Лекции по алгебре и началам анализа

10 класс

Лекция №1

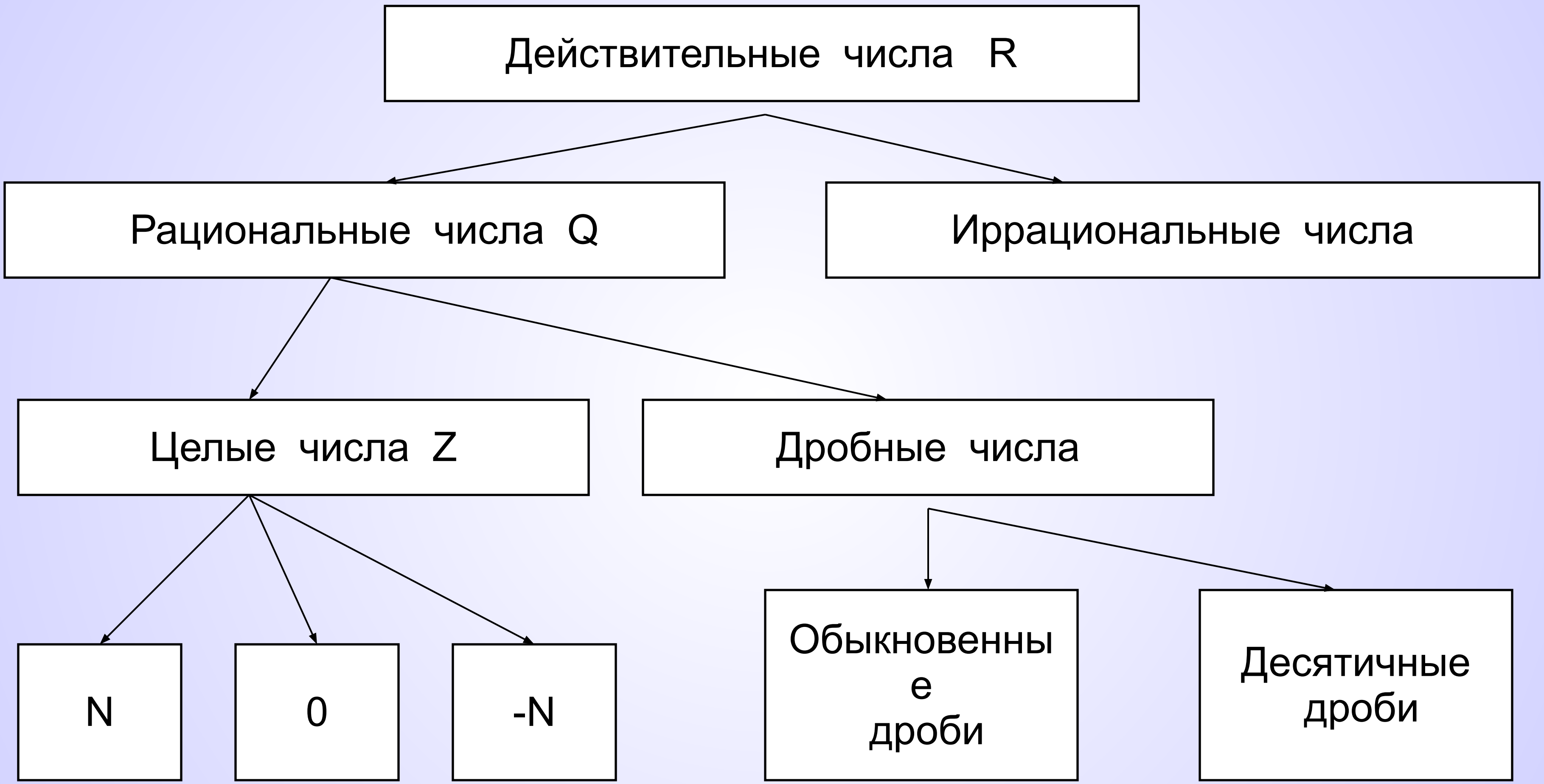
Натуральные числа.

Делимость натуральных чисел.

Действительные числа

и действия над ними.

1. Классификация действительных чисел.



2. Натуральные числа. Делимость натуральных чисел.

Определение.
Натуральные числа- числа, используемые при счете предметов: 1, 2, 3, 4, …

Теорема.
Для любого натурального числа a и натурального числа b существует единственная пара чисел q и r таких, что $a=bq+r$, где q- натуральное число, r-натуральное число или нуль, причем $r < b$

Если остаток $r=0$, то число a делится на число b нацело (без остатка).

Пример: $28 = 9 \cdot 3 + 1; \quad 28 = 7 \cdot 4 + 0$

3. Признаки делимости натуральных чисел

Натуральное число n делится на натуральное число p, равное

1) **2**, если его последняя цифра четная или 0;

2) **5,** если его последняя цифра 5 или 0;

3) **10**, если его последняя цифра 0;

4) **4 (25)** , если две его последние цифры нули или образуют число, делящаяся на 4(25);

5) **8 (125)** , если три его последние цифры нули или образуют число, делящаяся на 8 (125);

6) **3 (9),** если сумма всех его цифр делится на 3 (9);

7) **7 (11, 13),** если разность между суммой его цифр стоящих на четных местах и суммой цифр, стоящих на нечетных местах делится на 7 (11,13).

3. Признаки делимости натуральных чисел

Пример:

1) 2: 264; 37860
2) 5: 379800; 4675
3) 10: 3786300
4) 4 (25): 4500; 5316; 254750
5) 8 (125): 53064 45250
6) 2745; 366
7) 3872;

4. Взаимно простые числа.

Определение.

Два числа называются <u>взаимно простыми</u>, если они не имеют общих натуральных делителей кроме 1.

1) Если число *a* делится на каждое из двух взаимно простых чисел *b* и *c* , то оно делится на их произведение.

$$75 \vdots 3,\ 75 \vdots 5 \Rightarrow 75 \vdots (3 \cdot 5)$$

2) Если произведение *ab* делится на *c,* причем *a* и *c* взаимно простые числа, то *b* делится на *c*.

$$(3 \cdot 25) \vdots 5 \Rightarrow 25 \vdots 5$$

5. НОК и НОД натуральных чисел.

Определение.
Наименьшее общее кратное (НОК) натуральных чисел n1,n2,…nk – наименьшее число n, которое делится нацело на числа n1,n2,…nk.

n=НОК(n1,n2,…nk)

Определение.
Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел n1,n2,…nk – наибольшее число n, на которое делятся нацело числа n1,n2,…nk.

n=НОД(n1,n2,…nk)

Пример

$$49896 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11$$

$$26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

$$НОК\ (49896;26460) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1$$

$$НОД\ (49896;26460) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^0$$

6. Основная теорема арифметики.

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

$p_1; p_2; \ldots p_k$ – *различные простые множители*

$\alpha_1; \alpha_2; \ldots \alpha_k$ – *натуральные числа*

Представленное в теореме разложение числа называется
<u>каноническим разложением числа *n*.</u>

7. Делимость суммы и произведения.

1) Если в сумме чисел каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число: $3+27+9+117=3m$.

2) Если два числа делятся на некоторое число, то их разность делится на это число: $104-16 = 4m$.

3) Если в сумме чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число:
$3+27+35+117 \neq 3m.$

4) Если в произведении чисел один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число:

$$25 \cdot 17 \cdot 131 = 5m$$

8. Свойства, связанные с последовательным расположением натуральных чисел.

1) Одно из n последовательных целых чисел делится на n;

2) Одно из двух последовательных четных чисел делится на 4;

3) Произведение трех последовательных целых чисел делится на 6;

4) Произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

9. Целые числа.

Определение.
Целые числа – натуральные числа, числа противоположные натуральным и нуль.

Многие свойства делимости целых чисел аналогичны свойствам делимости натуральных чисел.

10. Дробные числа.

Определение.
Обыкновенная дробь (дробь) – число, представимое в виде $\frac{p}{q}$, где *p*- числитель дроби (целое число), *q*- знаменатель дроби (натуральное число).

***Основное свойство дроби*.**
Если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же число, отличное от нуля или разделить на их общий множитель, то получится дробь равная данной.

$$\frac{p}{q} = \frac{pk}{qk}; \ \ k \in Z, k \neq 0$$

Определение.
Положительная дробь $\frac{p}{q}$ правильная, если ее числитель меньше знаменателя, в противном случае – дробь неправильная.

10. Дробные числа.

Определение.
Несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой содержит только множители 2 и 5, можно записать в виде конечной десятичной дроби.

$$\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 5^2}{(2 \cdot 5)^3} = \frac{75}{1000} = 0{,}075$$

Определение.
Несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой содержит другие простые множители кроме 2 и 5, можно записать в виде бесконечной периодической десятичной дроби. При этом повторяющаяся группа цифр, называется периодом.

$$\frac{59}{110} = 0{,}536363636... = 0{,}5(36)$$

Определение.
Число представимое в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби называется рациональным числом.

11. Иррациональные числа.

Определение.
Иррациональное число – бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Пример: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$