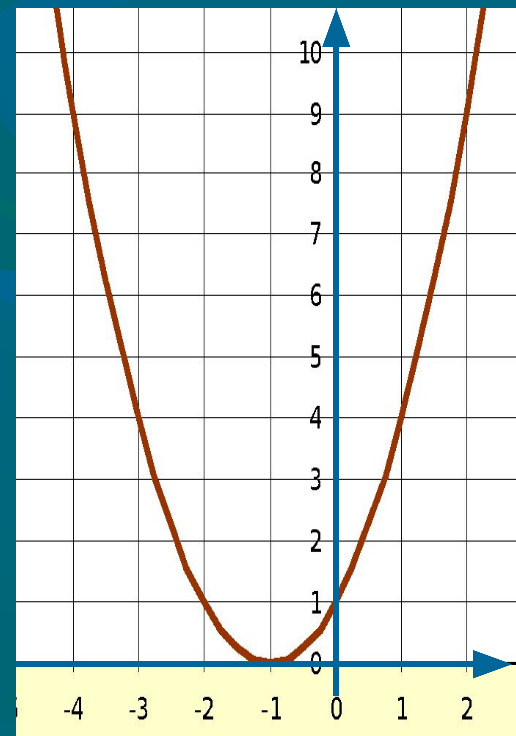


График получается

смещением параболы $y = ax^2$ по оси Ox на p единиц вправо (если $p > 0$) или влево (если $p < 0$)

Способы построения графика квадратичной функции

1 СПОСОБ Схема Пример №1 Пример №2

2 СПОСОБ Пример №3

3 СПОСОБ Пример №4 Пример №5

1 СПОСОБ.

Схема построения графика квадратичной функции **$y=ax^2-bx+c$:**

- Построить вершину параболы.
- Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, - ось симметрии параболы.
- Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.
- Построить дополнительные точки.
- Провести через построенные точки параболу.

2 СПОСОБ. Построение параболы по точкам с ординатой, равной свободному члену квадратного трёхчлена ax^2-bx+c.

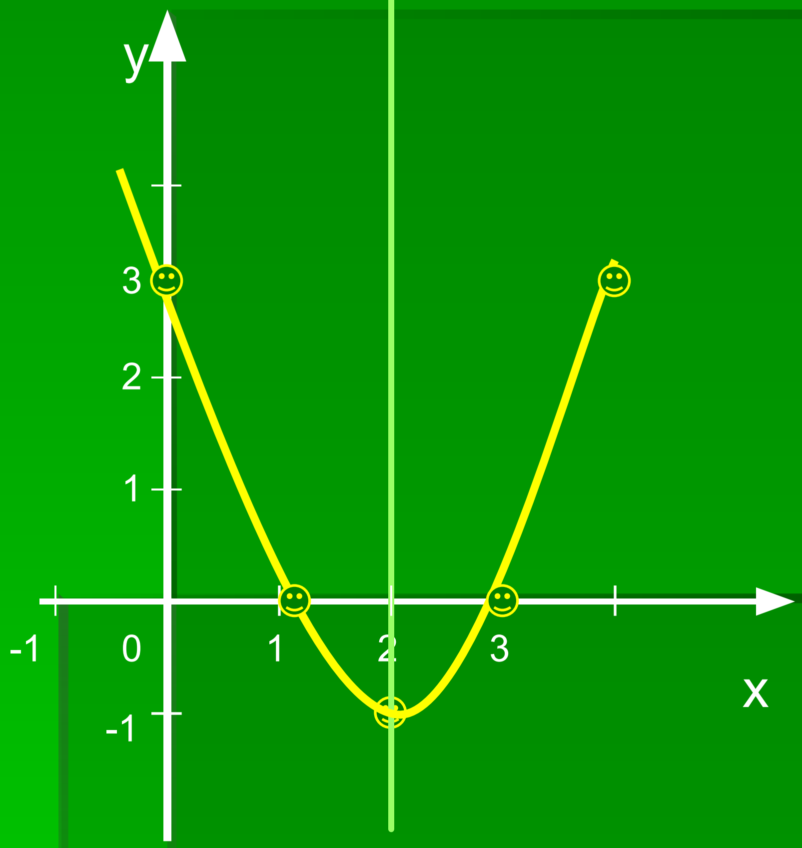
3 СПОСОБ.

$$y=a(x-m)^2 + n$$

График функции $y=a(x-m)^2+n$ получается сдвигом графика функции $y=ax^2$ на **m** единичных отрезков по оси Ох и на **n** единичных отрезков по оси Оу.

Схема построения параболы:

$$y = x^2 - 4x + 3$$



- **Найти координаты вершины параболы: *M*(2;-1).**

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 =$$

$$= 4 - 8 + 3 = 7 - 8 = -1$$

- **Провести ось симметрии: *x* = 2.**
- **Найти нули функции при *y* = 0: (1;0) и (3;0)**
- **Найти дополнительные точки: при *x*=0, *y*=3; при *x*=4, *y*=3.**
- **Соединить полученные точки.**

Пример №1

$y = 3x^2 + 12x + 9$

Графиком функции является парабола , ветви параболы направлены вверх , т.к. a = 3, a>0.

$M(x_0;y_0)$- вершина параболы

$x_0 = \frac{-b}{2a}$; $x_0 = -12 : 6 = -2$

$y_0 = 3(-2)^2+12(-2)+9 = -3.$ M(-2;3)

Прямая x = -2 – ось симметрии

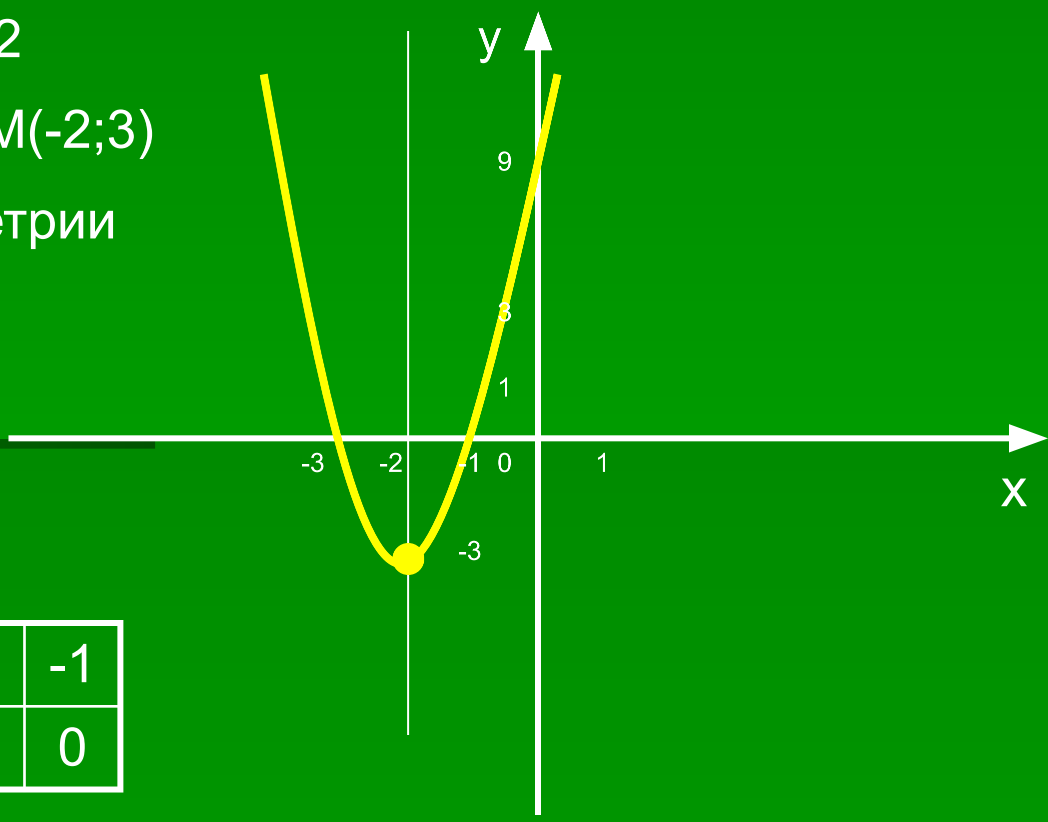
Нули функции: y=0

$3x^2+12x+9 = 0$

$x^2+4x+3 = 0$

$x_1 = -1$, $x_2 = -3$

x	0	-1
y	9	0



Пример №2

$y = \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$

Графиком функции является парабола , ветви параболы направлены вверх , т.к. $a = \frac{1}{4}$, $a>0$.

$M(x_0;y_0)$- вершина параболы

$x_0 = \frac{-b}{2a}$; $x_0 = -2 : \frac{1}{2} = -4$

$y_0 = \frac{1}{4}(-4)^2+2(-4)-5 = -9$. $M(-4;-9)$

Прямая $x = -4$ – ось симметрии

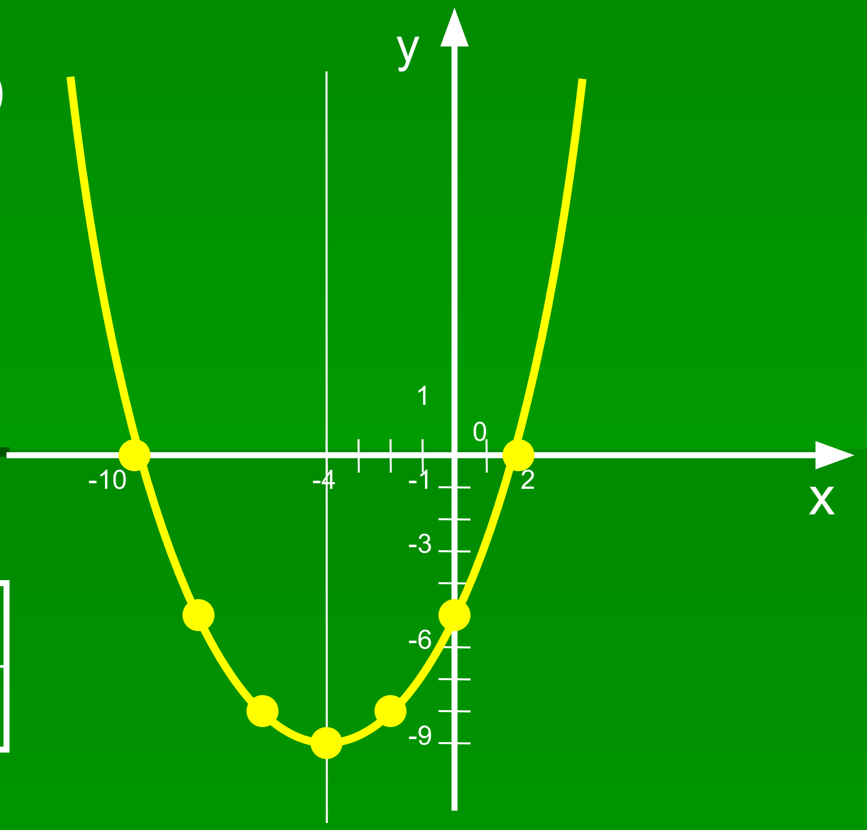
Нули функции: $y=0$

$\frac{1}{4}x^2 + 2x - 5 = 0$

$x^2 + 8x - 20 = 0$

$x_1 = -10$, $x_2 = 2$

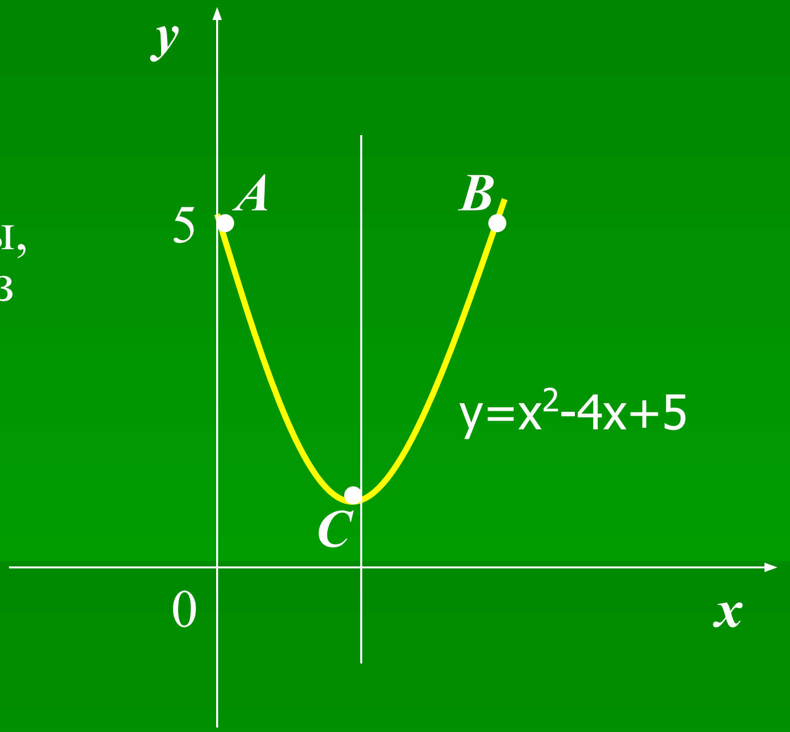
x	0	-2
y	-5	-8



Пример №3

Построим график функции **y=x²-4x+5.**

- 1) Найдём точки графика, имеющие ординату, равную 5. Для этого решаем уравнение $\boldsymbol{x^2 - 4x + 5 = 5}$. Получаем: $\boldsymbol{x}_1 = 0$, $\boldsymbol{x}_2 = 4$
- 2) Точки ***A*** (0; 5) и ***B*** (4; 5) лежат на параболе и имеют одинаковую ординату. Эти точки симметричны относительно оси симметрии параболы, поэтому ось симметрии проходит через середину отрезка ***AB***. Т.к. абсцисса точки ***A*** равна 0, а т. ***B*** равна четырём , то уравнение оси параболы $\boldsymbol{x} = 2$.
- 3) Подставим значение *x* в уравнение. Получаем координаты вершины параболы: $\boldsymbol{x}_0 = 2$, $\boldsymbol{y}_0 = 1$.
- 4) Отмечаем на координатной плоскости т. ***C*** (2; 1), построим параболу, проходящую через три точки ***A***, ***B***, ***C***.



Пример №4

Построим график функции $y=2(x+1)^2-3$.

Будем действовать следующим образом:

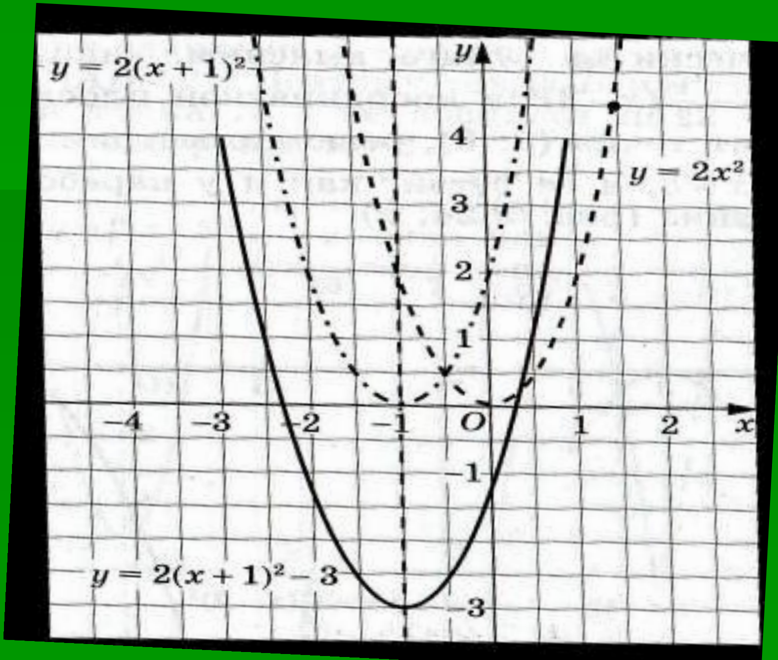
1)Построим параболу $y=2x^2$;

2)Перенесем ее на 1 единицу влево и на 3 единицы вниз –

в результате получится график заданной функции $y=2(x+1)^2 - 3$ (см.рис)

Действия , которые мы выполнили для построения графика , можно описать такой схемой:

$$y=2x^2 \xrightarrow{\text{Влево на 1 ед.}} y=2(x+1)^2 \xrightarrow{\text{Вниз на 3 ед.}} y=2(x+1)^2 - 3$$



Пример №5

$y=-2(x+3)^2+2$

$m = -3$
$n = 2$

$y=-2x^2$

x	1	-1	2
y	-2	-2	-8