Тема урока: «Приведённое квадратное уравнение. Теорема Виета.»

Цель урока:

1. Повторить решение квадратных уравнений общего вида, неполных квадратных уравнений.
2. Рассмотреть и доказать теорему Виета и сформулировать теорему, обратную теореме Виета.
3. Научиться применять теоремы при решении уравнений и задач.

Учитель математики МОУ «СОШ № 58» Шаранова Екатерина Юрьевна

Квадратное уравнение общего вида.

Квадратным уравнением

называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где a, b, c –

действительные числа,

причём a ≠ 0.

Неполные квадратные уравнения.

Квадратные уравнения называются **неполными**, если хотя бы один из коэффициентов **b** или **c** равен нулю.

Виды неполных квадратных уравнений:

$ax^2 = 0$, $b=0$ и $c=0$;

$ax^2 + c = 0$, $b=0$;

$ax^2 + bx = 0$, $c=0$.

Во всех этих уравнениях а - не равно нулю.

Решения неполных квадратных уравнений.

b=0 c=0	b=0 c≠0	b≠0 c=0
$ax^2=0$	$ax^2+c=0$	$ax^2+bx=0$
1 корень: x = 0	2 корня, если: а и с имеют разные знаки Нет корней, если: а и с имеют одинаковые знаки	2 корня: $x(ax+b)=0,$ $x_1=0$ $x_2=\frac{-b}{a}$

Решение полного квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

дискриминант квадратного уравнения

$D < 0$ **- корней нет**

$D = 0$ **- один корень** $x = -\frac{b}{2a}$

$D > 0$ **- два корня** $\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$

Квадратное уравнение с чётным вторым коэффициентом.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$b = 2k$ – четное число

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$

Решить уравнения:

1) $5x^2 = 0$ — $x = 0.$

2) $x^2 - 36 = 0$ — $x_1 = 6;$ $x_2 = -6.$

3) $x^2 + 4x = 0$ — $x_1 = 0;$ $x_2 = -4.$

4) $4x^2 - 4x + 3 = 0$ — Нет корней.

5) $4x^2 - 3x - 1 = 0$ — $x_1 = 1;$ $x_2 = -\frac{1}{4}.$

6) $x^2 + 10x + 25 = 0$ — $x = -5$

Приведённое квадратное уравнение.

Квадратное уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0$$

называется **приведённым** **(а=1).**

Квадратное уравнение общего вида можно привести к приведённому:

$$ax^2 + bx + c = 0 \,|: a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

где $p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}.$

Найдём корни уравнений.

№ п/п	Уравнение $x^2 + px + q = 0$	p	q	x_1	x_2	x_1+x_2	$x_1 \cdot x_2$
1	$x^2 + 5x + 6 = 0$	5	6	- 2	- 3	- 5	6
2	$x^2 - 5x - 6 = 0$	- 5	- 6	6	- 1	5	- 6
3	$x^2 - 7x + 6 = 0$	- 7	6	6	1	7	6
4	$x^2 + x - 6 = 0$	1	- 6	- 3	2	- 1	- 6

Теорема Виета.

Если числа x_1 и x_2
являются корнями уравнения
$x^2+px+q=0$
то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = q$$

т.е.сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Доказательство теоремы Виета.

Найдём корни уравнение $x^2 + px + q = 0$ по формуле общего вида, в котором $a = 1, b = p, c = q$

Получаем корни: $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ или $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Сложив оба корня, получаем: $x_1 + x_2 = -p$

Перемножив эти равенства, по формуле разности квадратов получаем:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q$$

Теорема, обратная теореме Виета.

Если числа p, q, x_1, x_2 *таковы, что*

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 \cdot x_2 = q$$

то x_1 *и* x_2 *- корни уравнения* $x^2 + px + q = 0$

Доказательство рассмотреть самостоятельно.

Запишите в тетрадях:

Теорема Виета и обратная ей:

x_1 и x_2 - корни уравнения

$$x^2+px+q=0$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 x_2 = q \qquad x_1 + x_2 = -p$$

Франсуа Виет – отец алгебры!

Франсуа Виет *(1540 – 1603)*

По праву достойна в стихах быть воспета

о свойствах корней теорема Виета…

*(***А.Гуревич***)*

Решить приведённое квадратное уравнение.

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

По теореме, обратной теореме Виета:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 5 \\ x_1 \cdot x_2 &= 6 \end{aligned} \right|$$

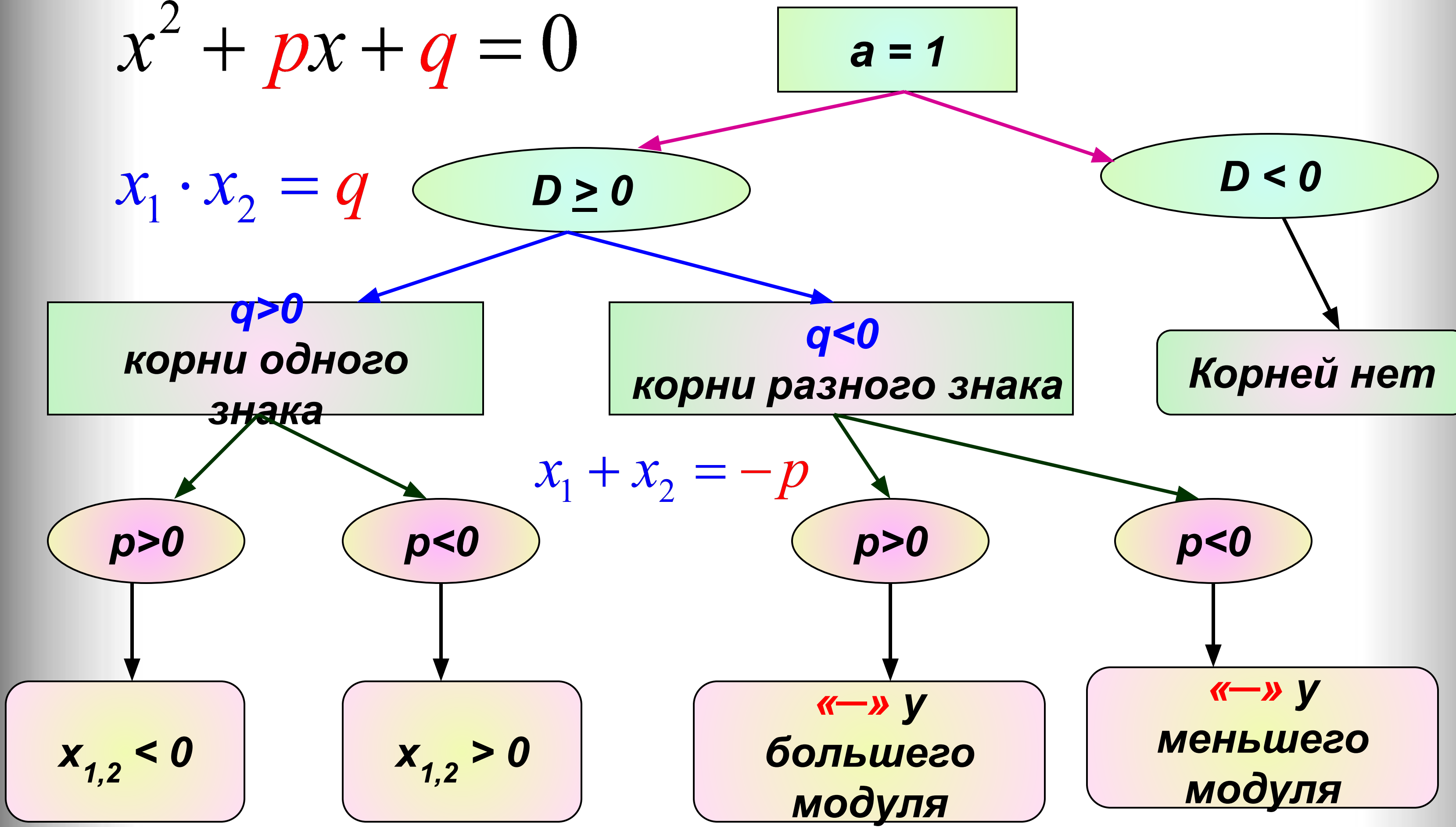
Ответ: 2; 3.

Учебник: № 450 (1,3,5)

Определение знака корней.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$



Задача: ***При каком значении q уравнение***

$$x^2 + 6x + q = 0$$

имеет корни, один из которых в 2 раза больше другого?

Решение:

По теореме, обратной теореме Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$

Пусть $x_2 = 2x_1$***, тогда***

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 = -6 \\ x_1 \cdot 2x_1 = q \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 = -6 \\ 2x_1{}^2 = q \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ 2 \cdot (-2)^2 = q \end{cases} \quad q = 8$$

Ответ: при ***q = 8.***

Задание №1 (работа в группах)

1. Выпишите на чистом листе пять пар чисел, являющихся корнями квадратных уравнений, которые вы решали дома.
2. Обменяйтесь этими листами с соседними группами.
3. По заданным корням составьте соответствующие им квадратные уравнения.
4. Дайте эти уравнения на проверку группе, которая готовила вам задание.

Задание №2 (работа в группах)

1. Не решая уравнение, определите знаки его корней:
   1) $\boldsymbol{x^2 + 45x - 364 = 0}$ – для первой группы;
   2) $\boldsymbol{x^2 + 36x + 315 = 0}$ – для второй группы;
   3) $\boldsymbol{x^2 - 40x + 364 = 0}$ – для третьей группы;
   4) $\boldsymbol{x^2 - 30x + 250 = 0}$ – для четвертой группы.

2. Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения, если известен первый:
   1) $\boldsymbol{x^2 + 45x - 364 = 0}$, $x_1 = 7$ – для пятой группы;
   2) $\boldsymbol{x^2 - 40x + 364 = 0}$, $x_1 = 14$ – для шестой группы.

Домашнее задание:

Обязательный I уровень:§8, п.24; №580 (а,б,в,г), №583(а,б);
дополнительно (по желанию) II уровень: №581 (а), №583(в);
III уровень: №585, №592.

Спасибо за урок!