Комплексные числа

История возникновения комплексных чисел

1. Развитие понятия о числе

Древнегреческие математики считали “настоящими” только натуральные числа.

Наряду с натуральными числами применяли дроби - числа, составленные из целого числа долей единицы.

1. Развитие понятия о числе

Введение отрицательных чисел - это было сделано китайскими математиками за два века до н. э.

Уже в VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя.

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

2. На пути к комплексным числам

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

В формуле для решения кубических уравнений вида:

$$x^3 + px + q = 0$$

кубические и квадратные корни:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула безотказно действует в случае, когда уравнение имеет один действительный корень, а если оно имеет три действительных корня, то под знаком квадратного корня оказывалось отрицательное число. Получалось, что путь к этим корням ведет через невозможную операцию извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

$x=1$

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

Кроме x=1, есть еще два корня

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$$

не имеющая решений во множестве действительных чисел, имеет решения вида

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

$$y = 5 \mp \sqrt{-15}$$

нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать что

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$$

3. Утверждение комплексных чисел в математике

Кардано называл такие величины “*чисто отрицательными*” и даже “*софистически отрицательными*”, считал их бесполезными и старался их не употреблять.

Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней.

Название “*мнимые числа*” ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт.

В 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века - Л. Эйлер предложил использовать первую букву французского слова *imaginaire* (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы). Этот символ вошел во всеобщее употребление благодаря К. Гауссу . Термин “*комплексные числа*” так же был введен Гауссом в 1831 году.

Слово комплекс (от латинского *complexus*) означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений и т. д. Образующих единое целое.

Л. Эйлер вывел в 1748 году замечательную формулу

$$e^{i\cdot x} = \cos x + i\cdot\sin x$$

которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрической. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень.

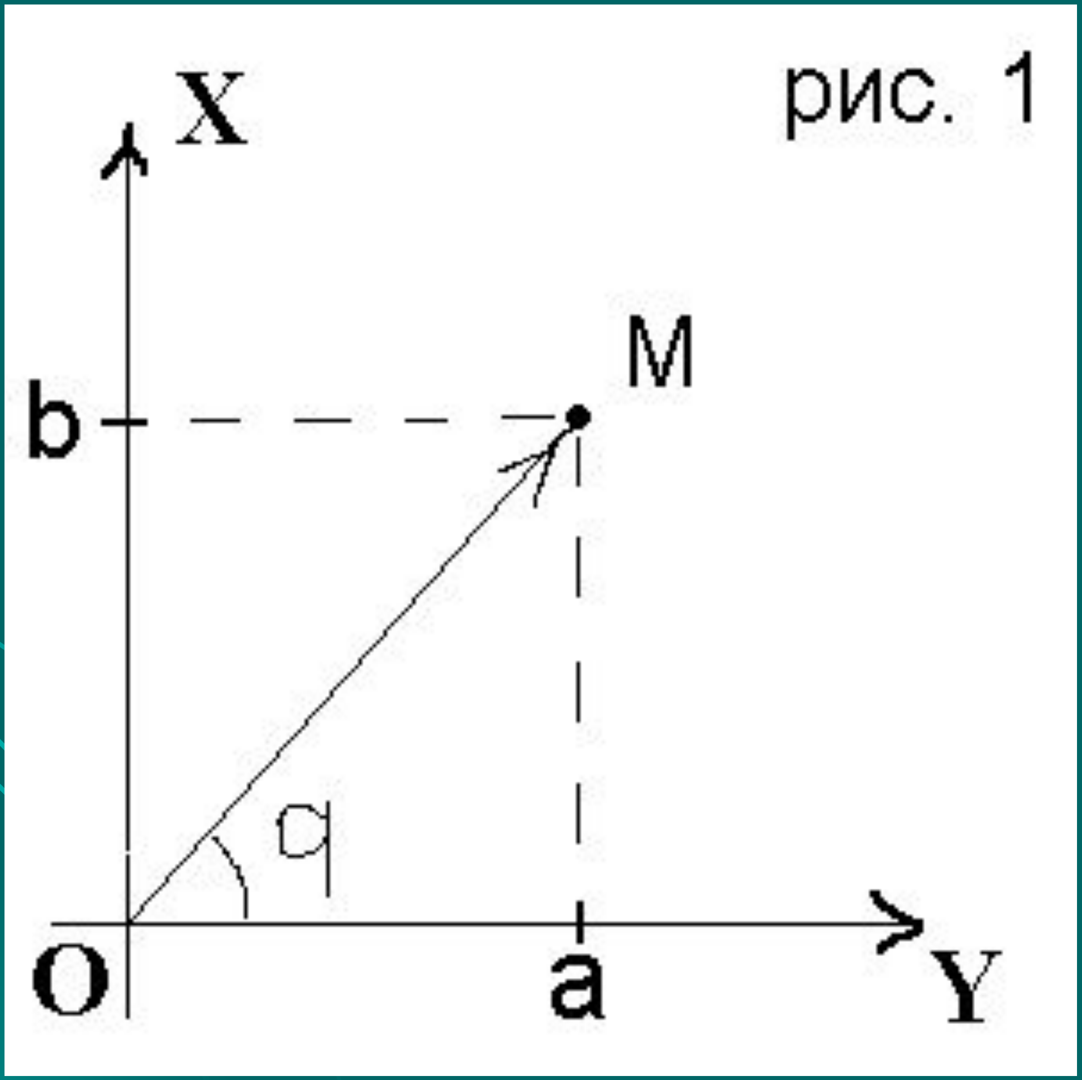
В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины.

После создания теории комплексных чисел возник вопрос о существовании “гиперкомплексных” чисел - чисел с несколькими “мнимыми” единицами. Такую систему построил в 1843 году ирландский математик У. Гамильтон, который назвал их “кватернионами”

$$a + bi + cj + dk$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

4.Геометрическое представление комплексного числа



Такая плоскость называется комплексной. Вещественные числа на ней занимают горизонтальную ось, мнимая единица изображается единицей на вертикальной оси; по этой причине горизонтальная и вертикальная оси называются соответственно вещественной и мнимой осями.

5. Тригонометрическая форма комплексного числа.

- Абсцисса a и ордината b комплексного числа a + bi выражаются через модуль r и аргумент q. Формулами

$$a = r \cos q , \qquad r = a/\cos q$$

$$b = r \sin q , \qquad r = b/\sin q$$

r – длина вектора (a+bi) , q – угол, который он образует с положительным направлением оси абсцисс

Комплексные числа, несмотря на их “лживость” и недействительность, имеют очень широкое применение. Они играют значительную роль не только в математике, а также в таких науках, как физика, химия. В настоящее время комплексные числа активно используются в электромеханике, компьютерной и космической индустрии

- Поэтому всякое комплексное число можно представить в виде

    $r(\cos q + i \sin q)$,

где $r > 0$ т.е. $z=a+bi$ или $z=r*\cos q + r*\sin q$

Это выражение называется нормальной тригонометрической формой или, короче, тригонометрической формой комплексного числа.

Спасибо за внимание! ☺