

ДЕЛЕНИЕ ВО МНОЖЕСТВЕ МНОГОЧЛЕНОВ



ЧТО ТАКОЕ МНОГОЧЛЕН?

Многочленом с переменной x (или от переменной x), называют сумму степеней переменной x с натуральным показателем, с некоторыми коэффициентами, то есть:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ – некоторые числа, причем $a_0 \neq 0$, n – натуральное число. $P_n(x)$ – обозначение многочлена степень которого равна n .

Многочлен $P(x)$ делится на
многочлен $Q(x) \neq 0$, если P
 $(x) = Q(x) \cdot M(x)$,
где $M(x)$ – некоторый
многочлен.

Свойства делимости многочленов «столбиком»:



1 СВОЙСТВО:

Если многочлен $P_n(x)$ делится
на многочлен $Q_k(x)$, а
многочлен $Q_k(x)$ делится на
многочлен $M_m(x)$, то
многочлен $P_n(x)$ делится на
многочлен $M_m(x)$.

2 СВОЙСТВО:

Если многочлены $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ делятся на многочлен $M_k(x)$, то многочлены $P_n(x)+Q_n(x)$ и $P_n(x)-Q_n(x)$ делятся на многочлен $M_k(x)$, а многочлен $P_n(x) \cdot Q_n(x)$ делится на многочлен $M_k^2(x)$.

3 СВОЙСТВО:

Если $P(x)$ делится на $Q(x)$, то всякий корень $Q(x)$ является корнем $P(x)$. Действительно если $P(x) = Q(x) \cdot M(x)$ и $Q(c) = 0$, то $P(c) = Q(c) M(c) = 0$.

Алгоритм деления многочленов

«СТОЛБИКОМ»

1. Расположить делимое и делитель в убывающих степенях x ;
2. Разделить старший член делимого на старший член делителя; затем полученный одночлен сделать первым членом частного;
3. Первый член частного умножить на делитель, результат вычесть из делимого; полученная в результате разни́ца является первым остатком;
4. Чтобы получить следующий член частного, нужно с первым остатком поступить так, как поступали с делимым и делителем в пунктах 2 и 3.
5. Это следует продолжать до тех пор, пока не будет получен остаток, равный нулю или остаток, степень которого меньше степени делителя.

Разделить уголком многочлен

$P(x)=10x^2-7x-12$ на
многочлен $Q(x)=5x+4$.

Решение.

делимое	$\underline{10x^2-7x-12}$	$5x+4$	делитель
	$10x^2+8x$	$2x-3$	частное

первый остаток $\underline{-15x-12}$
 $-15x-12$

0 остаток

Ответ: $2x-3$.

Разделить многочлен $P(x)=3x^4+2x^2-1$ на
многочлен $Q(x)=x^2+x$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 2x^2 - 1 & x^2 + x \\ \underline{3x^4 + 3x^2} & 3x^2 - 3x + 5 \\ -3x^3 + 2x^2 - 1 & \\ \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\ & 5x^2 - 1 \\ & \underline{5x^2 + 5x} \\ & -5x - 1 \end{array}$$

Ответ: частное $3x^2-3x+5$, остаток- $5x-1$.

Задача

При каких натуральных значениях n выражение $\frac{2n^2 - 11n + 13}{n - 3}$ является целым числом?

Решение.

Разделим числитель дроби на знаменатель с остатком:

$$\begin{array}{r|l} 2n^2 - 11n + 13 & n - 3 \\ 2n^2 - 6n & 2n - 5 \\ \hline -5n + 13 & \\ -5n + 15 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

Таким образом, исходное выражение равно $2n - 5 - \frac{2}{n - 3}$, что

является целым числом тогда и только тогда, когда 2 нацело делится на $n - 3$. поскольку целыми делителями числа 2 являются числа -2, -1, 1, 2 и только они, получаем $n = 1, 2, 4, 5$.

Ответ: $n = 1, 2, 4, 5$.

Степень частного равна
разности степеней делимого и
делителя, а степень остатка
всегда меньше степени
делителя.



Алгоритм вычислений по схеме Горнера:



1 шаг. Под первым коэффициентом делимого a_0 пишется ещё раз этот коэффициент.

2 шаг. Под коэффициентом a_1 пишется число $b_1 = a_0 b + a_1$.

3 шаг. Под коэффициентом a_2 пишется
число $b_2 = b_1 b + a_2$.

4 шаг. Под коэффициентом a_3 пишется
число $b_3 = b_2 b + a_3$; $b_3 = R$ – остаток.

Для любого многочлена

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и
любого числа c можно написать
разложение $P(x)$ по степеням
разности $x-c$:

$$P(x) = b_0(x-c)^n + b_1(x-c)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(x-c) + b_n.$$

Разложить многочлен $P(x)=x^4-5x^3-3x^2+9$ по
степеням разности $x-3$.

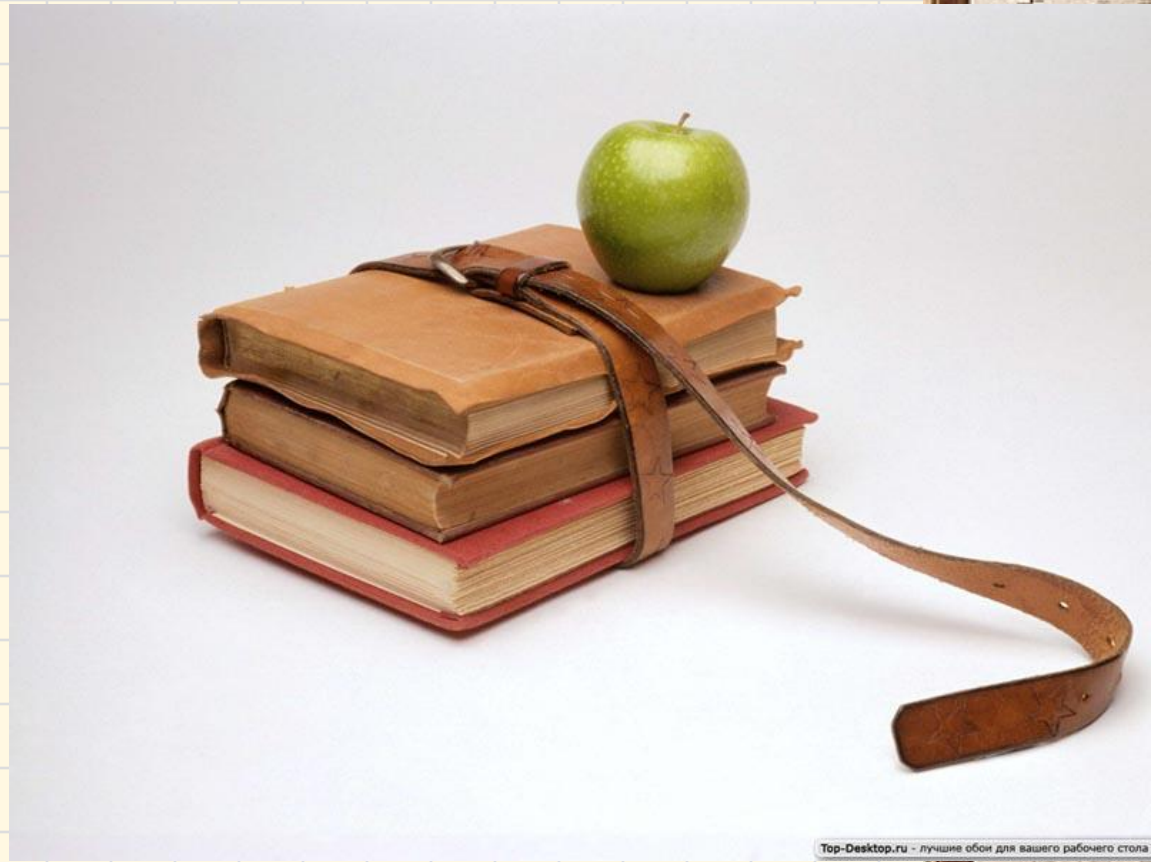
Решение.

Выполним деление по схеме Горнера:

	1	-5	-3	0	9
3	1	-2	-9	-27	-72
	1	1	-6	-45	
	1	4	6		
	1	7			
	1				

Таким образом,
$$P(x)=(x-3)^4+7(x-3)^3+6(x-3)^2-45(x-3)-72.$$

Теорема Безу



Определение.

Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ равен значению этого многочлена при $x=a$: $P(a)=R$.

Следствие №1. Если $x=a$ – корень уравнения $P_n(x)=0$, то $R=0$ и многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x-a$.

Следствие №2. Если многочлен $P_n(x)$ делится нацело на двучлен $x-a$, то $x=a$ – корень уравнения $P_n(x)=0$.

Задача

Выяснить, делится ли нацело
многочлен $P(x)=x^{100}+3x^{79}+x^{48}-x^{27}$ на
 $x+1$.

Решение.

Остаток от деления $P(x)$ на $x+1$ равен
$$P(-1)=(-1)^{100}+3 \cdot (-1)^{79}+(-1)^{48}-(-1)^{27}$$
$$=1-3+1+1=0.$$

Ответ: многочлен $P(x)$ нацело
делится на $x+1$

Список используемой литературы

- Гусев В.А., Мордкович А.Г. Мат.: Справочные материалы: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 1988 – 416с.:ил.
- Дорофеев Г.Д. «Многочлены с одной переменной». / Журнал математика для школьников. – 2005год. – №3
- Колягин Ю. «Многочлены и уравнения высших степеней». / Учебно-методическая газета «Математика» – 2005год – №2
- Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / С.М.Никольских, М.К. Потапов, Н.Н.Решетников, А.В.Шевпин. – М.: Просвещение, 2006год
- Факультативный курс по математике: Учебное пособие для 7-9класс средней школы / Составитель И.Л.Никольская. – М.: Просвещение, 1991год
- Энциклопедический словарь юного математика: сост. Савин А.П. – М.: Педагогика, 1985 – 352с.:ил.