

Методы решения тригонометрических уравнений.

Учитель математики Жихарева Е. Н.
МКОУ «Гоношихинская СОШ»

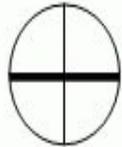
Уравнение, содержащее неизвестное под знаком тригонометрической функции, называется *тригонометрическим*.

- ▶ Решение тригонометрического уравнения состоит из двух этапов: *преобразование уравнения* для получения его простейшего вида и *решение* полученного простейшего тригонометрического уравнения.
- ▶ Методы решения тригонометрических уравнений:
- ▶ 1. *Алгебраический метод* (метод замены переменной и подстановки).
- ▶ 2. *Разложение на множители.*
- ▶ 3. *Приведение к однородному уравнению.*
- ▶ 4. *Переход к половинному углу.*
- ▶ 5. *Введение вспомогательного угла.*
- ▶ 6. *Преобразование произведения в сумму.*
- ▶ 7. *Универсальная подстановка.*

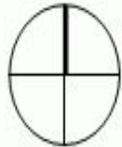
Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\sin x = a.$$

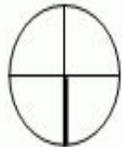
1). $\sin x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;



2). $\sin x = 1$, $x = \pi/2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\sin x = -1$, $x = -\pi/2 + 2\pi k$, k – любое целое число;



4). $\sin x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

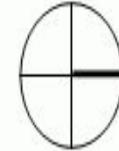
5). $\sin x = a$, $|a| \leq 1$, $x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k$, k – любое целое число.

$$\cos x = a.$$

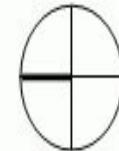
1). $\cos x = 0$, $x = \pi/2 + \pi k$, k – любое целое число;



2). $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, k – любое целое число;



3). $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, k – любое целое число;



4). $\cos x = a$, $|a| > 1$, здесь нет решений;

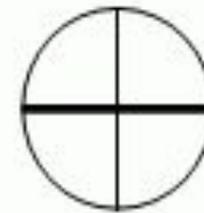
5). $\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k$, k – любое целое число.

Простейшие тригонометрические уравнения.

$$\tan x = a .$$

1). $\tan x = 0$, $x = \pi k$, k – любое целое число;

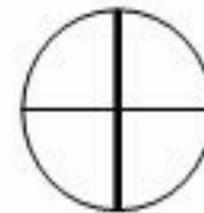
2). $\tan x = a$, $x = \arctan a + \pi k$, k – любое целое число.



$$\cot x = a .$$

1). $\cot x = 0$, $x = \pi / 2 + \pi k$, k – любое целое число;

2). $\cot x = a$, $x = \operatorname{arccot} a + \pi k$, k – любое целое число.



1. Алгебраический метод (метод замены переменной и подстановки).

Пр и м е р . Решить уравнение: $2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Р е ш е н и е . Используя формулы приведения, имеем:

$$2 \cos^2(x + \pi/6) - 3 \cos(x + \pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x + \pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

$$1). \cos(x + \pi/6) = 1, \quad 2). \cos(x + \pi/6) = 1/2,$$

$$x + \pi/6 = 2\pi k,$$

$$x + \pi/6 = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n,$$

$$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k;$$

$$x_2 = \pm \pi/3 - \pi/6 + 2\pi n.$$

2. Разложение на множители.

- ▶ Пример 1. Решить уравнение: $\sin x + \cos x = 1$.
- ▶ Решение. Перенесём все члены уравнения влево:
 $\sin x + \cos x - 1 = 0$, преобразуем и разложим на множители выражение в левой части уравнения:

$$\sin x - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot \cos(x/2) - 2 \sin^2(x/2) = 0,$$

$$2 \sin(x/2) \cdot [\cos(x/2) - \sin(x/2)] = 0,$$

$$1). \sin(x/2) = 0, \quad 2). \cos(x/2) - \sin(x/2) = 0,$$

$$x/2 = \pi k,$$

$$x_1 = 2\pi k;$$

$$\tan(x/2) = 1,$$

$$x/2 = \arctan 1 + \pi n,$$

$$x/2 = \pi/4 + \pi n,$$

$$x_2 = \pi/2 + 2\pi n.$$

Пример 2.

Решить уравнение: $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1$.

- ▶ Решение. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$,
- ▶ $\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = 0$,
- ▶ $\sin x \cdot (\cos x - \sin x) = 0$,

$$1). \sin x = 0, \quad 2). \cos x - \sin x = 0,$$

$$x_1 = \pi k; \quad \tan x = 1,$$

$$x_2 = \pi / 4 + \pi n,$$

3. Приведение к однородному уравнению.

- ▶ Уравнение называется *однородным относительно \sin и \cos* , если все его члены одной и той же степени относительно \sin и \cos одного и того же угла.
- ▶ Чтобы решить однородное уравнение, надо:
 - ▶ а) перенести все его члены в левую часть;
 - ▶ б) вынести все общие множители за скобки;
 - ▶ в) приравнять все множители и скобки нулю;
 - ▶ г) скобки, приравненные нулю, дают однородное уравнение меньшей степени, которое следует разделить на \cos (или \sin) в старшей степени;
 - ▶ д) решить полученное алгебраическое уравнение относительно \tan .
 - ▶

Решить уравнение:

$$3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$$

- ▶ Решение . $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,
- ▶ $\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$,
- ▶ $\tan^2 x + 4\tan x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,
- ▶ корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда
- ▶ 1) $\tan x = -1$, 2) $\tan x = -3$,

$$x_1 = -\pi/4 + \pi k; \quad x_2 = -\arctan 3 + \pi k.$$

4. Переход к половинному углу.

- ▶ Решить уравнение: $3 \sin x - 5 \cos x = 7$.
- ▶ $6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) - 5 \cos^2 (x / 2) + 5 \sin^2 (x / 2) = 7 \sin^2 (x / 2) + 7 \cos^2 (x / 2) ,$
- ▶ $2 \sin^2 (x / 2) - 6 \sin (x / 2) \cdot \cos (x / 2) + 12 \cos^2 (x / 2) = 0 ,$
- ▶ $\tan^2 (x / 2) - 3 \tan (x / 2) + 6 = 0 ,$
- ▶ \dots

5. Введение вспомогательного угла.

- ▶ Рассмотрим уравнение вида: $a \sin x + b \cos x = c$,
- ▶ где a, b, c - коэффициенты; x - неизвестное.

Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$ (корректно ли это?):

$$\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\cos \varphi} \sin x + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{\sin \varphi} \cos x = \underbrace{\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_C,$$

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = C,$$

или $\sin(x + \varphi) = C,$

и его решение: $x = (-1)^k \cdot \arcsin C - \varphi + \pi k,$

где $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

Заметим, что введённые обозначения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ взаимно заменяемы.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 1$.

Решение. Здесь $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, поэтому делим обе части на $\sqrt{3+1}=2$:

$$(\sqrt{3}/2) \cdot \sin 3x - (1/2) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\cos(\pi/6) \cdot \sin 3x - \sin(\pi/6) \cdot \cos 3x = 1/2,$$

$$\sin(3x - \pi/6) = 1/2,$$

отсюда, $x = (-1)^k \cdot \pi/18 + \pi/18 + \pi k/3$.

6. Преобразование произведения в сумму.

▶ П р и м е р . Решить уравнение: $2 \sin x \cdot \sin 3x = \cos 4x$.

▶

▶ Р е ш е н и е . Преобразуем левую часть в сумму:

▶

$$\cos 4x - \cos 8x = \cos 4x ,$$

▶

▶

$$\cos 8x = 0 ,$$

▶

▶

$$8x = \pi / 2 + \pi k ,$$

▶

▶

$$x = \pi / 16 + \pi k / 8 .$$

▶

▶

7. Универсальная подстановка.

- **Пример.** Решить уравнение: $3 \sin x - 4 \cos x = 3$.

Решение. Здесь возможны два случая:

1). $x \neq (2m + 1)\pi$, тогда

$$3 \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} - 4 \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)} = 3,$$

$$6 \tan(x/2) - 4 + 4 \tan^2(x/2) = 3 + 3 \tan^2(x/2),$$

$$\tan^2(x/2) + 6 \tan(x/2) - 7 = 0,$$

делаем замену: $\tan(x/2) = u$, тогда $u^2 + 6u - 7 = 0$,

корни этого уравнения: $u_1 = -7$, $u_2 = 1$.

1а). $\tan(x/2) = -7$, 1б). $\tan(x/2) = 1$,

$x_1 = -2 \arctan 7 + 2\pi k$; $x_2 = \pi/2 + 2\pi m$.

2). $x = (2m + 1)\pi$, тогда

$$3 \sin[(2m + 1)\pi] - 4 \cos[(2m + 1)\pi] = 4 \neq 3.$$

Таким образом, решение даёт только первый случай.

Проверка

Алгебраический метод (метод замены переменной и подстановки).	2
Разложение на множители.	4
Приведение к однородному уравнению.	1
Переход к половинному углу.	
Преобразование произведения в сумму.	5
Универсальная подстановка.	6
Введение вспомогательного угла.	3

Спасибо, за внимание!!!

