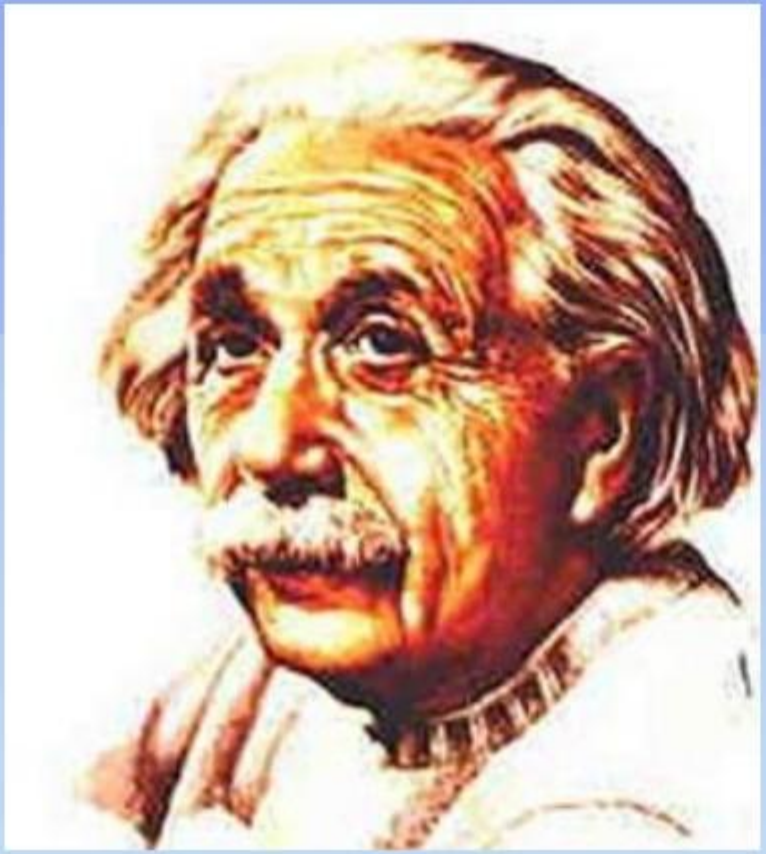
Показательные неравенства

« Мне приходится делить своё время между политикой и решением уравнений и неравенств . Однако решение уравнений и неравенств , по-моему, гораздо важнее , потому что политика существует только для данного момента , а уравнения и неравенства будут существовать вечно .»



Альберт Эйнштейн

Цель урока:

Формирование знаний об основных методах решения показательных неравенств

Вспомним:

1. Какие уравнения называются показательными?
2. Какие основные способы решения показательных уравнений вы знаете?

Показательные неравенства – ?

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени

Примеры: $3^x \le 9;\qquad 2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b \qquad a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b \qquad a^x \leq a^b$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b$ – *любое число.*

Решением неравенства с неизвестным x называют число x_0, при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство

Решить неравенство –

значит, найти все его решения или

показать, что их нет.

При a>1 функция возрастает

$$a^x < a^в \qquad a^x > a^в$$

$$x < в \qquad x > в$$

При 0<a<1 функция убывает

$$a^x < a^в \qquad a^x > a^в$$

$$x > в \qquad x < x_0$$

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$1)\, y = 5^x \qquad возрастающая,\, т.к.\, 5 > 1$$

$$2)\, y = 0{,}5^x \qquad убывающая,\, т.к.\, 0 < 0{,}5 < 1$$

$$3)\, y = 10^x \qquad возрастающая,\, т.к.\, 10 > 1$$

$$4)\, y = \pi^x \qquad возрастающая,\, т.к.\, \pi > 1$$

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$5)\, y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6)\, y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

Способы решения показательных неравенств:

1. **Уравнивание оснований правой и левой частей**

Стр. 81, задача 1

Решите неравенство:

$$2^{x} < 8,$$

$$2^{x} < 2^{3}, \quad y = 2^{t}(2 > 1)$$ возрастает на всей области определения,

$$x < 3.$$

$$x \in (-\infty; 3)$$

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

$$т.к. 3 > 1, то\ функция\ y = 3^{\mathrm{x}}\ возрастающая$$

$$x > 4$$

$$x \in (4; +\infty)$$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > 27,$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3},$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{t} \left(0 < \frac{1}{3} < 1\right)$$

убывает на всей области определения,

$$x < -3.$$

$$x \in (-\infty; -3)$$

Решите неравенства:

1). $3^x > 9$

$3^x > 3^2$

$x > 2$

Ответ $: x > 2.$

2). $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$x < 2$

Ответ $: x < 2.$

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$т.к. 0 < \frac{1}{2} < 1, то\ функция\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{x}}\ убывающая$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решите неравенство:

$$2^{3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$2^{3x} \geq 2^{-1};$$

т.к. основание $2 > 1$, *то функция возрастающая*

$$3x \geq -1;$$

$$x \geq -\frac{1}{3};$$

$$x \in \left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

$$5^{3x+1} - 1 \geq 0$$

$$5^{3x+1} - 1 \geq 0$$

$$5^{3x+1} \geq 1$$

$$5^{3x+1} \geq 5^0$$

$$3x + 1 \geq 0$$

$$x \geq -1/3$$

$$x \in [-1/3; +\infty)$$

$$(1{,}5)^{x-1} > \frac{4}{9}.$$

$$(1{,}5)^{x-1} > \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2},$$

$$1 - x < 2,$$

$$x > -1.$$

Стр. 81, задача 2,
стр. 82 задача 3

2. Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^{x} > 10$$

$$3^{x-3}(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^{3}) > 10$$

$$3^{x-3}(1+9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \,\Big|\, : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^{0}$$

3 > 1, то $x - 3 > 0$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

3. Метод почленного деления

:

4. Введение новой переменной

$$9^x - 10 \cdot 3^x < -9$$

$$3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

$$t^2 - 10t + 9 < 0$$

$$D = 10^2 - 4 \cdot 9 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$t_1 = \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$(t-9)(t-1) < 0$$

$$1 < t < 9$$

$$1 < 3^x < 9$$

3>1, то

$$3^x < 3^2; \quad 3^x > 3^0;$$

$$x < 2 \quad x > 0.$$

Стр. 82, задача 4

5. Графический метод

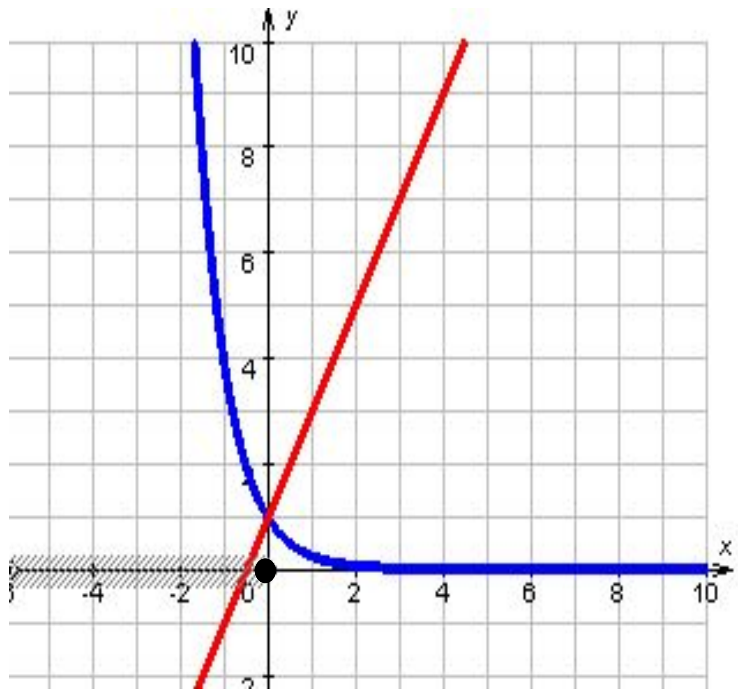
Стр. 82, задача 5

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x+1$$

$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ **убывает на R**

$g(x)=2x+1$ **возрастает на R**

Строим схематически графики



Неравенство выполняется при

$$x \leq 0$$

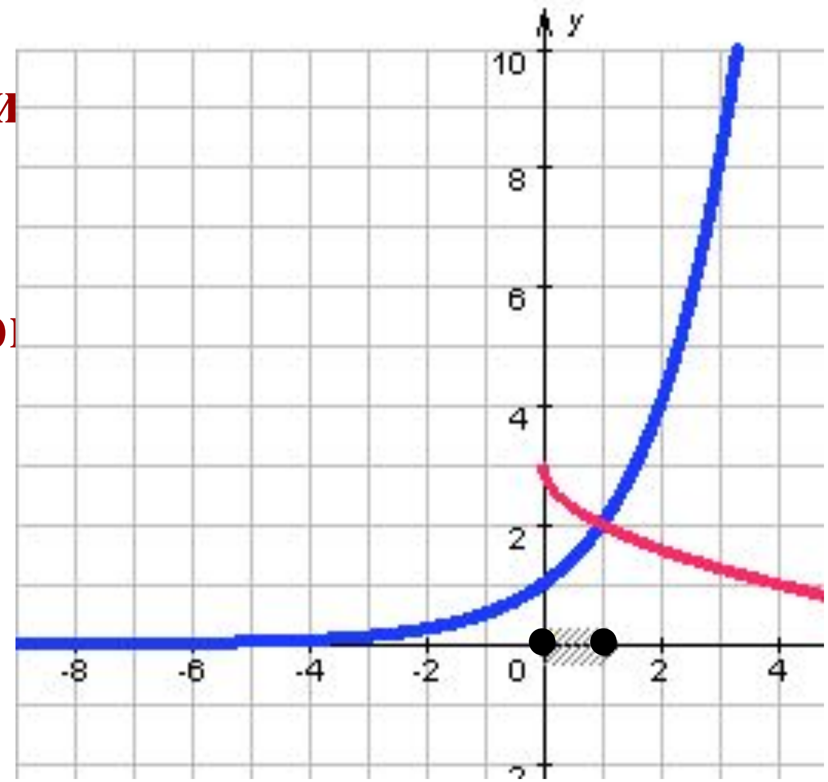
$$Ответ:(-\infty;0]$$

$$2^x \le 3 - \sqrt{x}$$

$f(x) = 2^x$ **возрастает на R**

$g(x) = 3 - \sqrt{x}$ **убывает на** $[0;+\infty)$

Строим схематически графи



Неравенство выполняется пр

$$0 \le x \le 1$$

$$Ответ: [0;1]$$

№228(1,2,3),
№229(1,2,4),
№231(1,2),
№232(1,2),
№233(1) ,
№236(1)

Итог урока:

Методы решения показательных неравенств

Приведение степеней к одному основанию

Графический

Вынесение общего множителя за скобки

Метод почленного деления

Метод введения новой переменной

Ресурсы:

1. Учебник, Ш.А Алимов, Ю. М. Колягин и др., Алгебра и начала математического анализа, Москва, Просвещение, 2017;
2. https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2017/02/01/pokazatelnye-uravneniya-urok-algebry-v-10-klasse;
3. https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2011/12/01/pokazatelnye-uravneniya-i-sposoby-ikh-resheniya;