

Критические точки функции, максимумы и минимумы.

Урок по алгебре и началам анализа в *11* классе по учебнику А. Н. Колмогорова.

Учитель математики МБОУ СОШ № *31* Туапсинского района
Краснодарского края Зайцева Нина Михайловна



Цели урока:

- **ОБУЧАЮЩАЯ :**

- 1) Ввести определение критических точек;
- 2) Рассмотреть теорему Ферма, которая является необходимым условием экстремума функции;
- 3) Вывести признак максимума функции и признак минимума функции;
- 4) Научиться решать задачи на данную тему, используя полученные знания

- **РАЗВИВАЮЩАЯ :**

- 1) Способствовать развитию общения как метода научного познания, аналитико-синтетического мышления, смысловой памяти и произвольного внимания,
- 2) Развитие навыков исследовательской деятельности

- **ВОСПИТАТЕЛЬНАЯ :**

- 1) Способствовать развитию творческой деятельности
- 2) Развивать у учащихся коммуникативные компетенции, потребности к самообразованию.

Математический

диктант

Функция задана графиком.

Укажите область определения этой функции.

1 $[-2; 4]$

2 $[-5; 6)$

3 $[-5; 5]$

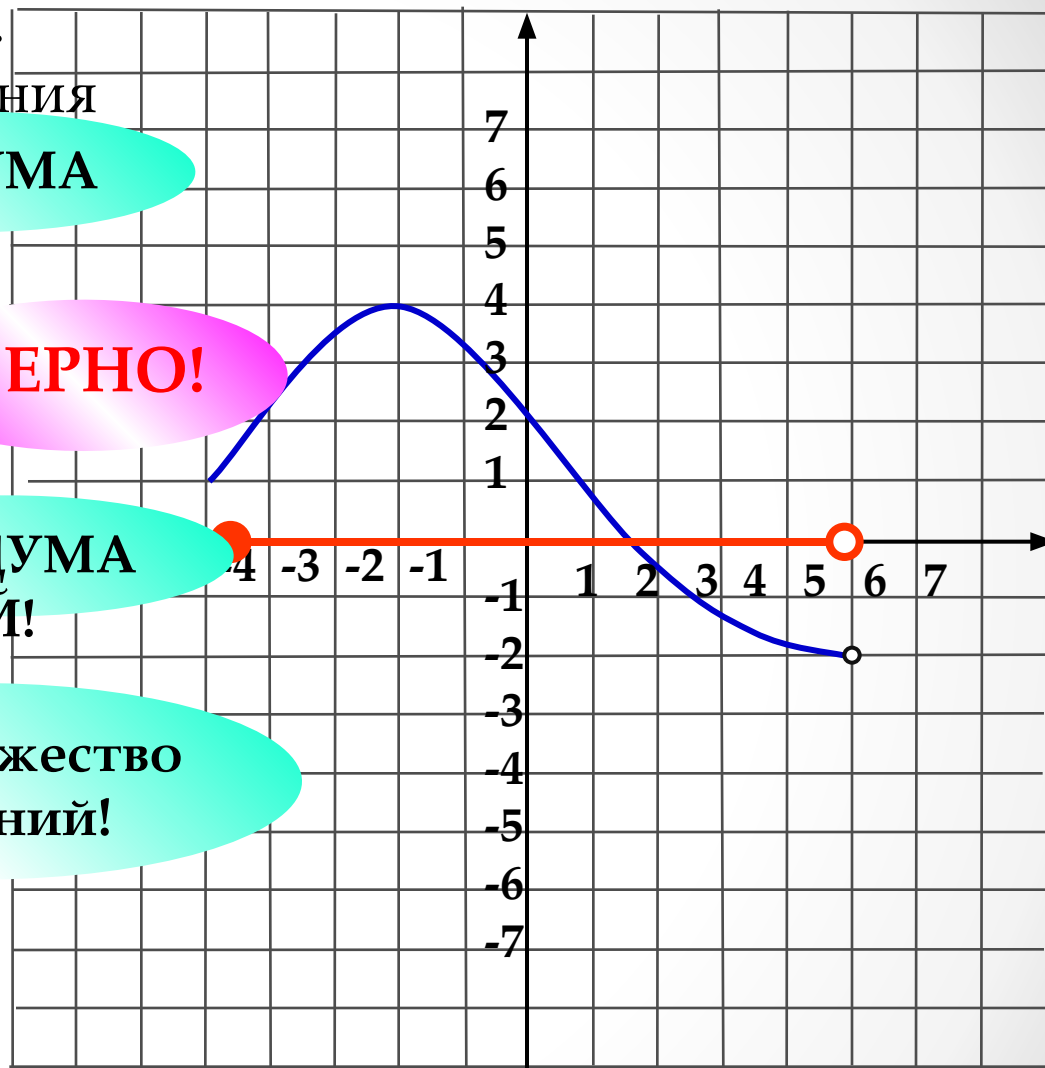
4 $(-2; 4]$

ПОДУМАЙ!

ВЕРНО!

ПОДУМАЙ!

Это множество значений!



Функция задана графиком. Укажите множество значений этой функции.

ПОДУМАЙ!

ПОДУМАЙ!

ВЕРНО!

Это область определения!

1 $[-5; 7]$

2 $[-3; 5]$

3 $(-5; 7)$

4 $(-3; 5)$

1	☐
2	☐
3	☒
4	☐
5	☐



В какой из указанных точек производная функции, график которой изображен на рисунке, отрицательна?

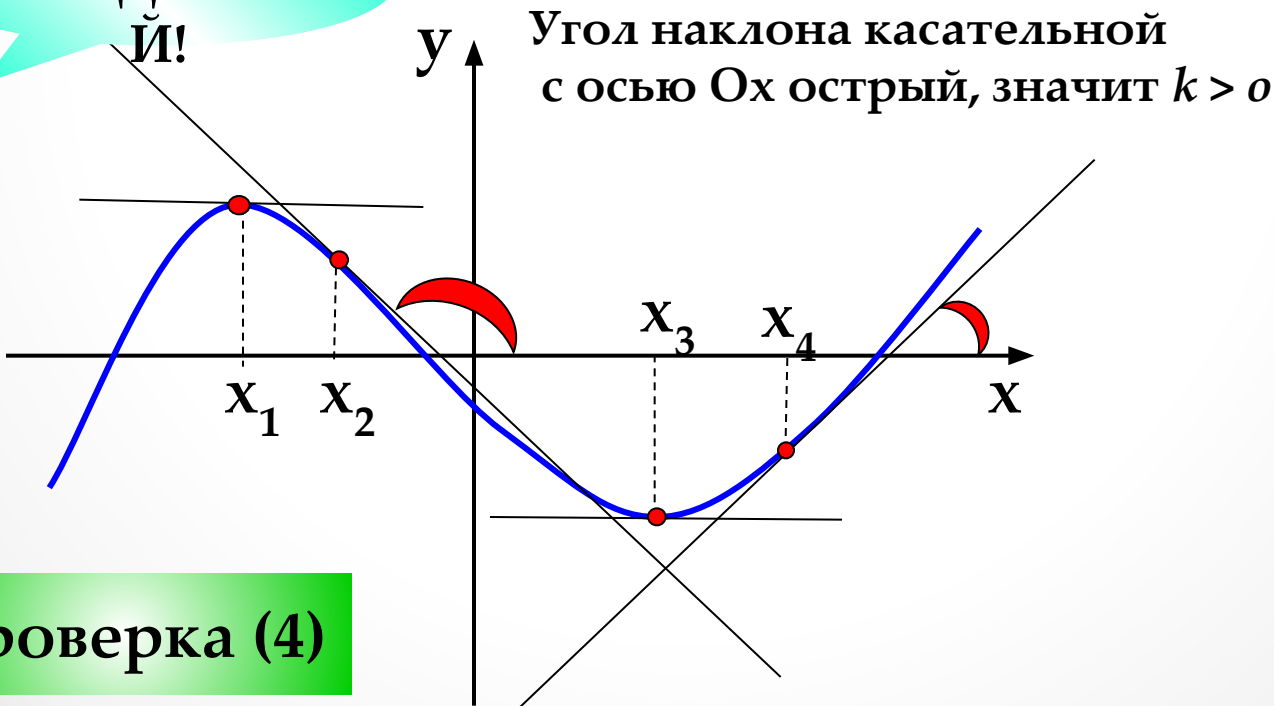
ПОДУМАЙ!

- 1 x_1 В этой точке производная равна нулю!
- 2 x_2 Угол наклона касательной с осью Ox тупой, значит $k < 0$.
- 3 x_3 В этой точке производная равна нулю!
- 4 x_4 Угол наклона касательной с осью Ox острый, значит $k > 0$.

Геометрический
смысл производной
 $k = \operatorname{tg} \alpha$

ВЕРНО!

ПОДУМАЙ!



1	☐
2	☒
3	☐
4	☐
5	☐

Проверка (4)



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной в точке x_0 .

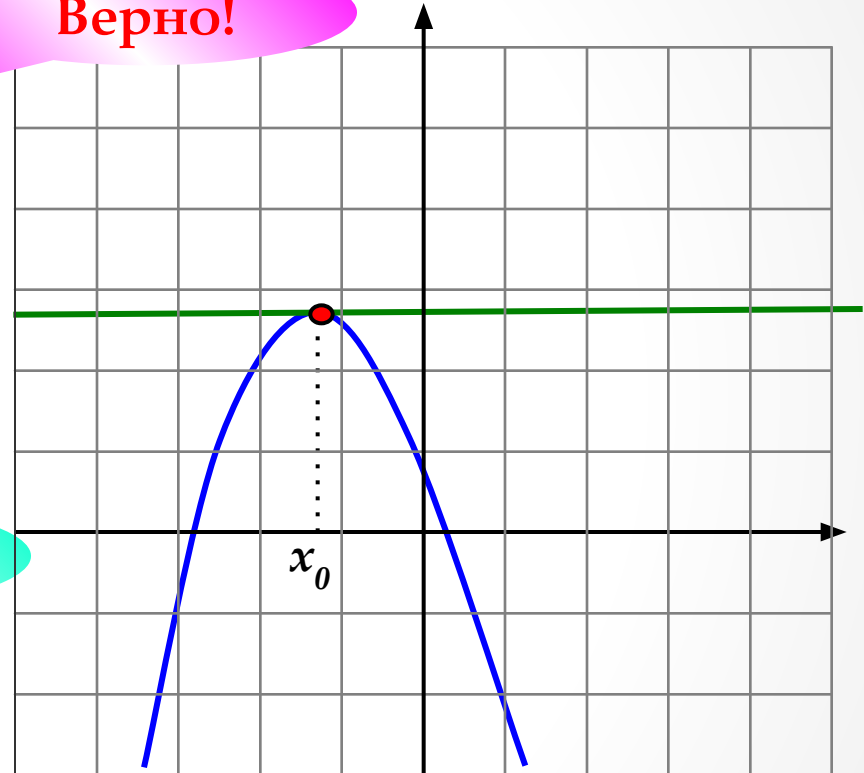
1	0	1	☒
2	1	2	☐
3	-1	3	☐
4	не существует	4	☐
		5	☐

Подумай!

Подумай!

Подумай!

Верно!



Геометрический смысл производной: $k = \operatorname{tg} \alpha$

Угол наклона касательной с осью Ox равен 0 (касательная параллельна оси Ox , значит $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$)



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$.

Укажите в какой точке **значение производной отрицательно**.

В этой точке производная не существует

Угол наклона касательной с осью Ox острый, значит $k > 0$.

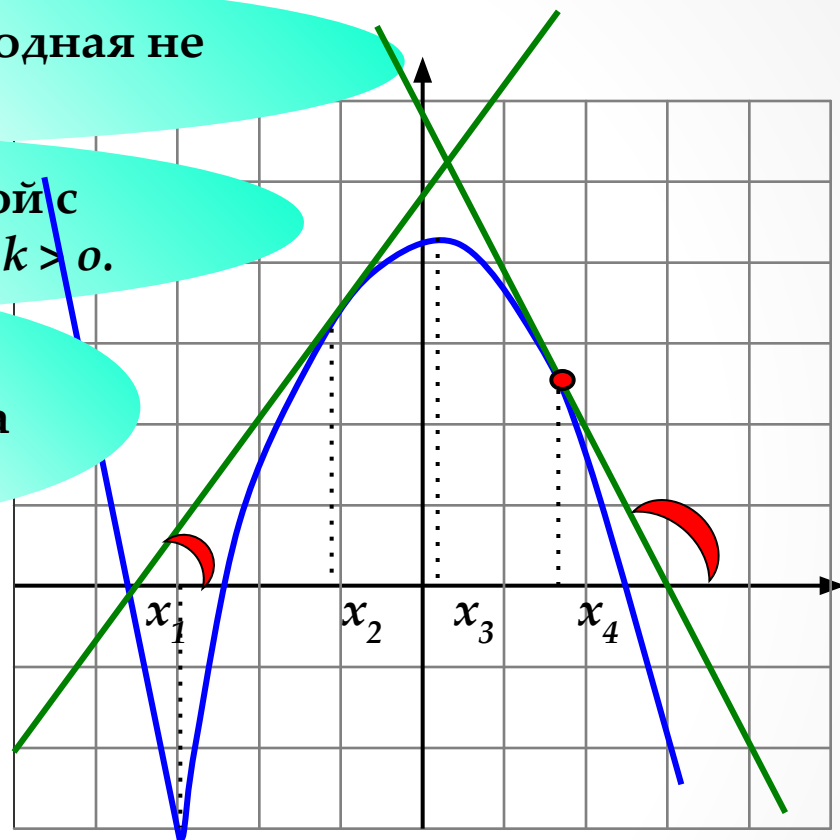
1 x_1

2 x_2

3 x_3

4 x_4

В этой точке производная равна нулю!

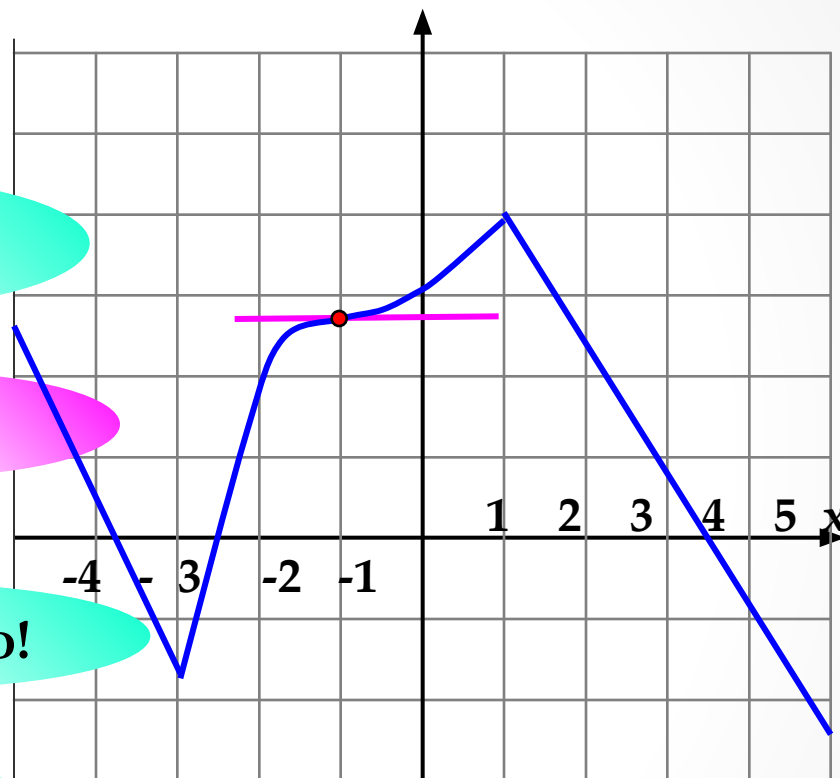


Верно!

Угол наклона касательной с осью Ox тупой, значит $k < 0$.



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке $[-5; 5]$. Укажите точку, в которой производная равна 0.



1

1

1

☐

Не верно!

2

-1

2

☒

Верно!

Не верно!

3

1

3

☐

Не верно

4

-3

4

☐

5

☐


Непрерывная функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$
 На рисунке изображен ее график. В ответе укажите
 количество точек графика этой функции, в которых
 касательная параллельна оси Ox .

1

3

Подумай

2

5

2



Верно!

3

8

Подумай!

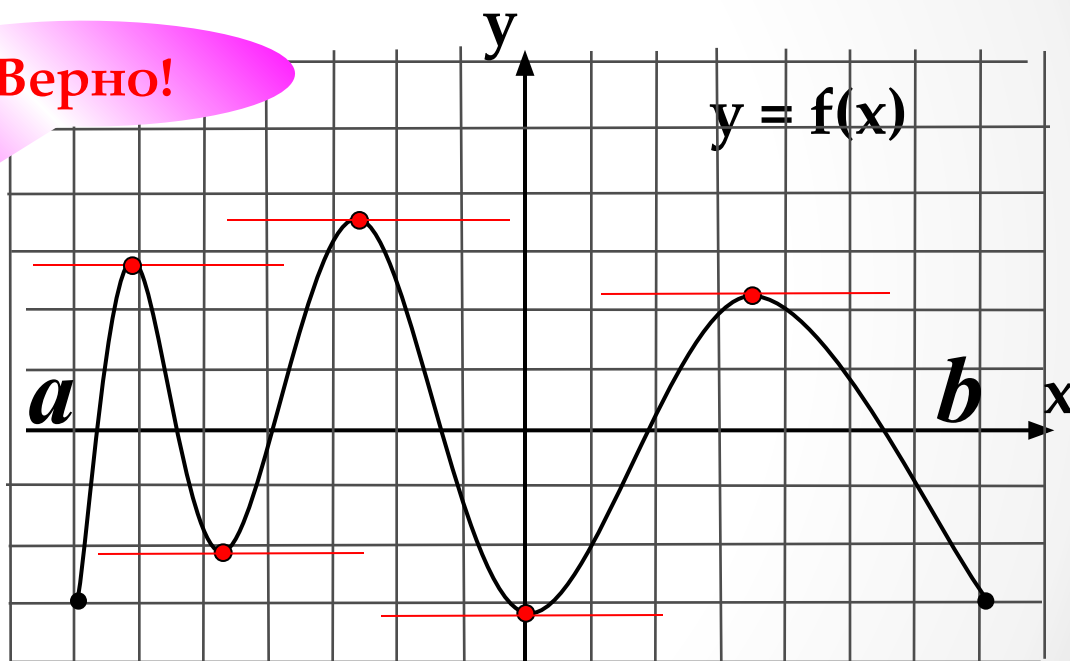
4

4

11

Подумай!

5

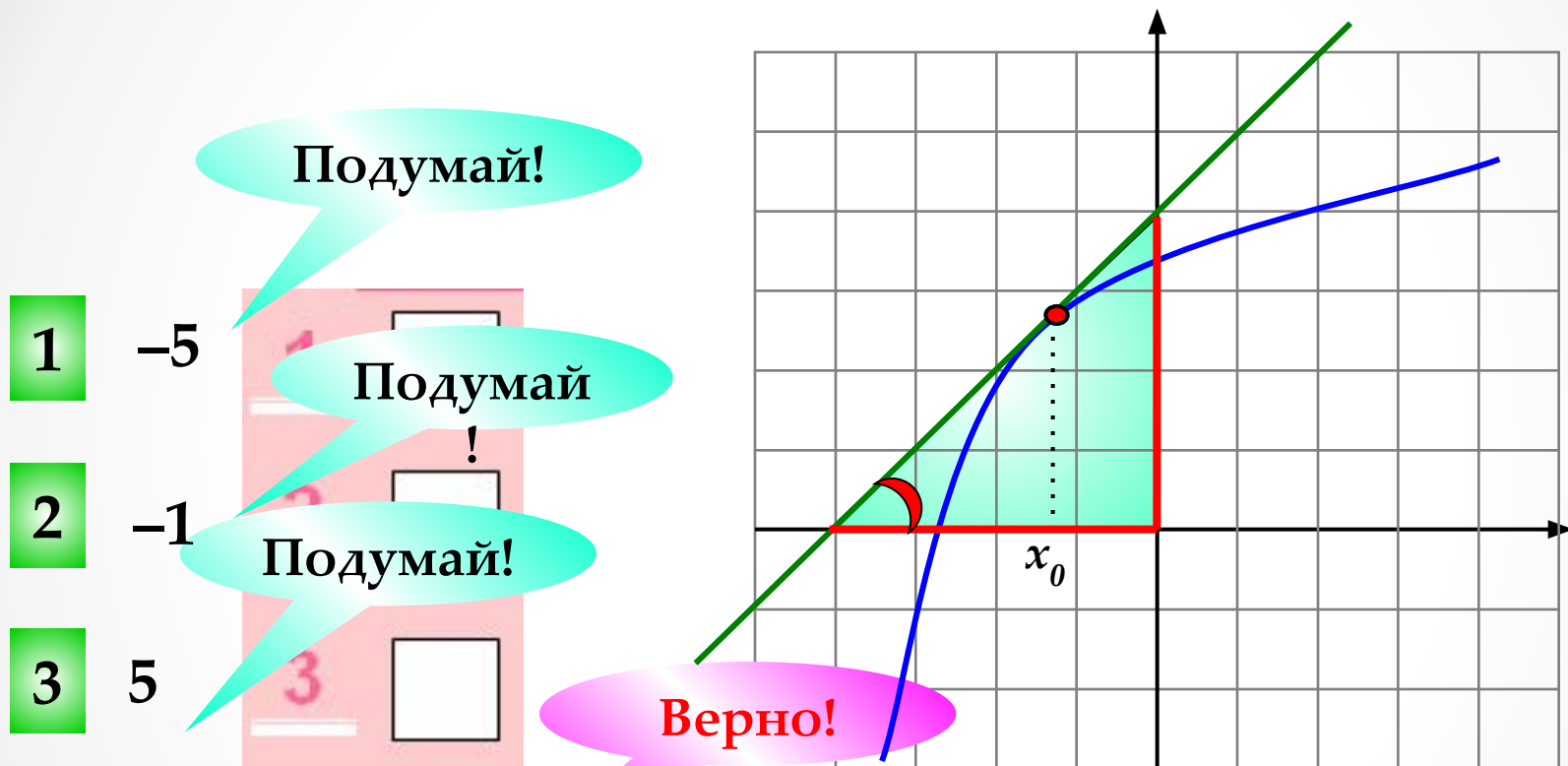


Проверка



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной в точке x_0 .



Подумай!

Подумай!

Подумай!

Верно!

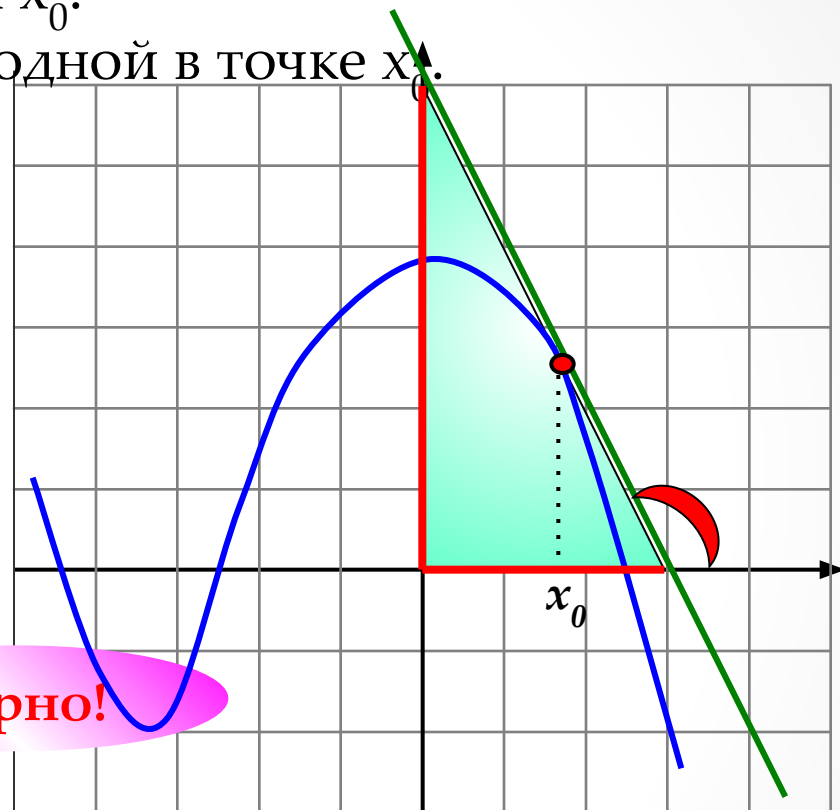
Геометрический смысл производной: $k = \operatorname{tg} \alpha$
Угол наклона касательной с осью Ox острый, значит $k > 0$.

Из прямоугольного треугольника находим $\operatorname{tg} \alpha = 4 : 4 = 1$



На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной в точке x_0 .



Подумай!

1 0,5

Подумай!

2 -0,5

2

3 -2

3

☒

Верно!

4 2

4

Подумай!

5

Геометрический смысл производной: $k = \operatorname{tg} \alpha$
Угол наклона касательной с осью Ox тупой, значит $k < 0$.

Из прямоугольного треугольника находим $\operatorname{tg} \alpha = 6 : 3 = 2$. Значит, $k = -2$

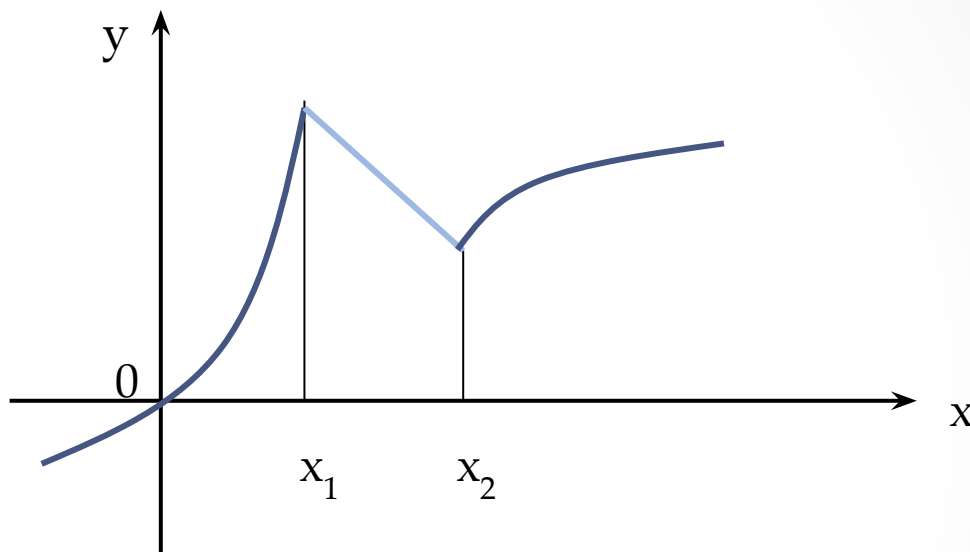
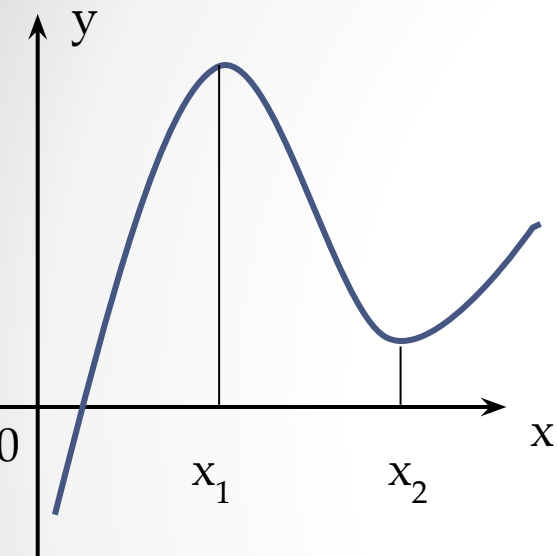


*Математику нельзя изучать,
наблюдая, как это делает сосед!*

Критические точки функции, максимумы и минимумы.



Определение: Внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называются критическими точками этой функции.



Теорема Ферма (необходимое условие экстремума)

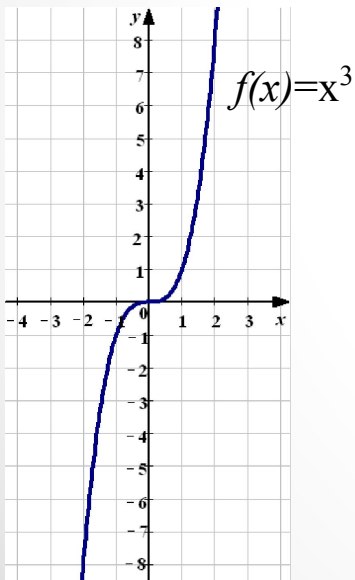
Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f' , то она равна нулю:
 $f'(x_0) = 0$.

Доказательство

Рассмотрим случай $f'(x_0) > 0$. По определению производной отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \rightarrow x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$, а следовательно, и само будет положительно при всех x , достаточно близких к x_0 . Для таких x $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, и значит $f(x) > f(x_0)$ для всех $x > x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 . Поэтому x_0 не является точкой максимума.

Если же $x < x_0$, то $f(x) < f(x_0)$, и, следовательно, x_0 не может быть и точкой минимума f .

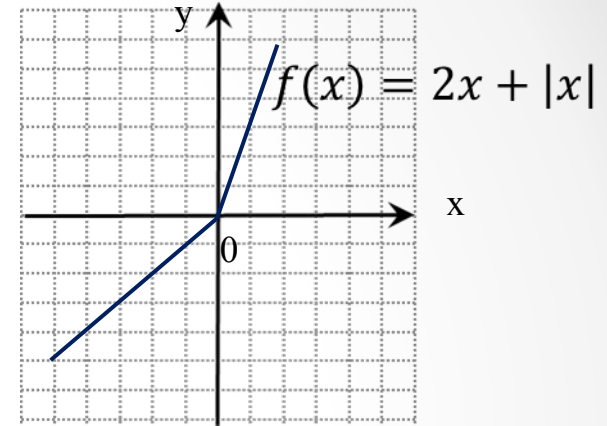
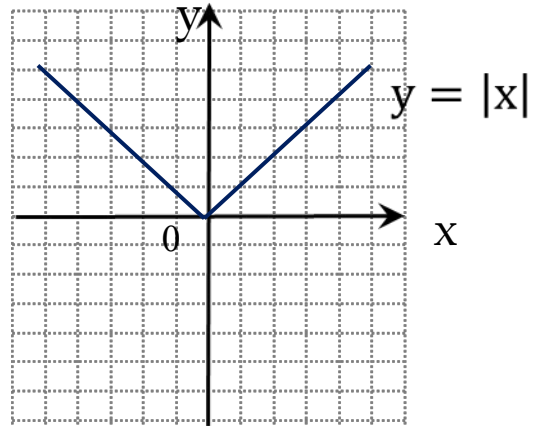
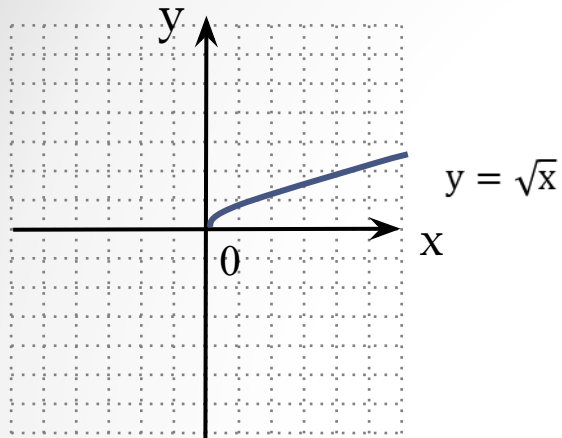
Случай $f'(x_0) < 0$ разбирается аналогично.



Важно! Теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке x_0 обращается в нуль, необязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум.

Например, производная $f(x) = x^3$ обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет.

Рассмотрим критические точки, в которых производная не существует. Точка 0 для функции $y = \sqrt{x}$ не является критической; в ней производная не существует, но она не является внутренней точкой области определения функции.



Функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0. Значит, 0 – критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2x + |x|$. По графику видно, что в точке 0 эта функция не имеет экстремума. В этой точке функция не имеет и производной.

Достаточные условия существования экстремума в точке.

Признак максимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x_0) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x_0) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой **максимума** функции f .

Если в точке x_0 производная меняет знак с **плюса на минус**, то точка x_0 есть точка **максимума**.

Доказательство.

Производная $f'(x_0) > 0$ на интервале $(a; x_0)$, а функция f непрерывна в точке x_0 , следовательно функция f возрастает на промежутке $(a; x_0]$, и потому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a; x_0)$.

На промежутке $[x_0; b)$ функция f убывает, и потому $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(x_0; b)$

Итак, $f(x) < f(x_0)$ для всех x из интервала $(a; b)$, то есть x_0 есть точка максимума.

Признак минимума функции. Если функция f непрерывна в точке x_0 , а $f'(x_0) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x_0) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то точка x_0 является точкой **минимума** функции f .

Если в точке x_0 производная меняет знак с **минуса на плюс**, то точка x_0 есть точка **минимума**.

Пример. Найдем точки экстремума функции $f(x) = 3x - x^3$.

Решение.

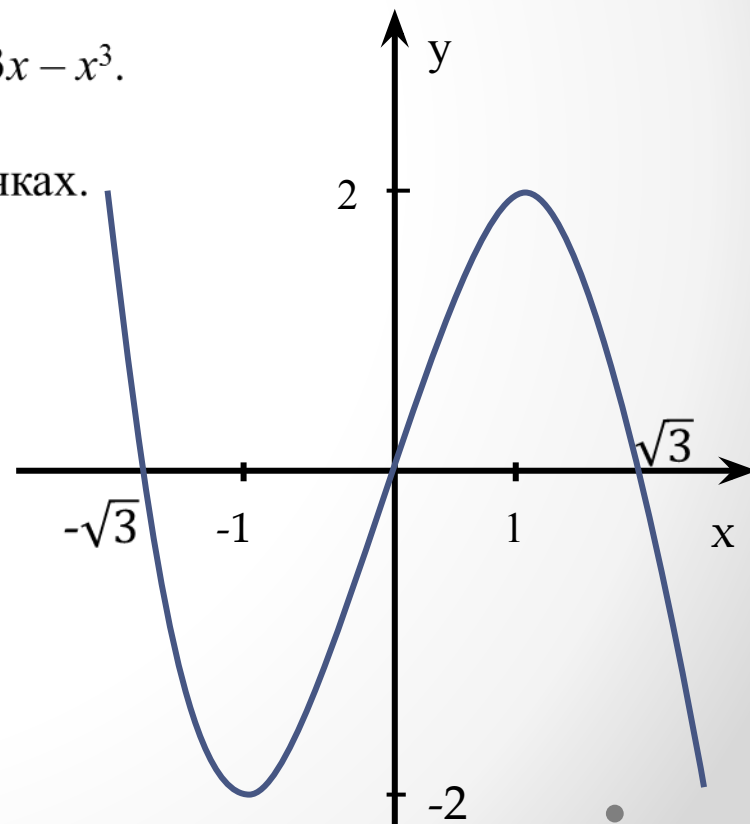
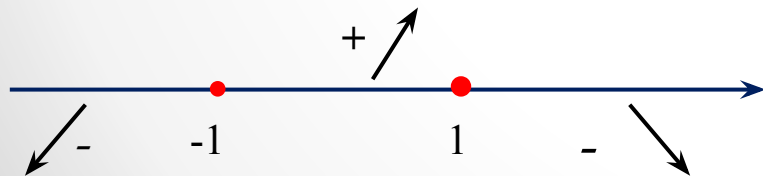
$f'(x) = 3 - 3x^2$. Производная определена во всех точках.

$f'(x) = 0$ при $x = -1$ и $x = 1$

$3x - x^3 = 0$ при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$

$x = -1$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума,

$f(1) = 2$, $f(-1) = -2$



Закрепление изученного:

Решить № 292

Задание на дом: п.23, № 288, 290



**СПАСИБО ЗА
УРОК!**

Математический диктант -автор Савченко Е.М.

http://www.it-n.ru/profil.aspx?cat_no=692&d_no=9658