Решение задач и пути ее реализации

Задачи на смеси и сплавы

Нейфельд Е.Л.
учитель математики

Задача:

Сколько кг воды нужно выпарить из 100 кг массы ягод, содержащей 90% воды, чтобы получить массу, содержащую 80% воды?

Решение задачи:

1) 100% - 90% =10%, что составляет 10 кг «чистого вещества».

2) Выпарили х кг, осталось (100 – х) кг,

20% = $\frac{1}{5}$

Уравнение: $\frac{10}{100-x}=\frac{1}{5}$

50=100 – х

Х =50

Ответ: 50кг.

Понятия:

- **Абсолютное содержание вещества в смеси** – это количество вещества, выраженное в обычных единицах измерения (грамм, литр и т. д.).
- **Относительное содержание вещества** – это отношение абсолютного содержания вещества к общей массе (объему) смеси.

Часто относительное содержание вещества называют концентрацией или процентным содержанием, при этом используют различные записи относительного содержания вещества: в долях, процентах.

Иллюстрация понятия:

Предположим, что в сосуд, содержащий 450 г воды, добавили 50 г соли. Общая масса

полученного раствора 500г

- Абсолютное содержание соли 50г, относительное содержание соли

$$\frac{50\text{ г}}{500\text{ г}} = \frac{1}{10} = 10\ \%$$

- Абсолютное содержание воды 450г, относительное содержание воды .

$$\frac{450\text{ г}}{500\text{ г}} = \frac{9}{10} = 0{,}9 = 90\ \%$$

а) <u>Смешали две смеси.</u>

При образовании смеси складываются абсолютные содержания. Поэтому, если известны только относительные содержания, то нужно:

- **1. Подсчитать абсолютные содержания;**
- **2. Сложить абсолютные содержания, компонент.**
- **3. Подсчитать относительные содержания компонента.**

- **<u>Пример 1:</u>** Смешали 500г 10% раствора соли и 400г 55% раствора соли. Определите концентрацию
 соли в смеси.

Решение:

500 г

Соль 10%
Вода 90%

400 г

Соль 55%
Вода 45%

Соль %
Вода %

Абсолютное содержание соли:

- в I растворе **500 · 0,1 = 50г.**
- во II растворе **400 · 0,55 = 220г.**
- Смесь двух исходных растворов составляет:

$$\frac{270\textit{г}(\textit{абсолютноесодержаниесоли})}{900\textit{г}(\textit{общаямасса})} = 0{,}3 = 30\%.$$

Общий подход к данному типу задач:

$\frac{P_1 m_1}{100}$ - масса соли в I растворе

$\frac{P_2 m_2}{100}$ - масса соли во II растворе

$\frac{P_1 m_1 + p_2 m_2}{100}$ - масса соли при смешивании

Процентное содержание соли в смеси:

$$P = \frac{\frac{P_1 m_1 + p_2 m_2}{100} \cdot 100}{m_1 + m_2} = \frac{p_1 m_1 + p_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\boxed{p_1 m_1 + p_2 m_2 = p\,(m_1 + m_2)}$$

б) Отлили часть раствора (отрезали кусок сплава).

Пример2: От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10% содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.

Пример2: **От куска сплава золота с серебром массой 500 г и 10% содержанием золота отрезали 20 г. Определите количество золота и серебра в отрезанном куске.**

500г

Золото 10 %

Серебро 90 %

отрезали →

20 г

Золото 10 %

Серебро 90 %

1) $\mathbf{20 \cdot 0{,}1 = 2}$ **г**

2) $\mathbf{20 \cdot 0{,}9 = 18}$ **г**

- **Пример3:** Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?

Пример3: **Руда содержит 40% примесей, а выплавленный металл 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т руды?**

Руда 24 т

Чистый металл 60%
Примеси 40%

Процесс плавки →

Металл х т

Чистый металл 96%
Примеси 4%

$24 \cdot 0{,}4 = 9{,}6$ т

$24 - 9{,}6 = 14{,}4$ т

$X - 0{,}04x = 0{,}96x$

$0{,}96x = 14{,}4$

$X = 15$

- **Пример 4:** В двух литрах водного раствора, содержащего 60% кислоты добавили 4 литра чистой воды. Определить % содержание кислоты в новом растворе?

Пример 4: **В двух литрах водного раствора, содержащего 60% кислоты добавили 4 литра чистой воды. Определить % содержание кислоты в новом растворе?**

Ответ можно получить по рассмотренной ранее формуле:

$$P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2} = \frac{60 \cdot 2 + 0 \cdot 4}{2 + 4} = \frac{60 \cdot 2}{6} = 20\%$$

- **Пример 5:** Сколько литров воды нужно добавить в 2 литра водного раствора, содержащего 60 % кислоты, чтобы получить 20 % раствора кислоты?

Пример 5: Сколько литров воды нужно добавить в 2 литра водного раствора, содержащего 60 % кислоты, чтобы получить 20 % раствора кислоты?

Арифметический способ:

$2 \cdot 3 = 6$ л.

6л – 2л = 4л

Алгебраический способ:

$0,6 \cdot 2 = 0,2\,(x + 2)$

$X = 4$

- **Пример 6:** Сколько л. воды нужно выпарить из 20л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?

Пример 6: **Сколько л. воды нужно выпарить из 20л раствора, содержащего 80% воды, чтобы получить раствор, содержащий 75% воды?**

Примеси в водном растворе

100% - 80% = 20%

Стало:

100% - 75% = 25%

Примеси увеличилось в

25 : 20 = 1,25 раза

Объем уменьшить в 1,25 раза

20 : 1,25 = 16л
20 – 16 = 4л

- **Пример 7**: Сплав состоящий из двух металлов весит 18 кг. После того как из него выделили 40% первого и 25% второго, в нем первого металла осталось столько же, сколько второго. Сколько килограмм каждого металла было первоначально в сплаве?

Пример 7: Сплав состоящий из двух металлов весит 18 кг. После того как из него выделили 40% первого и 25% второго, в нем первого металла осталось столько же, сколько второго. Сколько килограмм каждого металла было первоначально в сплаве?

Металл	I - x	II - y	Всего: x + y =18
Выделили	0,4 x	0,25 y	
Осталось	0,6 x	0,75 y	Поровну 0,6 x=0,75y

Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 18 \\ 0.6x = 0.75y \end{cases}$$

Ответ: 10 кг,8кг.

- **Пример 8:** Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30%.

Пример 8: Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5% и 40%. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30%.

Масса	**Чистое вещество**
I сорт X	0,05 x
II сорт У	0,4 y
Всего: x + y =140	0,05x +0,4y = 140 · 0,3

Система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 140 \\ 0.05x + 0.4y = 42 \end{cases}$$

Ответ: 40тонн, 100 тонн.

в) Задачи на многократные переливания.

Пример 1:

В ведре находится 10 литров чистого, а в баке 20 литров 40 % раствора этого спирта. Некоторое количество спирта из ведра перелили в бак, полученную смесь перемешали и точно такое же количество перелили обратно. Эту операцию повторили несколько раз, соблюдая следующие условия: в ведро переливают такое же количество раствора, какое перед этим перелили в бак; после каждого переливания раствор тщательно перемешивают. После нескольких описанных операций в ведре оказался 70 % раствор спирта. Определите % концентрацию раствора спирта в баке.

Пример 1:

В ведре находится 10 литров чистого, а в баке 20 литров 40 % раствора этого спирта. Некоторое количество спирта из ведра перелили в бак, полученную смесь перемешали и точно такое же количество перелили обратно. Эту операцию повторили несколько раз, соблюдая следующие условия: в ведро переливают такое же количество раствора, какое перед этим перелили в бак; после каждого переливания раствор тщательно перемешивают. После нескольких описанных операций в ведре оказался 70 % раствор спирта. Определите % концентрацию раствора спирта в баке.

Самое важное в задаче заключается в следующем: общее количество спирта в ведре и баке после всех переливаний не изменилось.

Первоначально спирта было **10 + 8 = 18** л. спирта.

В конце процесса в ведре $\boxed{10 + 8 = 18}$

$\boxed{10 \cdot 0{,}7 = 7 \text{ л}}$

$\boxed{18 - 7 = 11 \text{ л}}$

$$\boxed{\frac{11 \cdot 100}{20} \% = 55\%}$$

- **Пример 2:**
  В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке 20 л 75 % раствора спирта. Некоторое количество спирта переливают в бак, точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в ведре оказался 90 % раствор спирта. Сколько л спирта перелили из ведра в бак?

Пример 2:

В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке 20 л 75 % раствора спирта. Некоторое количество спирта переливают в бак, точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в ведре оказался 90 % раствор спирта. Сколько л спирта перелили из ведра в бак?

В баке **0,75 · 20 = 15 л** спирта, а вместе **10 + 15 = 25 л.**

После двух переливаний в ведре **0,9 · 10 = 9** л спирта

А в баке 25 – 9 = 16 л спирта

Доля спирта в баке $\frac{16}{20} = 0,8$.

x – количество переливаемого раствора

Перелитый в ведро раствор содержит 0,8 x л спирта

0,8 x л спирта

После двух переливаний
В баке осталось

15 + x – 0,8x = 15 + 0,2 x

15 + 0,2 x = 16
X = 5

- <u>**Пример 3:**</u> **В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько л. Спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом.**

Пример 3: **В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько л. Спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом.**

В 1 сосуде оказалось 16 л, а во 2 – 14 л спирта.
Пусть было первоначально в 1 сосуде x л, а во 2 (30 – x) л спирта.

После доливания водой первого сосуда спирт составляет $\boxed{\frac{x}{30}}$ всего объема. Во второй сосуд перелили $\boxed{x \cdot \frac{x}{30} = \frac{x^2}{30}\text{ л.}}$,

Стало: $\boxed{\left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right)\text{ л.}}$ Доля спирта $\boxed{\frac{30 - x + \frac{x^2}{30}}{30}}$

В 12 л смеси:

$$12 \cdot \frac{30 - x + \frac{x^2}{30}}{30} = 12 - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{75}$$

. Во 2 сосуде осталось:

$$(30 - x + \frac{x^2}{30}) - (12 - \frac{2}{5}x + \frac{x^2}{75}) = 18 - \frac{3x}{5} + \frac{x^2}{50}$$

или 14 л спирта.

$$18 - \frac{3x}{5} + \frac{x^2}{50} = 14$$

Ответ: $X_1 = 10$
$X_2 = 20$

Г) Более сложные задачи:

Пример 1: **Имеется 2 сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что 1 сплав содержит 40 % олова, а второй 26 % меди. % содержание цинка в 1 и 2 сплаве одинаковое. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определите, сколько кг олова содержится в получившемся новом сплаве?**

	медь	цинк	олово	Масса (кг.)	Т.к. процентное
1		30%	40%	150	Содержание цинка
2	26%	30%		250	Одинаковое и в 3
3		30%		400	Сплаве равно 30%, то в 1 и 2 сплавах

250 ▪ 0,3 = 75(кг) цинка 2 сплав

250 ▪ 0,26 = 65(кг) меди 2 сплав

250 – (75+65) = 110(кг) олово во 2 сплаве

150 ▪ 0,4 = 60(кг) олово в 1 сплаве

110 + 60 =170(кг) олово в 3 сплаве.

Пример 2: Из 2 растворов с различным процентным содержанием спирта и массой m и n отлили по одинаковому количеству спирта. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего % содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Пример 2:

Из 2 растворов с различным процентным содержанием спирта и массой m и n отлили по одинаковому количеству спирта. Каждый из отлитых растворов долили в остаток от другого раствора, после чего % содержание спирта в обоих полученных растворах стало одинаковым. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Геометрическая иллюстрация:

	Масса	Было	Отлили	Долили	Получили
1	m	am	ax	вx	am-ax+вx
2	n	вn	вx	ax	вn-вx+ax

а – частей спирта в 1 сосуде

в – частей спирта во 2 сосуде

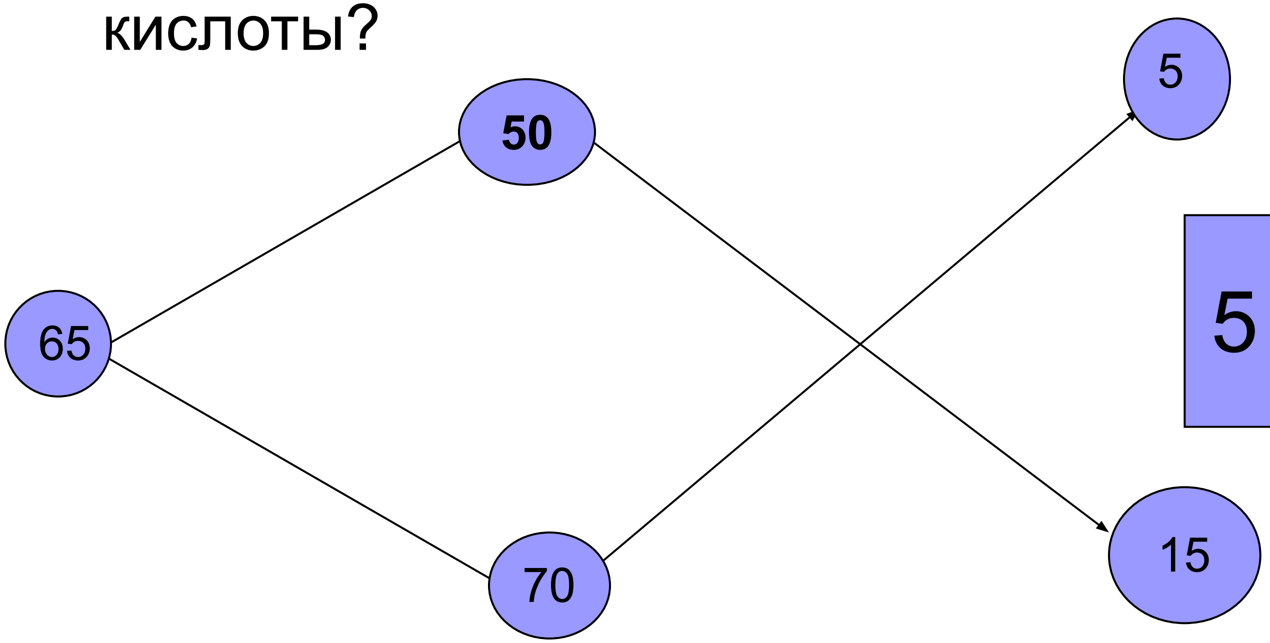
Т. к в обоих растворах процентное содержание спирта одинаково, то получим уравнение:

Уравнение:
$$\frac{am - ax + вx}{m} = \frac{вn - вx + ax}{n}$$

$$X = \frac{mn}{m + n}$$

Пример 1: Арифметический старинный способ

В каких пропорциях нужно смешать раствор 50 % и 70 % кислоты, чтобы получить раствор 65 % кислоты?



5 : 15 = 1 : 3

Алгебраический способ

x - количество 50% кислоты

y - количество 70% кислоты

(x+y) - количество смеси

$$0.5x + 0.7y = 0.65(x + y)$$

$$0.5x + 0.7y = 0.65x + 0.65y$$

$$0.15x = 0.05y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 1:3

Алгоритм решения задач на смеси и сплавы:

1. Выбор неизвестных.

2. Выбор чистого вещества.

3. Переход к долям.

4. Отслеживание состояния смеси или сплава.

5. Составление уравнения или выполнение действий.

6. Формирование ответа.

Тестовые задания

1. К 80 г 15% раствора соли добавили 20 г воды. Определите концентрацию получившегося раствора.

A) 10% B) 12% C) 20% D) 8%.

2. Сплав меди и олова массой 16 кг содержит 55% олова. Сколько чистого олова надо добавить в сплав, чтобы получившийся новый сплав имел 60% олова.

A) 2 кг B) 3 кг C) 5 кг D) 10 кг.

3. Из двух сплавов, которые содержат 60% и 80% железа, требуется получить 40 кг сплава с 75% содержанием железа сколько килограммов каждого сплава следует взять?

A) 24 кг и 16 кг B) 20 кг и 20 кг C) 10 кг и 30 кг D) 25 кг и 15 кг.

4. Чтобы получить 50% раствор кислоты надо к 30 г 15% раствора кислоты добавить 75% раствор этой же кислоты. Найдите количество 75% раствора кислоты, которое надо добавить.

A) 20 г B) 10 г C) 40 г D) 42 г.