



Интеграл и первообразная



Содержание



- 1. *Первообразная*
 - 1.1. Определение первообразной
 - 1.2. Основное свойство первообразной
 - 1.3. Три правила нахождения первообразной
 - 1.6. Таблица
- 2. *Интеграл*
 - 2.1. Площадь криволинейной трапеции
 - 2.2. Интеграл. Формула Ньютона - Лейбница

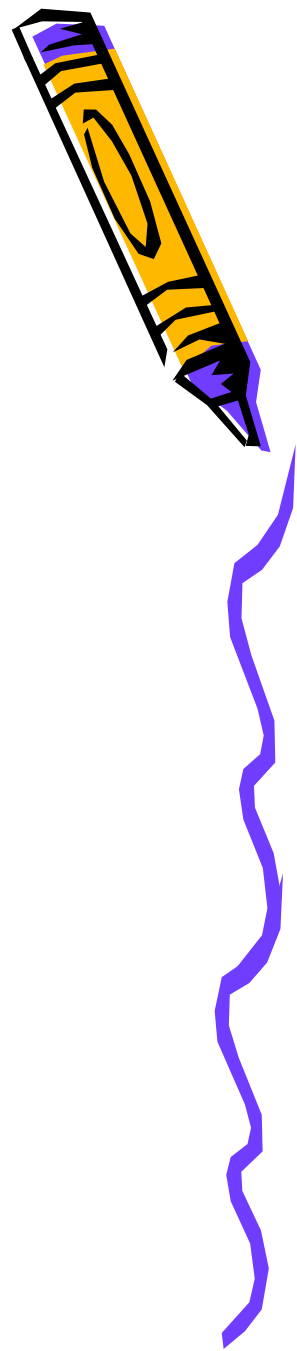


1. Первообразная

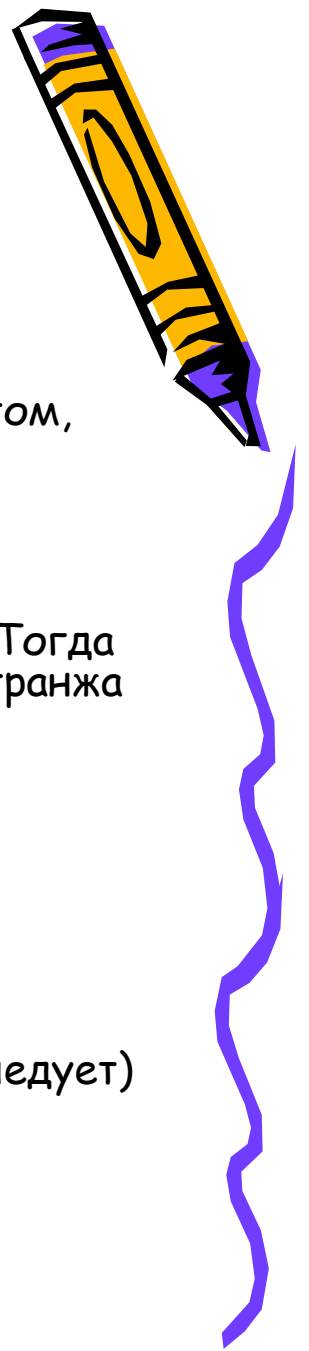
1.1. Определение первообразной

- **Определение:** Функция F называется *первообразной* для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка

- $F'(x) = f(x)$



1.2 основное свойство первообразной



- **общий вид первообразных.** Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные.
-
- **Признак постоянства функции.** Если $F'(x) = 0$ на некотором промежутке I , то функция F - постоянна на этом промежутке.
- **Доказательство.** Зафиксируем некоторое x_0 из промежутка I . Тогда для любого числа x из такого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число c , заключенное между x и x_0 , что
- $F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0)$.
- По условию $F'(c) = 0$, так как $c \in I$, следовательно,
- $F(x) - F(x_0) = 0$.
- Итак, для всех x из промежутка I
- $F(x) = F(x_0)$,
- т.е. функция F сохраняет постоянное значение.
- (продолжение следует)



Основное свойство первообразной...



- Все первообразные функции f можно записать с помощью одной формулы, которую называют общим видом первообразных для f функции f . Справедлива следующая теорема (основное свойство первообразных):
- **Теорема.** Любая первообразная для f функции f на промежутке I может быть записана в виде
 - $F(x) + C,$
- Где $F(x)$ - одна из первообразных для f функции $f(x)$ на промежутке I , а C - произвольная постоянная.



Основное свойство первообразной



- Свойства первообразных

- 1) какое бы число ни поставить в выражение $F(x)+C$ вместо C , получим первообразную для f на промежутке I .
- 2) какую бы первообразную Φ для f на промежутке I ни взять, можно подобрать такое число C , что для всех x из промежутка I будет выполнено равенство
 - $\Phi(x) = F(x) + C$.
- **Доказательство.**
 - 1) по условию функции F - первообразная для f на промежутке I . Следовательно, $F'(x)=f(x)$ для любого $x \in I$, поэтому
 - $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$,
 - т.е. $F(x) + C$ - первообразная для f .
 - 2) пусть $\Phi(x)$ - одна из первообразных для функции f на том же промежутке I , т.е. $\Phi'(x)=f(x)$ для всех $x \in I$. Тогда
 - $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
 - Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что разность $\Phi(x) - F(x)$ есть функция, принимающая некоторое постоянное значение C на промежутке I .
 - Таким образом, для всех x из промежутка I справедливо равенство $\Phi(x) - F(x) = C$, что и требовалось доказать.



1.3 три правила нахождения первообразных

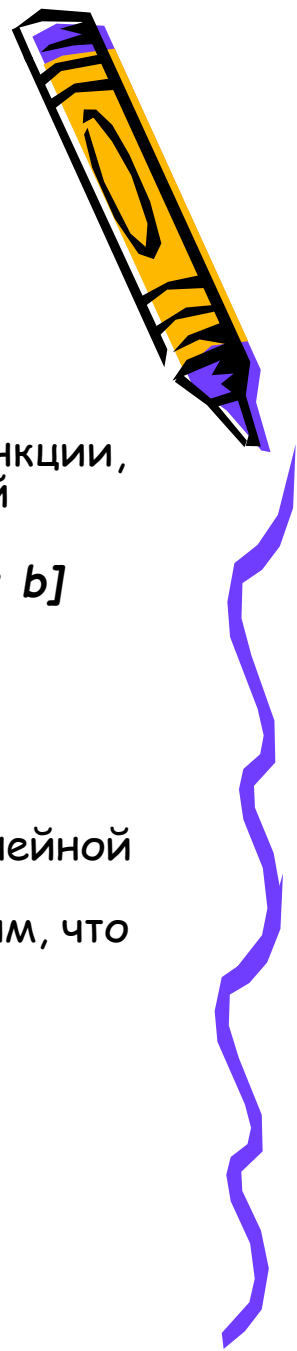


- **Правило 1.** если F есть первообразная для f , а для G - первообразная для g , то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.
- Действительно, так как $F'=f$ и $G'=g$, по правилу вычисления производной суммы имеем:
$$(F+G)' = F' + G' = f + g.$$
- **Правило 2.** если F есть первообразная для f , а k - постоянная, то функция kF - первообразная для kf .
- Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому:
$$(kF)' = kF' = kf.$$
- **Правило 3.** если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b - постоянные, причем $k \neq 0$, то $F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.
- Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:
$$(F(kx+b))' = F'(kx+b) \cdot k = f(kx+b) \cdot k$$



интеграл

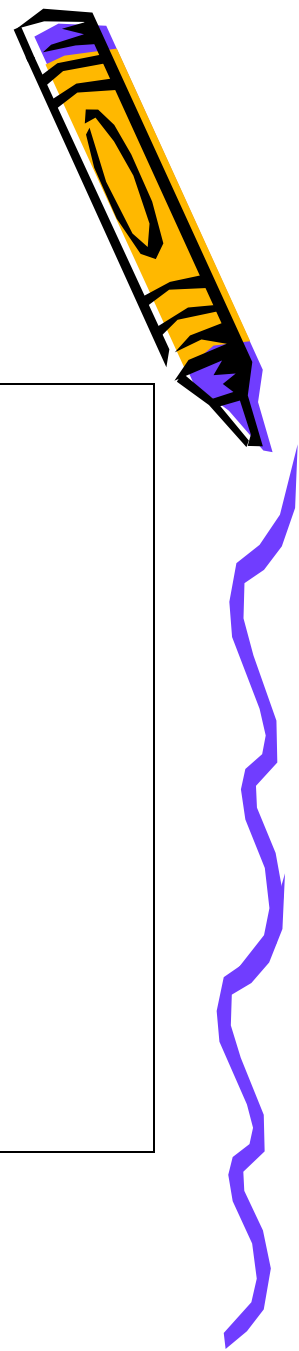
2.1. площадь криволинейной трапеции



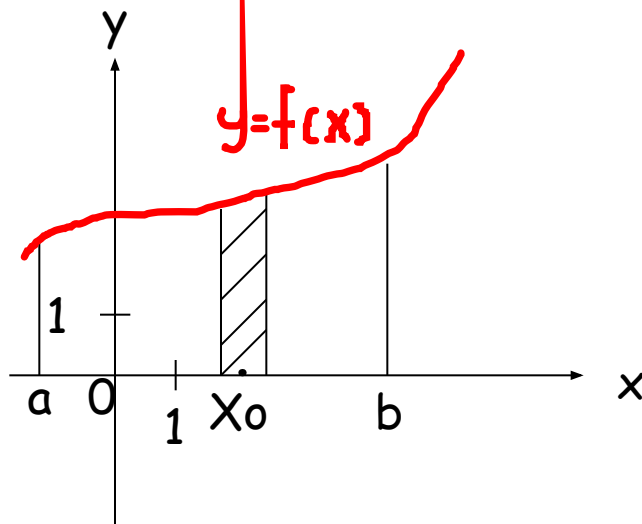
- Пусть на отрезке $[a; b]$ оси OX задана непрерывная функция f , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, называют криволинейной трапецией.
- **Теорема.** Если f - непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F - ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.
 - $S = F(b) - F(a)$.
- **Доказательство.** Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. Если $a < x < b$, то $S(x)$ - площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку X_0 (рис. 1). Если $x = a$, то $S(a) = 0$. Отметим, что $S(b) = S$ - площадь криволинейной трапеции).
- Докажем, что
 - $S'(x_0) = f(x_0)$.

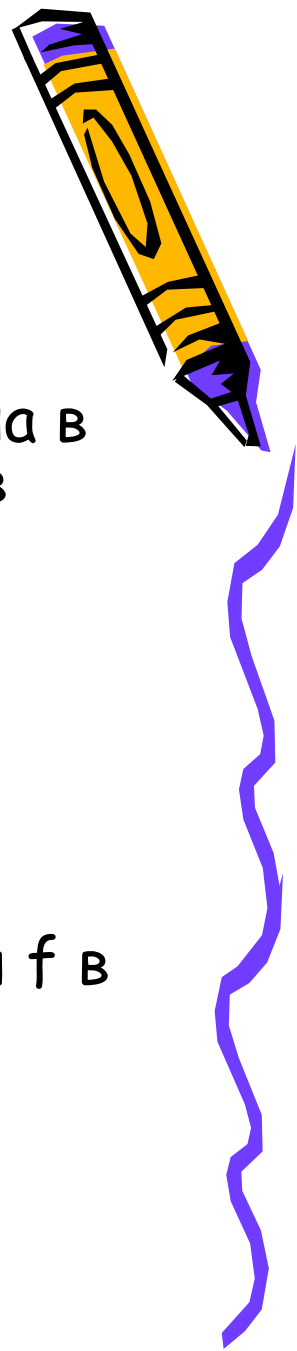


2.1 площадь криволинейной трапеции...



• Рис.1





2.1 площади криволинейной трапеции...

- Пусть X_0 принадлежит $[a, b]$. $f(x)$ непрерывна в X_0 . Тогда в достаточно малой окрестности в точке X_0 функцию $f(x)$ можно считать постоянной и равной $f(X_0)$.
- Тогда приращение равно площади приближенно равно: $f(x) \cdot \Delta x$
- $\Delta S : \Delta x = f(x)$
- Если $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta S : \Delta x \rightarrow S'(X_0)$
- $S'(X_0) = f(X_0)$ т.е S - первообразная функции f в точке X_0



2.1 площадь криволинейной трапеции



- Получили, что S есть первообразная для f . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех $x \in [a; b]$ имеем:
 - $S(x) = F(x) + C,$
- Где C - некоторая постоянная, а F - одна из первообразных для функции f . Для нахождения C подставим $x = a$:
 - $F(a) + C = S(a) = 0,$
- Откуда $C = -F(a)$. Следовательно,
 - $S(x) = F(x) - F(a).$
- Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу $S(x) = F(x) - F(a)$, получим:
 - $S = S(b) = F(b) - F(a).$





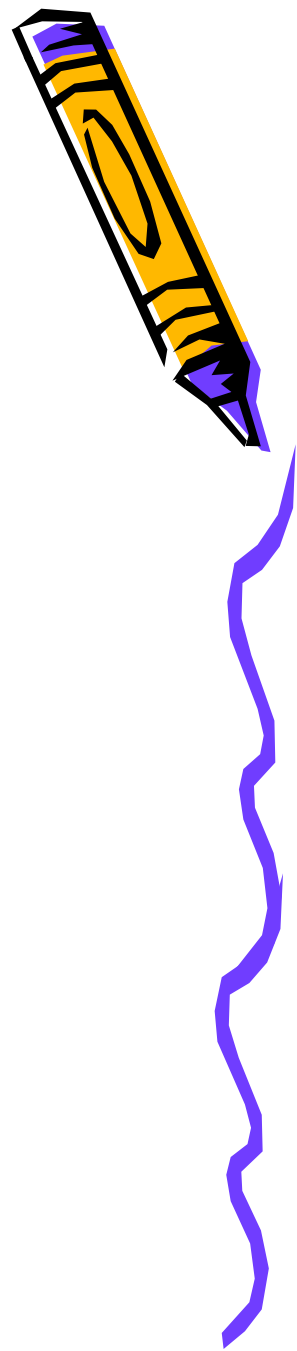
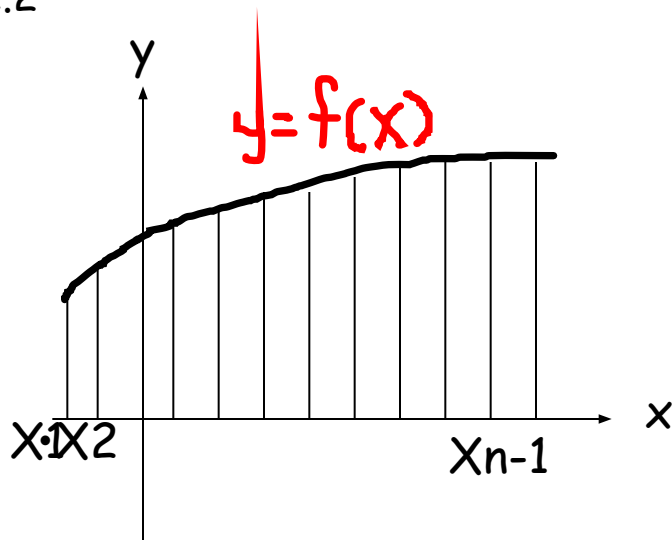
2.2 Интеграл. Формула Ньютона – Лейбница

- **Понятие об интеграле.** Пусть функция f неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a; b]$, тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.
- Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины точками
- $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, и пусть $\Delta x = x_k - x_{k-1}$, где $k = 1, 2, \dots, n-1, n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим прямоугольник высотой $f(x_{k-1})$. сумма площадей всех таких прямоугольников (рис.2) равна:
$$S_n = \Delta x (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$
- Т.к $f(x)$ непрерывная функция, то при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е. $n \rightarrow \infty$, то $S_n \rightarrow S$



2.2

• Рис.2



2.2

- Для любой непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ доказано, что $S_n \rightarrow S$ к некоторому числу. Это число называют интегралом функции.
- $\int_a^b f(x) dx$, где $f(x)$ подинтегральная функция, a - нижний предел интегрирования, b - верхний, $\int$ - интеграл, x - переменная. Интеграл - это предел интегрирования сумм. Сравнивая $S = F(b) - F(a)$ и $S = \int_a^b f(x) dx$, можно записать

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

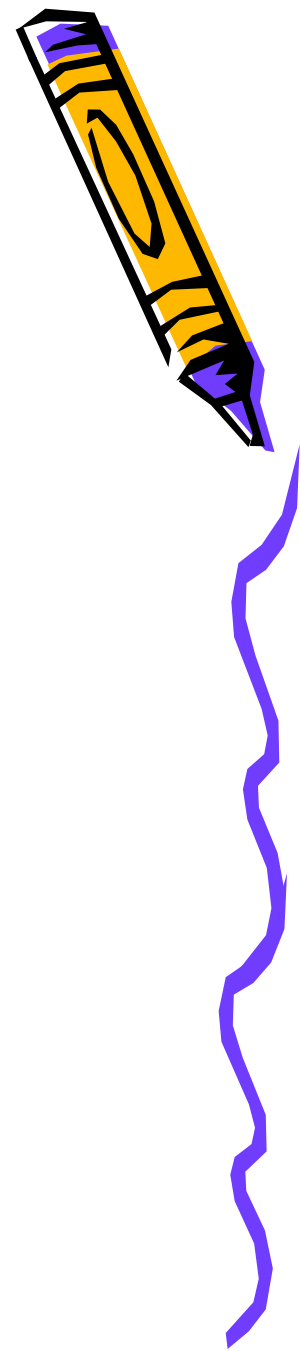
2.2

- Эта формула называется *формулой Ньютона - Лейбница*. Она верна для любой функции f , непрерывной на отрезке $[a; b]$.

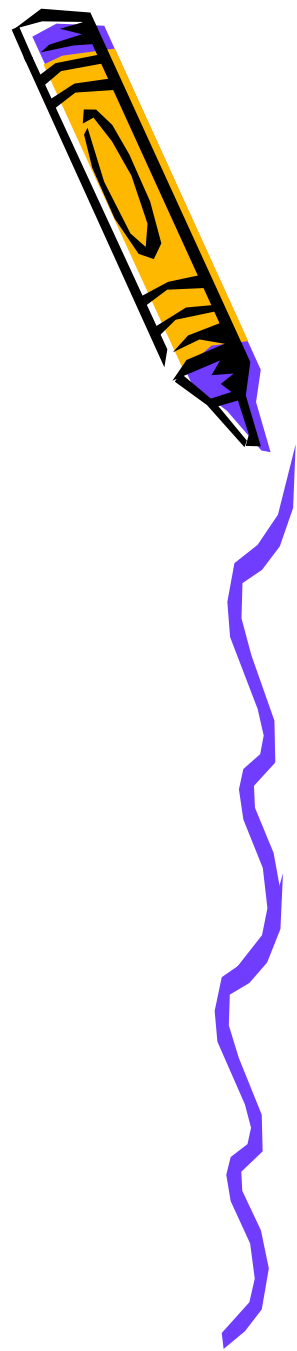


1.6 Таблица первообразных

Производная функции $f'(x)$	Функция $f(x)$	Первообразная функции $F(x) + C$
0	1	x
0	k (число)	kx
1	x	$\frac{x^2}{2}$
k	$kx + b$	$k\frac{x^2}{2} + bx$
$2x$	x^2	$\frac{x^3}{3}$
$2ax + b$	$ax^2 + bx + c$	$\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx$
$3x^2$	x^3	$\frac{x^4}{4}$



1.6 Таблица первообразных



$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
nx^{n-1}	$x^n, n \neq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$-k\sin kx$	$\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx$
$k\cos kx$	$\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx$
$-\frac{k}{x^2}$	$\frac{k}{x}$	$-$
$-\frac{2k}{x^3}$	$\frac{k}{x^2}$	$-\frac{k}{x}$

